Topologie, Exemple

1. Baza numarabilă în $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_0)$, $\mathcal{B} = \{(a,b) : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă care nu e uniform continuă:
$f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$; Pentru $x_1 = n + \frac{1}{n}$, $x_2 = n$ avem
$|x_1 - x_2| = \frac{1}{n} < \delta(\varepsilon)$ (pt. n suf. de mare)
$|f(x_1) - f(x_2)| = |(n+\frac{1}{n})^2 - n^2| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2$ (nu e mai mic ca ε)

3. Familia intervalelor $\{[n, \infty), n \in \mathbb{N}\}$ are proprietatea intersecției finite (~~sau~~ este centrată) (adică intersecția oricărei famili finite de astfel de intervale este nevidă). Dar $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, \infty) = \phi$.

4. Fie de exemplu $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_g)$ unde $\mathcal{T}_g$ este topologia grosieră pe $\mathbb{R}$. Atunci $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_g)$ este compact (din orice acoperire a lui $\mathbb{R}$ cu mulțimi deschise se poate extrage o acoperire finită, formată numai din mulțimea deschisă $\mathbb{R}$.) Dar $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_g)$ nu este Hausdorff deoarece pt. $x \neq y$, $x, y \in \mathbb{R}$, $V_x = \mathbb{R}$, $V_y = \mathbb{R}$ și $V_x \cap V_y = \mathbb{R} \neq \phi$.

5. $A = \{(t, 0) \in \mathbb{R}^2 ; t \in [0,1]\}$ care este un segment. A este mulțime conexă, închisă cu $\mathrm{Int}\, A = \phi$. (A este chiar conexă prin arce)

6. Șir fundamental de numere raționale
$$x_n = 1, a_1 a_2 \ldots a_n ,$$
unde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sunt primele n zecimale (în scrierea în baza 10) a numărului $\sqrt{2}$. Evident $|x_n - x_m| < \frac{1}{10^{p-1}}$, unde $p = \min\{m, n\}$.
Dar $x_n \to \sqrt{2}$ care nu este nr. rațional.

7. Funcția $f : [0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1-x}$, nu poate fi prelungită prin continuitate nici măcar în punctul $x_0 = 1$, deoarece
$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = +\infty$ și $f(x_0) = a \in \mathbb{R}$, $(a \neq \infty)$.

8. Spațiul topologic $X = \mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ ~~nu este~~ dotat cu topologia indusă pe X de topologia $\mathcal{T}_0$ de pe $\mathbb{R}$. (Poate fi reprezentat ca reuniune de 2 mulțimi deschise și disjuncte. Spațiul X este local conex, deoarece $\forall x \in X$ are o bază de vecinătăți conexe (de forma $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq X$).

9. Metrică în $\mathbb{R}^2$ diferită de metrica euclidiană și care induce topologia euclidiană. Dacă $x, y \in \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ luăm
$$d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| .$$
În acest caz $B(x_0, r)$ va fi un pătrat. În orice pătrat se poate găsi un disc cu centrul în centrul pătratului. Invers în orice disc se găsește un pătrat cu centrul în centrul discului.

10. Fie $(\mathbb{R}, d)$ spațiul dotat cu semimetrica $d(x,y)=0$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$. Această semimetrică generează topologia grosieră pe $\mathbb{R}$. Fie $A=\{x_0\}$, $x_0\in\mathbb{R}$ fixat. A nu e închisă (singurele mulțimi închise sunt $\emptyset$, $\mathbb{R}$). Dar A este completă deoarece orice șir de elemente ale lui A este constant deci fundamental și convergent.

11. $(\mathbb{R}, d')$ cu $d'(x,y)=|\operatorname{arctg} x-\operatorname{arctg} y|$, $\mathbb{R}$ este închisă în topologia generată de d'. La seminar s-a arătat că $(\mathbb{R}, d')$ nu este complet.

12. Semimetrică pe $\mathbb{R}$ care nu este metrică $d(x,y)=0$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

13. Fie $(\mathbb{R}, d)$, unde $d(x,y)=|x-y|$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$, (metrica uzuală); $\mathbb{R}$ este completă în $\mathcal{T}_d=\mathcal{T}_0$, dar nu este precompactă, (Nu e nici măcar mărginită)

14. Intervalul deschis $(0,1)\subseteq(\mathbb{R},\mathcal{T}_0)$ este precompactă, dar nu este compactă.

15. În $(\mathbb{R},\mathcal{T}_g)$, unde $\mathcal{T}_g$ este topologia grosieră fie $A=\{0\}\subseteq\mathbb{R}$. A este compactă dar nu este închisă în $(\mathbb{R},\mathcal{T}_g)$.

16. Mulțimea numerelor raționale $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ este de categoria I, dar nu e o mulțime rară a lui $(\mathbb{R},\mathcal{T}_0)$.

17. $A=D_1\cup D_2$, unde D_1 și D_2 sunt două ~~discuri~~ discuri închise din $(\mathbb{R}^2,\mathcal{T}_e)$ tangente exterior.  Aici $\mathcal{T}_e$ este topologia dată de metrica euclidiană. Interiorul mulțimii A nu este conexă.

