Analiză reală. Probleme cu răspunsuri

Student: Ana Liza	Grupa: xxx	Nota: 10^*

$\boxed{1.}$ Precizaţi topologia generată pe mulţimea $X = \{a, b, c, d\}$ de familia $\mathcal{A} = \{\{a\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}\}$. Câte vecinătăţi are punctul c în această topologie?

....

$\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{d\}, \{b, d\}, \{a, d\}, \{c, d\}, \{a, b, d\}, \{b, c, d\}, \{a, c, d\}\}$

Vecinătăţile lui c sunt supramulţimile mulţimii $\{c, d\}$, în număr de 4.

$\boxed{2.}$ Pe mulţimea $X = \mathbb{R}^2$ se consideră semimetrica $d : X \times X \to \mathbb{R}$, $d((a, b), (c, d)) = |b - d|$, $\forall (a, b), (c, d) \in X$. Arătaţi că şirul $x_n = ((-1)^n, \frac{3n+1}{2n-1})$ este convergent în (X, d) şi precizaţi toate limitele acestuia.

....

$d(x_n, (u, v)) = |\frac{3n+1}{2n-1} - v| \to 0$ dacă şi numai dacă $v = 3/2$.

Deci limitele şirului x_n sunt de forma $(u, 3/2)$, $u \in \mathbb{R}$.

$\boxed{3.}$ Fie $\mathcal{T}$ topologia cofinită pe mulţimea $\mathbb{Z}$. **a)** Care sunt mulţimile închise care conţin mulţimea $\mathbb{N}$ în spaţiul topologic $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$? **b)** Precizaţi aderenţa şi interiorul mulţimii $\mathbb{N}$ în spaţiul topologic $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$.

....

a) Mulţimile închise sunt fie finite fie $\mathbb{Z}$. Deci singura mulţime închisă ce conţine $\mathbb{N}$ este $\mathbb{Z}$.

b) $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{Z}$ (cf. a)). $int(\mathbb{N}) = \emptyset$ căci singura mulţime deschisă $\subseteq \mathbb{N}$ este $\emptyset$.

$\boxed{4.}$ **a)** Definiţi noţiunea de omeomorfism. **b)** Daţi un exemplu de bijecţie $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_0)$ care nu este omeomorfism.

....

a) Pentru X, Y spaţii topologice, $f : X \to Y$ este omeomorfism dacă f este bijectivă şi f, f^{-1} sunt continue.

b) $f(x) = \begin{cases} x & , x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \\ 1 & , x = 0 \\ 0 & , x = 1 \end{cases}$

$\boxed{5.}$ **a)** Definiţi spaţiul topologic compact. **b)** Daţi un exemplu de topologie $\mathcal{T}$ pe $\mathbb{R}$ astfel încât $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ să fie spaţiu topologic compact.

. . . .

a) Spaţiul topologic este compact dacă din orice acoperire deschisă a acestuia se poate extrage o a coperire finită
b) Topologia indiscretă (sau orice altă topologie finită).

[Problema era mai complicată dacă se cerea ca topologia să fie *Hausdorff*; încercaţi!]

$\boxed{6.}$ **a)** Definiţi noţiunea de mulţime completă. **b)** Este intervalul $(0, 1)$ o mulţime completă în spaţiul metric $\mathbb{R}$ (cu metrica euclidiană)? (justificaţi răspunsul).

. . . .

a) O mulţime a unui spaţiu semimetric este completă dacă orice şir fundamental din mulţime este convergent către un punct din mulţime.

b) Nu este completă întrucât şirul $(1/n)_{n\geq 2}$ este fundamental dar nu este convergent în $(0, 1)$.
[Sau deoarece $(0, 1)$ nu este închisă în spaţiul metric complet $(\mathbb{R}, d_0)$].

$\boxed{7.}$ **a)** Definiţi spaţiul topologic conex prin arce. **b)** Daţi un exemplu de mulţime conexă prin arce A din spaţiul $\mathbb{R}^2$ (cu topologia naturală) astfel ca $\{(1, 0), (-1, 0)\} \subseteq A$, $\{(0, 1), (0, -1), (0, 0)\} \cap A = \emptyset$.

. . . .

a) Un spaţiu topologic X este conex prin arce dacă pentru oricare două puncte x, y din X există o funcţie continuă $f : [0, 1] \to X$ astfel încât $f(0) = x$, $f(1) = y$.

b) $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 1), (0, -1), (0, 0)\}$. [Sau A este linia poligonală de vârfuri $(1, 0), (0, 1/2), (-1, 0)$.]

$\boxed{8.}$ **a)** Definiţi noţiunea de funcţie uniform continuă. **b)** Arătaţi că orice funcţie $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ care are prelungire continuă la intervalul $[0, 1]$ este uniform continuă; ce teoremă se aplică?

. . . .

a) Pentru $(X, d), (Y, d')$ spaţii semimetrice, funcţia $f : X \to Y$ este uniform continuă dacă $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x_1, x_2 \in X$ $(d(x_1, x_2) < \delta) \implies (d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon)$.
b) Prelungirea $\tilde{f}$ fiind continuă pe compactul $[0, 1]$ este uniform continuă (teorema lui Cantor). Deci f ca restricţie a unei funcţii uniform continue este tot uniform continuă.

$\boxed{9.}$ Fie (X, d) un spaţiu metric şi A, B două submulţimi nevide ale lui X. **a)** Arătaţi că dacă $d(x, A) = d(x, B)$ pentru orice $x \in X$ atunci $\overline{A} = \overline{B}$. **b)** Daţi un exemplu din care să rezulte că nu poate fi dedusă concluzia $A = B$.

. . . .

a) Pentru $x \in A$ rezultă $0 = d(x, A) = d(x, B)$ deci $d(x, B) = 0 \implies x \in \overline{B}$.
Prin urmare $A \subseteq \overline{B}$. Rezultă $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. Analog $\overline{B} \subseteq \overline{A}$ şi deci $\overline{A} = \overline{B}$.
b) $X = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{Q}$, $B = \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, deoarece $d(x, A) = d(x, \overline{A})$.
[Sau $X = \mathbb{R}$, $A = [0, 1]$, $B = (0, 1)$.]
