LECŢII DE ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE

RADU PRECUP

Non multa sed multum

Omagiu profesorilor mei de matematică:

Emilia Pălincaş şi **Elena Demian**
(Şcoala nr. 3, Arad)

Gheorghe Roşculeţ şi **Iustin Cornea**
(Liceul ,,Ioan Slavici"/,,Moise Nicoară", Arad)

Prefaţă

Prezenta carte poate fi considerată deopotrivă o ediţie nouă a lucrării *Ecuaţii cu derivate parţiale*, Transilvania Press, Cluj, 1997, cât şi un nou tratat consacrat ecuaţiilor cu derivate parţiale.

Practic, întregul conţinut al lucrării din 1997 se regăseşte între coperţile actualei cărţi, dar într-o formă nouă datorate unei ample restructurări şi regândiri a materialului. Acestea au fost făcute din dorinţa de a oferi studenţilor care iau contact prima dată cu această disciplină un material introductiv, unitar, accesibil, dar totodată suficient de bogat. Am dorit să răspundem acestui scop în **Partea I** a cărţii. Cititorul găseşte aici o introducere elementară în ecuaţii cu derivate parţiale liniare, în cadrul analizei matematice clasice, fără folosirea noţiunii de distribuţie. Totuşi, am considerat util ca în această primă parte să explicăm necesitatea introducerii noţiunii de soluţie generalizată sau slabă a problemelor la limită. Aceste soluţii se caută în spaţii de funcţii mai largi decât spaţiile uzuale de funcţii continuu diferenţiabile, obţinute prin completare în raport cu norma energetică ataşată problemei la limită corespunzătoare.

Există în literatură un număr apreciabil de manuale de introducere în teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale. Dintre acestea recomandăm lucrările în limba română: Barbu [3], Haimovici [17], Hărăguş [18], Iftimie [21], Kalik [23], Mihlin [29], Precup [39], Sobolev [50], Szilágyi [52], Tihonov-Samarski [55], Trif [56] şi Vladimirov [57]. Dintre tratatele în limbile engleză şi franceză indicăm: Di Benedetto [10], Dieudonné [11], Egorov–Shubin [13], Folland [14], Hörmander [19], John [22], Logan [28], Mikhailov [30], Mizohata [31], Nirenberg [34], Rauch [43], Schwartz [48] şi Shimakura [49], De asemenea indicăm culegerile de probleme Vladimirov ş.a. [58] şi Pikulin–Pohozaev [37].

Partea II se adresează studenţilor care urmează un al doilea curs de ecuaţii cu derivate parţiale, masteranzilor şi doctoranzilor în Ecuaţii diferenţiale, Analiză funcţională neliniară şi Matematică aplicată. Aici se prezintă teoria distribuţiilor, teoria spaţiilor Sobolev şi rezultate avansate în domeniul ecuaţiilor cu derivate parţiale neliniare. Cititorul care va parcurge până la capăt această parte va constata preferinţa autorului pentru modul de abordare operatorial. Acesta permite tratarea unitară a problemelor la limită neliniare, fie că este vorba de probleme de evoluţie (parabolice sau hiperbolice), fie de ecuaţii de echilibru. Teoria liniară serveşte construirii ecuaţiilor operatoriale şi identificării proprietăţilor operatorilor soluţie asociaţi problemelor la limită pentru ecuaţii neomogene. Aceste proprietăţi sunt mai apoi combinate cu proprietăţile termenilor neliniari perturbatori ai ecuaţiilor, pentru a face posibilă aplicarea rezultatelor de teoria operatorilor neliniari. Prin această parte am dorit să introducem cititorul interesat în teoria modernă a ecuaţiilor cu derivate parţiale şi de a-l sensibiliza în legătură cu cercetarea actuală în domeniu. O panoramă extrem de interesantă asupra marilor teme ale teoriei ecuaţiilor cu derivate parţiale şi asupra contribuţiilor majore la această teorie poate fi găsită in lucrarea Brezis–Browder [6].

