TEORIA MĂSURII

I Exemple

1. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ care nu este o σ-algebră

$\mathcal{A}$ – familia submulțimilor lui $\mathbb{N}$ cu proprietatea că ele sunt finite sau au complementele în $\mathbb{N}$ finite

a) $X \in \mathcal{A}$ deoarece $CX = \phi$ este finită

b) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A$ finită sau CA finită $\Rightarrow$ (CA finită sau $CCA = A$ finită)

c) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow$ 1) A finită, B finită $\Rightarrow A \cup B$ finită

2) A finită, CB finită $\Rightarrow C(A\cup B) = CA \cap CB$ – finită

3) CA finită, B finită $\Rightarrow C(A \cup B) = CA \cap CB \to$ finită

4) CA, CB finite $\Rightarrow C(A\cup B) = CA \cap CB$ – finită

$\Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ nu este σ-algebră deoarece

$A_1 = \{1\}, A_2 = \{3\}, A_3 = \{5\}, \ldots, A_n = \{2n-1\}, \ldots$ sunt finite

$\Rightarrow A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = \{1, 3, 5, \ldots, 2n-1, \ldots\}$ nu e nici finită și nici cu complementara finită.

2. Șir descendent de mulțimi A_n pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) \neq \mu(\cap A_n)$

$X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu(A) = \text{card } A$, (măsura de numărare)

$A_n = \{n, n+1, \ldots\}$ șir descendent de mulțimi.

$\mu(A_n) = \infty$, $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = +\infty$, $\mu(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu(\phi) = 0$

$\Rightarrow \infty = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) \neq \mu(\cap A_n) = 0$.

3. Măsură exterioară pe $\mathbb{N}$ care nu este măsură

$\varphi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0, \infty]$, $\varphi(A) = \begin{cases} 0, & A = \phi \\ 1, & A \neq \phi \end{cases}$

1) $\varphi(\phi) = 0$

2) $A \subseteq B \Rightarrow \varphi(A) \leq \varphi(B)$ $\Rightarrow \varphi$ este măsură exterioară

3) $\varphi(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$

Dar $\varphi(\{1,2\}) = 1 \neq \varphi(\{1\}) + \varphi(\{2\}) = 1+1 = 2$, deși $\{1\} \cup \{2\} = \{1,2\}$

$\{1\} \cap \{2\} = \phi$. $\Rightarrow \varphi$ nu e măsură pe $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

4. Mulțime infinită din $\mathbb{R}$ având măsura exterioară Lebesgue nulă. S-a dem. la seminar că mulțimea lui Cantor este infinită și are chiar măsura Lebesgue nulă.

5. Funcție integrabilă Lebesgue, care nu e integrabilă Riemann este funcția lui Dirichlet $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Avem sumele Darboux inferioare și superioare
$s(f,\Delta)=0$, $S(f,\Delta)=1$, $\Rightarrow S(f,\Delta)-s(f,\Delta)=1 \not< \varepsilon$, pt. o diviziune de normă suficient de mică $\Rightarrow f$ nu e integr. Riemann.
Deoarece $\mathbb{Q}\cap[0,1]$ este numărabilă, deci de măsură Lebesgue nulă
$\Rightarrow f(x)=0$, λ-a.p.t. și f este integr. Lebesgue cu $\int_{[0,1]} f\,d\lambda=0$.

6. Fie K mulțimea lui Cantor. Atunci $K\setminus\{1\}$ este o mulțime care nu este închisă (deoarece 1 este punct de acumulare de puncte ale lui K). Deoarece λ este o măsură completă din $K\setminus\{1\}\subseteq K$ și $\lambda(K)=0$ $\Rightarrow \lambda(K\setminus\{1\})=0$.

7. $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ continuă care nu este integr. Lebesgue.
$f(x)=\frac{1}{x}$, $x\in(0,1)$ $\Rightarrow \int_{0+}^{1} f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{1/n}^{1}\frac{1}{x}dx =$
$=\lim_{n\to\infty} -\ln(1/n) = \lim_{n\to\infty}\ln n=\infty$. $\Rightarrow f$ nu e integr. Lebesgue.

8. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ nemăsurabilă Lebesgue. (De exemplu $f(x)=$
$=\chi_E(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$, cu E nemăs. Lebesgue). Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$g(x)=-f(x)$. $\Rightarrow g$ nemăs. Lebesgue $\Rightarrow f+g\equiv 0$ și este măsurabilă Lebesgue.

9. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f_n(x)=\chi_{E_n}(x)$, $x\in\mathbb{R}$,
unde E_n este o mulțime nemăsurabilă $E_n\subseteq(0,\frac{1}{n})$.
Atunci $f_n \xrightarrow{\text{punctual}} f=0$. (Nu s-a studiat convergența în măsură)

10. Exemplul de mai sus.

11. Măsură $\mu:\mathcal{L}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, pentru care $\mu(\mathbb{R})=1$.
$\mu(A)=\int_A \frac{1}{2}e^{-|x|}d\lambda(x)$.

1) $\mu(\emptyset)=0$.

2) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right) \overset{A_n \text{ disjuncte } 2\times 2}{=} \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}\frac{1}{2}e^{-|x|}d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n}\frac{1}{2}e^{-|x|}d\lambda(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)$

3) $\mu(\mathbb{R})=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}e^{-|x|}d\lambda(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\int_0^{\infty}e^{-x}d\lambda(x)=-e^{-x}\Big|_0^{\infty}=1$.

12. Inegalitate strictă în lema lui Fatou. S-a făcut la seminar.

13. Funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neintegrabilă Lebesgue pentru care $|f|$ este integrabilă Lebesgue.

$$f(x) = \left(2\chi_E(x) - 1\right) e^{-|x|}, \; a\, E \subseteq \mathbb{R}, \text{ nemăsurabilă Lebesgue.}$$

$\Rightarrow f$ este nemăs. $\mathcal{L}$. (în caz contrar $g = 2\chi_E(x) e^{-|x|}$ ar fi măs.
$\Rightarrow 2\chi_E$ măsur. $\Rightarrow \chi_E$ măs. contrad.)

Dar $f(x) = \begin{cases} e^{-|x|}, & x \in E \\ -e^{-|x|}, & x \notin E \end{cases} \Rightarrow |f(x)| = e^{-|x|}, \forall x \in \mathbb{R}$ care

este măs. Lebesgue și $\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} d\lambda(x) = 2$.

14. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} e^{-|x|}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{\bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\} \\ n, & x = n, \; n = 1, 2, \dots \end{cases}$

f este evident nemărginită și fiind a.p.t. egală cu funcția integrabilă $g(x) = e^{-|x|}, x \in \mathbb{R}$, este și ea integr. Lebesgue.

IV. Întrebări a) nu. Dacă φ este măs. exterioară Lebesgue pe $\mathbb{R}$ și $\varphi(A) = 0$, din monotonia măsurii $\Rightarrow 0 \le \varphi(T \cap A) \le \varphi(A) = 0$,
$\forall T \subseteq X$. $\Rightarrow \varphi(T \cap A) = 0$.

$\Rightarrow \varphi(T) \underset{\text{monotonie}}{\geq} \varphi(T \cap CA) = \varphi(T \cap A) + \varphi(T \cap CA), \forall T \subseteq X$.
(este suficientă numai ineg. $\geq$)

$\Rightarrow A$ este măsurabilă Lebesgue.

$\Rightarrow \lambda(A) = \varphi(A) = 0$.

b) Da. O mulțime de tip Cantor netriadică (adică atunci când din subintervalele corespunzătoare ale lui $[0,1]$ se scot ~~din~~ segmente de lungime 1/4 din lungimile segmentelor corespunzătoare) O astfel de mulțime nu are nici un punct interior și măsura Lebesgue a mulțimii de tip Cantor va fi: $\lambda(K) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{4^2} - \frac{2^2}{4^3} - \frac{2^3}{4^4} - \dots =$

$$= 1 - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots\right) = 1 - \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

c) Nu, Deoarece o funcție etajată ia un număr finit de valori distincte $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$. Nefiind constantă $\Rightarrow n \geq 2$.