18. Fie $(\mathbb{R},\mathcal{T}_g)$, $\mathcal{T}_g$ fiind topologia grosieră. Fie șirul $\{(-1)^n\}_{n\geq 1}$. Acest șir este convergent în $(\mathbb{R},\mathcal{T}_g)$ la ± 1 și la orice alt număr real. Vecinătățile oricărui număr real sunt formate doar din întreg $\mathbb{R}$.

19. În $(\mathbb{R},\mathcal{T}_0)$ fie mulțimea neconexă $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Închiderea ei în topologia $\mathcal{T}_0$ este întreg $\mathbb{R}$ care este o mulțime conexă.

20. $A\subseteq\mathbb{R}$, A finită. Frontiera mulțimii A în topologia $\mathcal{T}_0$ este A.

21. Fie $A=\{x_1,x_2,\dots x_n,\dots\}\cup\{x\}\subseteq\mathbb{R}$, unde șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent la x. La seminar s-a arătat că A este o mulțime compactă. Aici, pe $\mathbb{R}$ s-a considerat topologia $\mathcal{T}_0$.

22. Șirul lui $(\mathbb{R},\mathcal{T}_0)$ dat de $x_n=(-1)^n n$, $n=1,2,\dots$

23. Fie $x_n=1+\frac{1}{n}$, $n=1,2,\dots$, $y_n=n$, $n=1,2,\dots$. Atunci șirul cu termenii $x_1,y_1,x_2,y_2,\dots,x_n,y_n,\dots$ este cel căutat.

Topologie, întrebări.

a) Nu, deoarece $\bar{A}\supseteq A\neq\emptyset$.
Da, $\mathbb{R}$ verifică: $\operatorname{Fr}\mathbb{R}=\bar{\mathbb{R}}\setminus\operatorname{int}\mathbb{R}=\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}=\emptyset$.

b) Este suficientă o singură mulțime. $V_x=\{x\}$ care este o vecinătate a lui x, în topologia discretă.

c) $\mathcal{V}(x)$ = toate submulțimile lui X care-l conțin pe x.

d) Singura vecinătate a lui x este întreg X. $\mathcal{V}(x) = \{X\}$

e) În $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$ unde $\mathcal{T}_e$ este metrica euclidiană, decă x_0 este punct interior al mulțimii A $\Rightarrow B(x_0, \varepsilon) \subseteq A$ pt. un $\varepsilon > 0$ convenabil și $\forall y \in B(x_0, \varepsilon)$ este de asemenea punct interior pt A. Deci, în $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$ o dată cu $x_0 \in \text{Int} A$ mai există o infinitate nenumărabilă de alte puncte interioare.

În $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{discretă})$, mulțimea $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ are n puncte interioare

f) Fie F o mulțime finită $F = \{x_1, \dots, x_n\}$. Pres. că F este un spațiu T_1 $\Rightarrow \{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_n\}$ sunt toate mulțimi închise. Dar orice altă submulțime a lui F este reuniune finită de mulțimi închise (formate din ~~punctele~~ elementele mulțimii) deci este închisă. $\Rightarrow$ Toate submulțimile lui F sunt închise $\Rightarrow$ Toate subm. lui F sunt deschise $\Rightarrow$ pe F avem topologia discretă care este T_2. E Deci F finită și $T_2 \Rightarrow$ F este T_2.

g) și h) $f: (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{discretă}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{grosieră})$, $f(x) = x$.

f este continuă nici închisă nici deschisă. (vezi seminar).

i) Fie (X, d) spațiul metric dotat cu metrica discretă:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

Atunci am văzut la seminar $B(x,1) = \{x\} \Rightarrow \text{diam } B(x,1) = 0$

$B[x,1] = X$, $\Rightarrow \text{diam } B[x,1] = 1$.

$\Rightarrow \text{diam } B(x,1) < \text{diam } B[x,1]$.

j) Da. Șirurile fundamentale sunt șiruri constante începând de la un anumit rang, deci convergente.

k) nu.

l) nu. Fie $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

f și g sunt discontinue în toate punctele lui $\mathbb{R}$. Dar $f(x) + g(x) = 0$ cont.

$f(x) \cdot g(x) = -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, cont.

m) În spațiul metric (X, d) dotat cu metrica discretă oricare submulțime a lui X este și închisă și deschisă.

$B[x_0, r]$ ~~ca~~

$\Rightarrow$ răspuns: da.

n) mulțimea $A = \{0,1\} \times \mathbb{R}$ este formată din două drepte paralele cu axa Oy. care sunt ~~închise~~ mulțimi deschise ale lui A (cu topologia indusă de topologia euclidiană de pe $\mathbb{R}^2$).

o) Da. $X=\{a,b\}$ cu topologia grosieră pe X.

p) Da. $X=\{a,b\}$ cu topologia dată de metrica discretă

$B[a,1]=\{a,b\}=B(a,\frac{1}{2})\cup B(b,\frac{1}{2})$.

r) $\mathbb{R}^2$ cu topologia euclidiană este un spațiu topologic conex.