Credem că structurarea pe două părţi, va face cartea utilă şi accesibilă unui număr cât mai mare de cititori: studenţi, masteranzi, doctoranzi şi cercetători interesaţi de Ecuaţii cu derivate parţiale, Analiză funcţională neliniară, Matematică aplicată şi Modelare matematică.

Cuprins

Partea I

INTRODUCERE IN TEORIA ECUAŢIILOR CU DERIVATE PARŢIALE

Capitolul 1
Generalităţi

1.1 Operatori diferenţiali fundamentali

a) *Operatorul de derivare parţială* D^α

Fie $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ un *multi-indice*. Notăm $|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j$ şi definim operatorul

$$D^\alpha : C^{|\alpha|}(\Omega) \to C(\Omega), \quad D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \, \partial x_n^{\alpha_n}}$$

care unei funcţii u îi ataşează derivata parţială de ordinul $|\alpha|$ în raport cu x_1 de α_1 ori, cu x_2 de α_2 ori, ..., cu x_n de α_n ori.

De exemplu, dacă $\alpha_j = 0$ pentru $j \neq k$ şi $\alpha_k = 1$, atunci $D^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_k}$. De asemenea, dacă $\alpha_j = 0$ pentru $j \neq k$ şi $\alpha_k = 2$, atunci $D^\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$.

In general, D^α se poate obţine prin compunerea operatorilor $\frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, 2, ..., n$, anume

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} ... \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}.$$

Ecuaţia

$$D^\alpha u = f$$

este cea mai simplă ecuaţie cu derivate parţiale de ordinul $|\alpha|$.

b) *Gradientul*

$$\nabla : C^1(\Omega) \to C(\Omega; \mathbf{R}^n), \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right).$$

c) *Divergenţa*

$$\mathrm{div} : C^1(\Omega; \mathbf{R}^n) \to C(\Omega), \quad \mathrm{div}\ \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{v}_j}{\partial x_j}$$

unde $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n)$.

d) *Operatorul lui Laplace* (*laplaceanul*)

Laplaceanul se defineşte ca fiind divergenţa gradientului, adică

$$\Delta : C^2(\Omega) \to C(\Omega), \quad \Delta u = \mathrm{div}\ \nabla u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

Ecuaţia

$$\Delta u = f$$

se numeşte *ecuaţia lui Poisson*, iar

$$\Delta u = 0$$

este *ecuaţia lui Laplace*. O soluţie oarecare $u \in C^2(\Omega)$ a ecuaţiei lui Laplace, se spune că este *funcţie armonică* pe Ω.

e) *Operatorul de derivare după o direcţie*

Fie $\upsilon \in \mathbf{R}^n$, $|\upsilon| = 1$ un vector unitar (versorul unei direcţii în $\mathbf{R}^n$). Definim operatorul

$$\frac{\partial}{\partial \upsilon} : C^1(\Omega) \to C(\Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial \upsilon}(x) = (\nabla u(x), \upsilon).$$

Este uşor de arătat că

$$\frac{\partial u}{\partial \upsilon}(x) = \lim_{t \to 0+} \frac{u(x + t\upsilon) - u(x)}{t}, \quad x \in \Omega.$$

Numărul $\frac{\partial u}{\partial \upsilon}(x)$ se numeşte *derivata lui u după direcţia υ*, în punctul x.

Un rol important îl are derivata după direcţia normalei într-un punct al suprafeţei $\partial\Omega$. Pentru a putea însă vorbi de normala într-un punct al frontierei $\partial\Omega$, este necesar ca Ω să aibă o anumită ,,netezime" în sensul pe care îl precizăm mai jos.

Fie k un număr natural nenul. Spunem că o mulţime deschisă $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ este de *clasă* C^k dacă pentru orice punct $x_0 \in \partial\Omega$ există $r > 0$ şi o funcţie $\varphi \in C^k\left(B_r\left(x_0\right); \mathbf{R}\right)$ astfel încât

$$\begin{aligned}
&\nabla\varphi\left(x\right) \neq 0 \quad \text{ pentru orice } x \in B_r\left(x_0\right),\\
&\Omega \cap B_r\left(x_0\right) = \left\{x \in B_r\left(x_0\right): \ \varphi\left(x\right) < 0\right\},\\
&\left(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}\right) \cap B_r\left(x_0\right) = \left\{x \in B_r\left(x_0\right): \ \varphi\left(x\right) > 0\right\}.
\end{aligned}$$

Se spune că Ω este de *clasă* C^∞, dacă Ω este de clasă C^k pentru orice $k \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$.