Dacă f ar fi continuă și ar lua cel puțin 2 valori distincte, din proprietatea lui Darboux a funcțiilor continue, ar lua o infinitate de valori intermediare, contradicție cu faptul că $f(X)$ este mulțime finită.

d) Orice $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă este boreliană, deci măsurabilă Lebesgue. Există $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) \equiv 1$, $x \in \mathbb{R}$ care nu este integr. Lebesgue pe $\mathbb{R}$, deoarece $\int_{\mathbb{R}} d\lambda(x) = \lambda(\mathbb{R}) = \infty$.

e) Nu, deoarece dacă φ ar fi o măsură, din

$T = (T \cap A) \cup (T \cap CA)$ și $(T \cap A) \cap (T \cap CA) = \phi$ ar rezulta $\varphi(T) = \varphi(T \cap A) + \varphi(T \cap CA)$, $\forall T \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, și deci orice submulțime a lui $\mathbb{R}$ ar fi măsurabilă Lebesgue (contradicție cu exemplul lui Vitali de mulțimi ale lui $\mathbb{R}$ nemăsurabile $\mathcal{L}$).

f) Da. Ea este cel mult numărabilă și deci de măsură Lebesgue nulă.

g) Da. Aderența oricărei mulțimi este o mulțime închisă, deci boreliană, deci măs. Lebesgue.

h) Da. Interiorul oricărei mulțimi este o mulț. deschisă deci boreliană, deci măs. $\mathcal{L}$.

i) Nu: $f_n(x) = \frac{1}{n} \chi_{[0,n^2]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, f_n este integr. Lebesgue

$$|f_n(x)| \le \frac{1}{n} \Rightarrow f_n \xrightarrow{u} 0.$$

Dar $\int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n} \chi_{[0,n^2]}(x) \, d\lambda(x) = \frac{1}{n} \int_0^{n^2} d\lambda(x) = \frac{n^2}{n} = n$, care este un șir divergent.

j) Da. Fie $E \subseteq [0,1]$ nemăs. $\mathcal{L}$ $\Rightarrow$ $\chi_E \to$ funct. nemăs. $\mathcal{L}$.

$$\{x \in \mathbb{R} : \chi_E(x) < \underset{c=0}{\underset{\downarrow}{0}}\} = \phi$$ care este o mulț. măs. $\mathcal{L}$.

k) Da. Intervalul $[a,b)$. Avem $[a,b] = \underbrace{\{a\}}_{\text{închisă} \Rightarrow \text{boreliană}} \cup \underbrace{(a,b)}_{\text{deschisă} \Rightarrow \text{boreliană}}$

$\Rightarrow [a,b)$ este o mulțime boreliană

l) Da. Fie $E \subseteq [0,1]$ nemăs. Lebesgue. E poate fi scrisă ca o reuniune a punctelor sale (care sunt mulț. închise), deci borel. deci măs. $\mathcal{L}$.)

m) Există algebre care nu sunt σ-algebre. (s-a mai dat acest exemplu).

n) Mulțimea $[0,1]\times\{0\}$ ca submulțime a frontierei pătratului $[0,1]\times[0,1]$ este de măsură nulă. S-a făcut la seminar în $\mathbb{R}^n$ între hiperparalelipipedul închis și deschis, frontiera este de măsură nulă.

$0 \le \lambda([0,1]\times\{0\}) \le \lambda([0,1]\times[0,1]) - \lambda((0,1)\times(0,1)) = 1-1=0.$

o) Nu. $f:(0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ este integr. $\mathcal{L}$, iar $f^2(x)=\frac{1}{x}$ nu e int. $\mathcal{L}$. pe $[0,1]$. Vezi seminar.

p) Da. $f(X)=\{c_1,\dots,c_n\}$, $c_i\neq 0$, $\forall i=\overline{1,n}$. $\Rightarrow$

$\cancel{\frac{X}{f(X)}} = \frac{1}{f}(X) = \{\frac{1}{c_1},\dots,\frac{1}{c_n}\}$ finită.

r) Nu. Dacă $E\subseteq\mathbb{R}^n$ este deschisă $\Rightarrow$ este boreliană $\Rightarrow$ este măs. $\mathcal{L}$. Fie $x_0\in E$, $x_0=(x_0^1,\dots,x_0^n)\in E$.

