$\boxed{\textbf{1.}}$ **a)** Definiţi spaţiile topologice compacte şi secvenţial compacte. Definiţi mulţimea precompactă şi enunţati teorema de caracterizare a precompactităţii care utilizează funcţia distanţă la o submulţime.

b) Enunţaţi teorema lui Hausdorff de caracterizare a spaţiilor semimetrice compacte. Demonstraţi implicaţia *secvenţial compact* $\Longrightarrow$ *precompact*.

$\boxed{\textbf{2.}}$ **a)** Enunţaţi teorema convergenţei dominate.

b) Enunţaţi şi demonstraţi teorema derivare a integralei ce depinde de un parametru.

$\boxed{\textbf{3.}}$ Fie $d : [1,\infty)\times[1,\infty)\rightarrow \mathbb{R}$, $d(x,y) = \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}\right|$.

a) Arătaţi că $([1,\infty), d)$ este un spaţiu metric.

b) Arătaţi că şirul $x_n = n$ este fundamental. Este spaţiu $([1,\infty), d)$ complet? Dar $([1,\infty), d_0)$, unde d_0 este metrica euclidiană?

$\boxed{\textbf{4.}}$ Calculaţi (cu justificare)

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^2 \frac{x^{n+2}}{e^x + x^n}\mathrm{d}x$.

b) $\lambda\left(\left\{(x,x) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\right\}\right)$, unde λ este măsura Lebesgue din $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{\textbf{5.}}$ Furnizaţi exemple (justificând afirmaţiile) pentru:

a) Topologie pe $\mathbb{R}$ în care să conţină exact 5 mulţimi.

b) Submulţime din $\mathbb{R}$ neconexă dar cu aderenţa conexă.

c) Funcţie integrabilă Lebesgue $f : (0,1)\rightarrow\mathbb{R}$ pentru care f^4 nu este integrabilă Lebesgue.

d) Mulţime din $\mathbb{R}^2$ închisă, nemărginită şi având măsura Lebesgue 1.