Dacă Ω este de clasă C^1, atunci vectorul

$$\nu\left(x\right) = \frac{1}{\left|\nabla\varphi\left(x\right)\right|}\nabla\varphi\left(x\right)$$

se numeşte *versorul normalei* (exterioare) la $\partial\Omega$ în punctul x ($x \in B_r\left(x_0\right) \cap \partial\Omega$). In plus $\nu \in C\left(B_r\left(x_0\right); \mathbf{R}^n\right)$. Dacă Ω este de clasă C^k $\left(2 \leq k \leq \infty\right)$, atunci $\nu \in C^{k-1}\left(B_r\left(x_0\right); \mathbf{R}^n\right)$.

Următorul rezultat de analiză matematică, *teorema divergenţei* sau teorema lui Gauss–Ostrogradski, este fundamental pentru teoria clasică a ecuaţiilor cu derivate parţiale.

Teorema 1.1 (Gauss–Ostrogradski) *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă, mărginită şi de clasă C^1 şi fie $\mathbf{v} \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbf{R}^n)$. Atunci*

$$\int_{\partial\Omega} \left(\mathbf{v}, \nu\right) d\sigma = \int_{\Omega} \operatorname{div}\, \mathbf{v}\, dx. \tag{1.1}$$

In particular, dacă $\mathbf{v}_j \equiv 0$ pentru $j \neq k$ şi $\mathbf{v}_k = uv$, unde $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$, atunci (1.1) devine

$$\int_{\partial\Omega} uv\, \nu_k\, d\sigma = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} v + u\frac{\partial v}{\partial x_k}\right) dx, \tag{1.2}$$

adică *formula integrării prin părţi* pentru funcţii de mai multe variabile. Aici ν_k este componenta k a versorului normalei exterioare ν.

Condiţiile de netezime impuse de Teorema 1.1 lui Ω şi $\mathbf{v}$ (care, în fapt, pot fi relaxate, a se vedea, de exemplu, Dautray–Lions [9, Vol. 2] sau Barbu [3], se vor răsfrânge asupra tuturor formulelor integrale care vor fi deduse din (1.1).

1.2 Ecuaţii liniare şi cvasiliniare cu derivate parţiale

O ecuaţie *liniară* cu derivate parţiale este o ecuaţie de forma

$$Lu = f \tag{1.3}$$

unde L este un operator diferenţial liniar, adică

$$L : C^m(\Omega) \to C(\Omega), \quad Lu = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha u \tag{1.4}$$

în care a_α, $f \in C(\Omega)$ sunt funcţii date, iar u este funcţia necunoscută. Se presupune că există un multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^n$ astfel încât $|\alpha| = m$ şi $a_\alpha \neq 0$; în acest caz, se spune că operatorul (1.4), respectiv ecuaţia (1.3), este de *ordinul* m.

Cele mai frecvent întâlnite ecuaţii, cu un rol important în fizica matematică, sunt ecuaţiile de ordinul al doilea ($m = 2$); acestea sunt studiate în mod exclusiv în prezenta carte. Pentru $m = 2$, ecuaţia (1.3) se poate rescrie în felul următor:

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x) u = f(x). \tag{1.5}$$

Vom presupune că a_{jk}, b_j, c, $f \in C(\Omega)$ şi $a_{jk} = a_{kj}$ oricare ar fi j şi k. Dacă $f \equiv 0$, se spune că ecuaţia este *omogenă.*

O ecuaţie de forma

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + F\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{1.6}$$

în care $F \in C\left(\Omega \times \mathbf{R}^{n+1}\right)$, se numeşte ecuaţie *cvasiliniară* de ordinul doi. Aşadar, o ecuaţie de ordinul doi este cvasiliniară, dacă partea ei principală ce conţine derivatele parţiale de ordinul al doilea este liniară

Ecuaţiei (1.6), în particular ecuaţiei (1.5), mai precis părţii ei principale, i se asociază, în fiecare punct $x \in \Omega$, un polinom omogen de gradul al doilea în variabilele ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n :

$$P(x, \xi) = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \xi_j \xi_k,$$

unde $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$, numit *polinom caracteristic* (sau *simbol principal*).