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon>0$ a.î. $G=(x_0^1-\varepsilon,x_0^1+\varepsilon)\times(x_0^2-\varepsilon,x_0^2+\varepsilon)\times\dots\times(x_0^n-\varepsilon,x_0^n+\varepsilon)\subseteq E\subseteq\mathbb{R}$

$\Rightarrow \lambda(E)\ge\lambda(G)=(2\varepsilon)^n>0.$

s) Da. $f(x)=x=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, cu $f_n(x)=\cancel{\sum_{k=-n^2}^{n^2} k\,\chi_{[\frac{k}{n},\frac{k}{n}+\frac{1}{n})}(x)}$

$$f_n(x)=\sum_{k=-n\cdot 2^n}^{n\cdot 2^n}\frac{k}{2^n}\,\chi_{[\frac{k}{2^n},\frac{k+1}{2^n})}(x).$$

t) Da. Fie $E\subseteq[0,1]$ nemăs. $\mathcal{L}$. $\Rightarrow [0,1]\setminus E \to$ nemăs. $\mathcal{L}$.

$\Rightarrow E\cup([0,1]\setminus E)=[0,1]\to$ măsur. $\mathcal{L}$.

u) Da. Deoarece singura mulțime de măsură nulă este mulțimea vidă.

v) Da. Fie $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x) \le \lim_{n\to\infty} f_0(x)=f_0(x)$. Deoarece f e măsurabilă ca lim. punct. de funcții măsur.

și deoarece $|f(x)| = f(x) \le f_0(x)$, cu f_0 integr.

$\Rightarrow$ f este integr fiind dominată de f_0.

iv) Deoarece $f = f^+ - f^- = f^+ - f^+ = 0 \Rightarrow f$ este identic nulă.

III. Probleme de examen.

1.) $f(x) = e^{-[2x]} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \chi_{[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2})}(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} e^{-k} \chi_{[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2})}(x)$

care este o funcție măsur. nenegativă ca limită punct. de funcții măsurabile.

$$\int_{[0,\infty)} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty)} \sum_{k=0}^{n} e^{-k} \chi_{[\frac{k}{2}, \frac{k+1}{2})}(x)\, d\lambda(x) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} e^{-k} \lambda\left(\left[\tfrac{k}{2}, \tfrac{k+1}{2}\right)\right) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{1}{2} \frac{e}{e-1}$$

2) a) $\lim_{n\to\infty} \int_{(0,\infty)} n \ln\left(1 + \frac{e^{-x}}{2n}\right) d\lambda(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \left[\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{2n}\right)^{\frac{2n}{e^{-x}}}\right] \frac{e^{-x}}{2n} \cdot n\, dx$

$$= \frac{1}{2} \int_{(0,\infty)} e^{-x}\, d\lambda(x) = -\frac{1}{2} e^{-x}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}.$$

b) $h'(t) = -\int_{(1,\infty)} (x^{100} + t)^{-2}\, d\lambda(x)$.

$$\Rightarrow h'(0) = -\int_{(1,\infty)} x^{-200}\, d\lambda(x) = \frac{x^{-199}}{199}\Big|_1^{\infty} = -\frac{1}{199}$$

3) $f = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(n+1)^2} \chi_{[n,2n)}(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{x}{n(n+1)^2} \chi_{(n,2n)}(x)$ este măsur. $\mathcal{L}$. ca limită punct. de funcții măs. $\mathcal{L}$.

