

1. a) Definiți spațiile topologice conexe și conexe prin arce. Enunțați propoziția privind conexitatea reuniunii unei familii de mulțimi.

b) Enunțați și demonstrați teorema de legătură dintre conexitate și conexitatea prin arce.

2. a) Scrieți formulele care exprimă \limsup și \liminf cu ajutorul lui \inf și \sup . Enunțați lema lui Fatou.

b) Enunțați și demonstrați teorema convergenței dominate.

3. Fie $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x^2 - x - y^2 + y|$.

a) Arătați că (\mathbb{R}, d) este un spațiu semimetric dar nu este metric.

b) Determinați cel mai mare număr $a > 0$ pentru care d este metrică pe mulțimea $[0, a]$.

4. Calculați (cu justificare)

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{x^n \sin x}{1 + x^n} dx$.

b) $\mu(\{x \in \mathbb{R} : \sin x = 1/2\})$, unde μ este măsura de numărare pe \mathbb{R} .

5. Furnizați exemple (justificând afirmațiile) pentru:

a) Topologie pe \mathbb{R} în care orice submulțime este conexă.

b) Submulțime din \mathbb{R} închisă, nemărginită, cu interior vid.

c) Funcție continuă $f : [1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$ care nu este integrabilă Lebesgue.

d) Mulțime din \mathbb{R}^2 deschisă, nemărginită și având măsura Lebesgue 1.