Una din temele de bază ale teoriei clasice a ecuaţiilor cu derivate parţiale constă în a asocia proprietăţi ale operatorului diferenţial ce intervine în ecuaţie, cu proprietăţi algebrice sau geometrice ale polinomului caracteristic. In legătură cu aceasta este şi clasificarea tradiţională în ecuaţii eliptice, parabolice şi hiperbolice.

Spunem că ecuaţia (1.6) este:

a) *eliptică* în x dacă $P(x, \xi) \neq 0$ pentru orice $\xi \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$;

b) *parabolică* în x dacă $P(x, \xi) \geq 0$ pentru orice $\xi \in \mathbf{R}^n$ (sau $P(x, \xi) \leq 0$ pentru orice $\xi \in \mathbf{R}^n$) şi există $\xi_0 \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ astfel încât $P(x, \xi_0) = 0$;

c) *hiperbolică* în x dacă există $\xi, \xi' \in \mathbf{R}^n$ cu $P(x, \xi) > 0$ şi $P(x, \xi') < 0$.

Se spune că ecuaţia (1.6) este *eliptică* (*parabolică,* respectiv *hiperbolică*) pe $\Omega' \subset \Omega$, dacă ea este eliptică (parabolică, respectiv hiperbolică) în orice punct $x \in \Omega'$.

Subliniem faptul că o aceaşi ecuaţie poate să-şi schimbe tipul de la o submulţime la alta a lui Ω. De exemplu, *ecuaţia lui Tricomi*

$$x_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$$

este eliptică în semiplanul $x_2 > 0$, hiperbolică pentru $x_2 < 0$ şi parabolică pe dreapta $x_2 = 0$.

Dacă însă coeficienţii a_{jk} sunt constanţi pe Ω, atunci ecuaţia (1.6) are acelaşi tip pe întregul Ω. Intr-adevăr, în acest caz, polinomul caracteristic P nu depinde de x.

Următoarele ecuaţii remarcabile sunt reprezentative pentru cele trei tipuri de ecuaţii:

1) **Ecuaţia lui Poisson:**

$$\Delta u = f(x), \quad x \in \Omega.$$

Pentru aceasta avem $P(x, \xi) = P(\xi) = |\xi|^2$, de unde rezultă că ecuaţia este **eliptică** pe Ω.

2) **Ecuaţia căldurii:**

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x, t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty).$$

In această ecuaţie $u = u(x,t)$, $\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$, iar a este un coeficient nenul.

Pentru această ecuaţie în care funcţia necunoscută u depinde de $n+1$ variabile (n variabile spaţiale $x_1, x_2, ..., x_n$ plus variabila timp t), avem $P(\xi) = -a^2 \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2$, unde $\xi \in \mathbf{R}^{n+1}$. Rezultă că ecuaţia căldurii este **parabolică** pe $\Omega \times (0,\infty)$.

3) **Ecuaţia undelor:**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty).$$

Cu aceleaşi precizări ca la ecuaţia căldurii, avem $P(\xi) = \xi_{n+1}^2 - a^2 \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2$, $\xi \in \mathbf{R}^{n+1}$. Rezultă că ecuaţia undelor este **hiperbolică** pe $\Omega \times (0,\infty)$.

1.3 Soluţii ale câtorva ecuaţii particulare

0) Pentru $n = 1$, $\Omega = (a,b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ şi $f \in C(a,b)$, ecuaţia lui Poisson este

$$u'' = f(x), \quad x \in (a,b).$$

Soluţiile ei sunt funcţiile

$$u(x) = c_1 x + c_2 + \int_{x_0}^{x} \left(\int_{x_0}^{t} f(s)\, ds \right) dt, \quad c_1,\, c_2 \in \mathbf{R},$$

unde x_0 este un punct fixat din intervalul (a,b).