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=1}^{k} \frac{x}{n(n+1)^2} \chi_{[n,2n)}(x)\, d\lambda(x) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)^2} \int_n^{2n} x\, d\lambda(x) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2n(n+1)^2} (4n^2 - n^2) = \frac{3}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2} = \frac{3}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \infty$$

4) a) Seminar.

b) $[a,b)=\{a\}\cup(a,b)\in\sigma\mathcal{T}_0=\sigma(\{(a,b): a,b\in\mathbb{R}, a<b\})$ *

Dar $(a,b)=\bigcup_{n=1}^{\infty}[a+\frac{1}{n},b)\in\sigma(\{[a,b): a,b\in\mathbb{R}, a<b\})$ **

$* \Rightarrow \sigma(\{[a,b): a<b\})\subseteq\sigma(\{(a,b): a<b\})$

$** \Rightarrow \sigma(\{(a,b): a<b\})\subseteq\sigma(\{[a,b): a<b\})$. } q.e.d.

5) Pentru $x, x_1\in\mathbb{R}$, $x>x_1$, avem: $f(x)-f(x_1)=$

$=\lambda(A\cap(-\infty,x])-\lambda(A\cap(-\infty,x_1])=\lambda(A\cap(x_1,x])\le$

$\le\lambda((x_1,x])=x-x_1. \Rightarrow 0\le f(x)-f(x_1)\le x-x_1.$

Analog, pentru $x_2>x \Rightarrow 0\le f(x_2)-f(x)\le x_2-x$.

În ambele cazuri $\forall x,y\in\mathbb{R} \Rightarrow |f(x)-f(y)|\le|x-y|$ şi

f este Lipschitz continuă.

Avem $\lim_{x\to-\infty}\lambda(A\cap(-\infty,x])=0$ (în caz contrar $\lambda(A)$ ar fi infinită)

$\lim_{x\to\infty}\lambda(A\cap(-\infty,x])=\lambda(A)$.

6) a) Seminar

b) Nu. Fie $E\subseteq[0,1]$, E nemăs. $\mathcal{L}$. $\Rightarrow f(x)=\chi_E(x), x\in\mathbb{R}$

este nemăs. $\mathcal{L}$. Dar $f(\mathbb{R})=\{0,1\}$.

7) $f_n(x)\to f(x) \Leftrightarrow f_n(x)$ este un şir fundamental.

$A=\{x\in X: \forall k\in\mathbb{N}, \exists n_0(k)\in\mathbb{N}$ a.î. $\forall m,n\ge n_0(k): |f_n(x)-f_m(x)|<\frac{1}{k}\}$

$=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}\bigcup_{m,n\ge n_0(k)}\{x\in X: \underbrace{-\frac{1}{k}<f_n(x)-f_m(x)<\frac{1}{k}}_{\in\mathcal{A}}\}\in\mathcal{A}$.

8) Deoarece $f=g$, λ-a.p.t. $\Rightarrow \nexists$ nici un subinterval nedegenerat al lui E a.î. în acest interval să nu avem cel puţin un punct x în care $f(x)=g(x)$. $\Rightarrow$ Mulţimea punctelor x din E în care $f(x)=g(x)$ este densă în E. Fie $\xi\in E$ fixat.

$\Rightarrow \exists x_n\in E$ a.î. $x_n\to\xi$ şi $f(x_n)=g(x_n)$. Din continuitatea lui f şi g $\Rightarrow f(\xi)-g(\xi)=\lim_{n\to\infty}(f(x_n)-g(x_n))=0. \Rightarrow f(\xi)=g(\xi)$ $\forall\xi\in E$.

9) Vezi seminarul.

10) Arătăm că d este semimetrică

1) $d(f,g) \geq 0$ evident

2) $d(f,g) = d(g,f)$ evident.

Deoarece $\forall\, a, b \geq 0 \Rightarrow \frac{a+b}{1+a+b} \leq \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b}$ (verificare!) (*)

din monotonia funcției $\frac{x}{1+x}$

vom avea $\frac{|f-g|}{1+|f-g|} = \frac{|(f-h)+(h-g)|}{1+|(f-h)+(h-g)|} \leq$

$\leq \frac{|f-h|+|h-g|}{1+|f-h|+|h-g|} \overset{(*)}{\leq} \frac{|f-h|}{1+|f-h|} + \frac{|h-g|}{1+|h-g|}$.

Integrând $\Rightarrow d(f,g) \leq d(f,h) + d(h,g)$.

11) S-a făcut la seminar.