Dacă $A\neq\phi$, A mărginită $\Rightarrow A\neq\phi$ și $A\neq\mathbb{R}^2$.

Dacă $\operatorname{int}A=\bar{A}$, atunci ar rezulta că $\operatorname{int}A\subseteq A\subseteq\bar{A}\Rightarrow$

$A=\operatorname{int}A$ – deschisă și $A=\bar{A}$ – închisă. Contradicție

căci singurele submulțimi ale lui $\mathbb{R}^2$ și închise și deschise sunt ϕ și $\mathbb{R}^2$.

s) ~~Fie~~ $(X,\mathcal{T}_g)$ (cu topologia grosieră). Atunci X este spațiu compact

și X este mulțime deschisă (și închisă).

t) Nu. $X=[0,1]$, cu topologia discretă poate fi acoperit de toate punctele sale (care sunt mulțimi deschise)

$[0,1]=\bigcup_{t\in[0,1]}\{t\}$. Din această acoperire nu pot extrage una finită.

u) Da. Deoarece $\bar{\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}$ în top. $\mathcal{T}_u$, și $\operatorname{Int}\bar{\mathbb{Z}}=\operatorname{Int}\mathbb{Z}=\phi$.

v) Potrivit punctului j) $\mathbb{R}$ cu top. discretă este sp. metric complet.

Din Teorema lui Hausdorff deci $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{disc})$ ar fi precompact atunci $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{disc})$ ar fi precompact și complet $\Rightarrow(\mathbb{R},\mathcal{T}_{disc})$ ar fi compact.

Dar $\mathbb{R}=\bigcup_{t\in\mathbb{R}}\{t\}$ este o acoperire cu mulțimi deschise din care nu putem extrage o subacoperire finită. Răspuns: Nu.

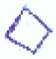
Topologie, Probleme de examen.

1\. a) Toate topologiile pe $X=\{a,b\}$ sunt $\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$

$\{\phi,\{a,b\}\}$, $\{\phi,\{a\},\{a,b\}\}$, $\{\phi,\{b\},\{a,b\}\}$

b) Am văzut la punctul f) întrebare că singura topologie T_1 (deci și T_2) pe o mulțime finită este cea discretă. Deci

$\{\phi,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$.

2\. Mulțimea A  (frontiera unui pătrat) este chiar conexă prin arce deci este conexă; avem $\operatorname{int}(A)=\phi$ și $\bar{A}=A$.

3\. Problema s-a considerat la seminar.

4\. Se verifică axiomele metricii pentru $d:\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*\to\mathbb{R}$.

$$d(x,y)=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right|,\ \forall x,y\in\mathbb{N}^*.$$

Observăm că pentru $x \in \mathbb{N}^*$ fixat $B(n,\varepsilon)=\{x\}$, $\forall \varepsilon < \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$.
Deci fiecare element $n \in \mathbb{N}^*$ este o mulțime deschisă. $\Rightarrow$ $\forall$ submulțime a
lui $\mathbb{N}^*$ este deschisă $\Rightarrow$ topologia generată de metrică este cea discretă.
Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$, dat de $x_n = n$, $n=1,2,\dots$. Acest șir este fundamental
deoarece $d(n,m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \varepsilon$, pt. $n \geq n(\varepsilon)$. Pp. că el converge la
elementul $x_0 \in \mathbb{N}^*$. Atunci în vecinătatea $B(x_0,\varepsilon) = \{x_0\}$, cu $\varepsilon < \frac{1}{x_0(x_0+1)}$
se află toți termenii șirului $(x_n)_{n\geq 1}$, începând de la un anumit rang.
„contradicție”. Înseamnă că nu orice șir fundamental în metrica dată
este convergent. $\Rightarrow$ $(\mathbb{N}^*, d)$ nu este un spațiu metric complet.

5. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$, $S = [0,1]\times\{0\}$, $A = D \setminus S$

a) $\overline{A} = D$, b) $\operatorname{Int}(A) = \left(D \setminus \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}\right) \setminus S$

c) $Fr(A) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\} \cup S$

d) Mulțimea $S \setminus \{(1/2, 0)\}$ nu este conexă.

6 - 7. Probleme de seminar

8. a) Singura vecinătate a lui $b \in X$ este întreg X. $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ În orice vecinătate a lui b se află toți termenii
șirului $a, b, a, b, a, \dots$. Deci, acest șir converge la b.
Șirul de mai sus nu converge către a, deoarece
în vecinătatea $V = \{a\}$ a lui a nu se află toți termenii
șirului cu excepția unui nr. finit de termeni.

b) Șirurile convergente din $(X, \mathcal{T})$ sunt:
- cele care conțin o infinitate de elemente a și o infinitate de elemente b.
- cele care conțin o infinitate de a și un nr. finit de b
- cele care conțin o infinitate de b și un nr. finit de a.

Exact aceste șiruri sunt convergente în $(X, \mathcal{T}_1)$.

Problemele 9-12 sunt probleme de seminar.