Pentru $n = 1$ ecuaţia lui Laplace este $u'' = 0$, iar soluţiile ei, adică funcţiile armonice pe intervalul (a,b), sunt funcţiile liniare pe (a,b).

1) Considerăm ecuaţia lui Laplace pe o mulţime deschisă Ω din plan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0, \quad (x_1,x_2) \in \Omega.$$

Observăm că funcţiile liniare $u(x_1,x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3$, ca şi funcţiile $u(x_1,x_2) = c\left(x_1^2 - x_2^2\right)$, sunt soluţii ale ei. Putem determina alte soluţii căutându-le sub forma $u(x_1,x_2) = A(x_1)\, B(x_2)$, adică cu variabilele separate. Atunci

$$A''(x_1)\, B(x_2) + A(x_1)\, B''(x_2) = 0, \quad (x_1,x_2) \in \Omega.$$

Presupunând că funcţiile A şi B nu sunt identic nule, obţinem

$$\frac{A''(x_1)}{A(x_1)} = -\frac{B''(x_2)}{B(x_2)} = \lambda,$$

unde λ este o constantă oarecare. Rezultă că

$$A''(x_1) - \lambda A(x_1) = 0 \quad \text{şi} \quad B''(x_2) + \lambda B(x_2) = 0.$$

Rezolvând aceste două ecuaţii în cazul $\lambda = c^2$ şi apoi $\lambda = -c^2$, găsim că funcţiile $e^{cx_1}\sin cx_2,\ e^{cx_1}\cos cx_2,\ e^{cx_2}\sin cx_1,\ e^{cx_2}\cos cx_1$, unde $c \in \mathbf{R}$, sunt funcţii armonice pe Ω. Este clar că orice combinaţie liniară de funcţii armonice este tot o funcţie armonică. Soluţiile prezentate mai sus nu epuizează însă mulţimea tuturor funcţiilor armonice pe Ω.

2) Putem determina soluţii cu variabilele separate şi pentru ecuaţia căldurii în cazul $n = 1$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in (\alpha, \beta),\ t \in (0, \infty).$$

Fie $u(x,t) = A(x)B(t)$. Inlocuind în ecuaţie obţinem

$$A(x)B'(t) - a^2 A''(x)B(t) = 0.$$

Rezultă

$$\frac{A''(x)}{A(x)} = \frac{B'(t)}{a^2 B(t)} = \lambda,$$

unde λ este o constantă. Procedând ca la punctul 1), obţinem soluţiile: $e^{cx+a^2c^2t},\ e^{-cx+a^2c^2t},\ e^{-a^2c^2t}\sin cx,\ e^{-a^2c^2t}\cos cx$, unde $c \in \mathbf{R}$. Ecuaţia fiind liniară şi omogenă, orice combinaţie liniară de soluţii este de asemenea soluţie. Nici în acest caz nu am epuizat însă toate soluţiile ecuaţiei.

3) Considerăm ecuaţia omogenă a undelor în cazul $n = 1$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x \in (\alpha, \beta),\ t \in (0, \infty).$$

Efectuăm schimbările de variabile $x + at = y$ şi $x - at = s$. Avem

$$\begin{aligned} &u_t = u_y y_t + u_s s_t = a u_y - a u_s, \quad && u_x = u_y y_x + u_s s_x = u_y + u_s,\\ &u_{tt} = a^2(u_{yy} - 2u_{ys} + u_{ss}), && u_{xx} = u_{yy} - 2u_{ys} + u_{ss}. \end{aligned}$$

Rezultă că în noile variabile y şi s, ecuaţia se scrie sub forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial s} = 0.$$

Soluţiile ei sunt $u(y,s) = \varphi(y) + \psi(s)$, unde φ şi ψ sunt funcţii arbitrare de clasă C^2. Aşadar, toate soluţiile ecuaţiei omogene a undelor pentru $n = 1$ sunt

$$u(x,t) = \varphi(x + at) + \psi(x - at),$$

cu φ şi ψ funcţii arbitrare de clasă C^2.

