

1. a) Definiți spațiile topologice conexe și conexe prin arce. Enunțați propoziția privind conexitatea reuniunii unei familii de mulțimi.

b) Enunțați și demonstrați teorema de legătură dintre conexitate și conexitatea prin arce.

2. a) Definiți mulțimile boreliene. Definiți funcția măsurabilă.

b) Enunțați și demonstrați teorema de caracterizare a funcțiilor măsurabile prin intermediul mulțimilor de nivel.

3. Fie $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x^2 - 3x - y^2 + 3y|$.

a) Arătați că (\mathbb{R}, d) este un spațiu semimetric dar nu este metric.

b) Determinați cel mai mare număr $a > 0$ pentru care d este metrică pe mulțimea $[0, a]$.

4. Calculați (cu justificare)

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi n \sin \frac{x^2}{x^2 + n} dx$.

b) $\mu(\mathbb{Q} \cup [0, 1])$, unde $\mu : \mathcal{L}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ este măsura definită prin $\mu(A) = \int_A e^x d\lambda(x)$.

5. Furnizați exemple (justificând afirmațiile) pentru:

a) Topologie pe \mathbb{R} care conține 5 mulțimi.

b) Șir numeric (x_n) pentru care $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

c) Funcție mărginită continuă $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care nu este integrabilă Lebesgue.

d) Mulțime din \mathbb{R}^2 închisă, nemărginită și având măsura Lebesgue egală cu 2017.