1.4 Probleme la limită

Aşa cum se cunoaşte din teoria ecuaţiilor diferenţiale ordinare şi după cum rezultă din exemplele prezentate în paragraful anterior, mulţimea soluţiilor unei ecuaţii diferenţiale în general, cu derivate parţiale în particular, este, în general, extrem de bogată. Pentru a selecta o soluţie anume este necesar să fie impuse condiţii suplimentare funcţiei necunoscute u. De regulă aceste condiţii se impun la limită, pentru $x \to \partial\Omega$, unde Ω este mulţimea deschisă care reprezintă domeniul ecuaţiei. Amintim că în cazul ecuaţiilor diferenţiale ordinare, astfel de condiţii sunt: condiţia lui Cauchy (pe un punct) şi condiţiile bilocale (pe două puncte).

Motivarea condiţiilor la limită pe frontieră, provine din interpretarea ecuaţiilor ca modele matematice care descriu procese reale (fizice, chimice, biologice, economice, etc.) ce se desfăşoară într-o porţiune Ω din spaţiu. Este aşadar natural ca modelul matematic să ţină cont şi de anumite conexiuni cu procesele care au loc în afara lui Ω. Aceste conexiuni se exprimă matematic prin valorile funcţiei u şi ale unora din derivatele ei parţiale, pe punctele frontierei $\partial\Omega$.

In continuare formulăm principalele probleme la limită pentru ecuaţia lui Laplace/Poisson, ecuaţia căldurii şi pentru ecuaţia undelor, probleme pe care le vom studia în cele ce urmează.

1. Probleme la limită pentru ecuaţia lui Poisson

a) *Problema Dirichlet.* Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi mărginită. Se caută $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ astfel încât

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{pe } \Omega \\ u = g & \text{pe } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.7}$$

unde $f \in C(\Omega)$ şi $g \in C(\partial\Omega)$ sunt funcţii date.

b) *Problema Neumann.* Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă, mărginită şi de clasă C^1. Se caută $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ astfel încât

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{pe } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{pe } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.8}$$

unde $f \in C(\Omega)$ şi $g \in C(\partial\Omega)$.

c) *Problema Robin.* Această problemă, numită şi *a treia problemă la limită*, diferă de problema Neumann prin condiţia pe frontieră care este mai generală:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{pe } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} + au = g & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.9}$$

Aici $f \in C(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$ şi $\alpha \in C(\partial\Omega)$.

d) *Probleme la limită exterioare.* Se consideră o mulţime deschisă $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ având complementara compactă (aşadar Ω este nemărginită). Atunci, problemele Dirichlet, Neumann şi Robin *exterioare* se definesc ca mai sus, adăugându-se condiţia la limită spre infinit

$$u(x) \to 0 \quad \text{pentru } |x| \to \infty,$$

sau condiţia de mărginire

$$|u(x)| \le M, \quad x \in \Omega.$$

Menţionăm faptul că problemele la limită Dirichlet, Neumann şi Robin pot fi formulate, mai general, relativ la orice ecuaţie eliptică (1.6).

2. Probleme la limită pentru ecuaţia căldurii

a) *Problema Cauchy–Dirichlet.* Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi mărginită şi $0 < T \le \infty$. Notăm cu Q mulţimea cilindrică $\Omega \times (0,T)$ şi cu Σ suprafaţa sa laterală $\partial\Omega \times (0,T)$. Considerăm clasa de funcţii

$$C^{2,1}(Q) = \left\{ u : Q \to \mathbf{R} : \ u,\ u_t,\ u_{x_j},\ u_{x_j x_k} \in C(Q) \right\}.$$

Se caută $u \in C^{2,1}(Q) \cap C(\overline{Q})$ astfel încât

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x,t) & \text{pe } Q \\ u = 0 & \text{pe } \Sigma \\ u(x,0) = g_0(x) & \text{pe } \Omega. \end{cases} \tag{1.10}$$

unde $f \in C(Q)$, iar $g_0 \in C(\Omega)$.

Subliniem faptul că în acest caz, cele două condiţii suplimentare ataşate ecuaţiei căldurii sunt formulate relativ la o parte a frontierei lui Q, anume $\Sigma \cup (\Omega \times \{0\})$.

b) *Problema Cauchy.* Să se determine $u \in C^{2,1}(\mathbf{R}^n \times (0,\infty)) \cap C(\mathbf{R}^n \times [0,\infty))$ astfel încât

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x,t) & \text{pe } \mathbf{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g_0(x) & \text{pe } \mathbf{R}^n. \end{cases} \tag{1.11}$$

3. Probleme la limită pentru ecuaţia undelor

a) *Problema Cauchy–Dirichlet.* Să se determine $u \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$ cu $\frac{\partial u}{\partial t} \in C(\overline{Q})$, astfel încât

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x,t) & \text{pe } Q \\ u = 0 & \text{pe } \Sigma \\ u(x,0) = g_0(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g_1(x) & \text{pe } \Omega. \end{cases} \tag{1.12}$$

b) *Problema Cauchy.* Să se determine $u \in C^2(\mathbf{R}^n \times (0,\infty)) \cap C(\mathbf{R}^n \times [0,\infty))$ cu $\frac{\partial u}{\partial t} \in C(\mathbf{R}^n \times [0,\infty))$, astfel încât

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x,t) & \text{pe } \mathbf{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g_0(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g_1(x) & \text{pe } \mathbf{R}^n. \end{cases} \tag{1.13}$$

Menţionăm că în (1.10) şi (1.12) condiţia la limită Dirichlet poate fi înlocuită cu o altă condiţie pe frontieră; astfel putem vorbi, de exemplu, despre problema Cauchy–Neumann pentru ecuaţia căldurii, sau pentru ecuaţia undelor.

Din exemplele de mai sus se observă că numărul şi tipul condiţiilor la limită diferă de la o ecuaţie la alta. Pe de altă parte, cititorul îşi poate pune pe bună dreptate problema de a formula şi alte condiţii la limită decât cele menţionate. Intrebarea care se pune este cât de largă este această libertate de a alege condiţiile la limită. Legat de această întrebare este conceptul de *problemă la limită corect formulată* (în engleză *well-posed boundary-value problem*). Acest concept a fost introdus de Hadamard şi are în vedere cerinţe minimale pentru ca un model matematic să fie satisfăcător pentru procesul real analizat. Astfel, dacă numărul condiţiilor impuse este insuficient, atunci problema poate avea soluţii care nu au legătură cu procesul (fenomenul) studiat. Dacă însă condiţiile sunt excesive, atunci problema poate să nu aibă soluţie.

Rezultă că o condiţie este ca problema la limită să aibă soluţie şi ea să fie unică, atunci când datele problemei aparţin unei mulţimi precizate. Existenţa şi unicitatea soluţiei nu sunt însă totdeauna suficiente. Cum în practică datele unei probleme se determină prin măsurători, fiind deci numai aproximative, rezultă că este important pentru modelul matematic ca soluţia să fie stabilă, în sensul ca mici variaţii ale datelor să conducă la o variaţie mică a soluţiei.

Aşadar, o problemă la limită este *corect formulată* dacă există o clasă de date, fie ea **D**, astfel încât pentru orice alegere a datelor în **D**, soluţia există, este unică şi este stabilă (depinde continuu de date). In caz contrar se spune că problema este *incorect formulată* (în engleză *ill posed*).

Aşadar, **existenţa**, **unicitatea** şi **dependenţa continuă de date** a soluţiilor problemelor la limită, reprezintă trei teme fundamentale ale teoriei ecuaţiilor cu derivate parţiale.

Capitolul 2
Modelare matematică prin ecuaţii cu derivate parţiale

Ecuaţiile cu derivate parţiale reprezintă un instrument fundamental în studiul unor procese reale din fizică, chimie, biologie, economie, etc. Aceasta se explică prin faptul că ele permit exprimarea dependenţei unei mărimi de un număr mare de parametri de naturi diferite.

Modelarea matematică a unui proces real începe cu identificarea unei mărimi care îl caracterizează şi a parametrilor de care aceasta depinde. O astfel de mărime poate fi densitatea, temperatura, viteza etc. Pasul următor constă în alegerea şi formularea legilor specifice (fizice, chimice, biologice, economice, etc.) care pot fi aplicate procesului analizat. Aceste legi reprezintă, de regulă, rezultatul prelucrării şi generalizării informaţiilor obţinute prin observaţii şi experimente.

O ecuaţie cu derivate parţiale se obţine atunci când o astfel de lege poate fi exprimată sub forma unei relaţii între mărimea analizată şi derivatele ei parţiale în raport cu parametrii de care depinde. Posibilitatea unei astfel de exprimări derivă din caracterul local al interacţiunilor care au loc.

2.1 Legi de conservare. Ecuaţia de continuitate

O sursă importantă de ecuaţii cu derivate parţiale o reprezintă legile de conservare. O *lege de conservare* este expresia matematică a faptului că rata variaţiei unei cantităţi într-un domeniu dat, este egală cu rata cantităţii care pătrunde în acel domeniu prin frontieră, plus rata cu care cantitatea este produsă, sau distrusă, în acel domeniu. De exemplu, să considerăm o populaţie dintr-o anumită specie de animale într-o regiune geografică fixată. Atunci rata creşterii populaţiei de animale este egală cu rata imigrării, minus rata emigrării, plus rata naşterilor, minus rata mortalităţii. Aceasta este expresia verbală a legii conservării populaţiei. Astfel de legi pot fi formulate pentru numeroase alte cantităţi: energie, concentraţia unei anumite substanţe chimice, etc.

Să exprimăm matematic o astfel de lege. Pentru aceasta, considerăm:

– un domeniu ,,spaţial” Ω (din $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{R}^2$, sau $\mathbf{R}$) mărginit de ,,suprafaţa” $\Gamma = \partial\Omega$;

– funcţia scalară $u = u(x,t)$ a cărei valoare $u(x,t)$ reprezintă densitatea unei anumite cantităţi (masă, energie, populaţie, etc.) în punctul $x \in \Omega$ şi la momentul t, adică mărimea cantităţii pe unitatea de volum (de suprafaţă, sau de lungime);

– funcţia vectorială $\mathbf{v}(x,t)$ reprezentând viteza în punctul $x \in \Omega$ şi la momentul t;

– funcţia $f = f(x,t)$ reprezentând densitatea surselor, adică mărimea cantităţii produse (creată, sau distrusă) de către surse, pe unitatea de volum şi de timp.

Atunci

• $\int_\Omega u(x,t)\,dx$ reprezintă mărimea cantităţii totale din domeniul Ω, la momentul t;

• $-\int_\Gamma u\mathbf{v}\cdot\nu\,d\sigma$ este mărimea cantităţii pătrunse în Ω prin Γ, pe unitatea de timp (fluxul prin Γ). Notaţia ν este folosită ca peste tot pentru a desemna versorul normalei exterioare;

• $\int_\Omega f(x,t)\,dx$ este mărimea cantităţii produse de surse în Ω, pe unitatea de timp.

Legea de conservare se exprimă atunci prin

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u(x,t)\,dx = -\int_\Gamma u\mathbf{v}\cdot\nu\,d\sigma + \int_\Omega f(x,t)\,dx.$$

Această ecuaţie reprezintă expresia integrală, sau globală a legii de conservare.

Presupunând că putem deriva sub semnul integralei şi că putem aplica teorema divergenţei, deducem

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}(u\mathbf{v}) - f\right) dx = 0.$$

Este clar că o astfel de ecuaţie se poate atunci scrie pentru orice sub-domeniu V al lui Ω. Deci

$$\int_V \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\,(u\mathbf{v}) - f \right) dx = 0.$$

Dacă presupunem că funcţia de sub integrală este continuă pe Ω, atunci aplicând teorema de medie pentru integrala Riemann, simplificând cu $\mu(V)$ (măsura lui V) şi făcând ca V să se contracte la un punct $x \in \Omega$ oarecare, obţinem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div}\,(u\mathbf{v}) - f = 0. \tag{2.1}$$

Aceasta este expresia diferenţială, locală, a legii de conservare. O numim *legea fundamentală de conservare* sau *ecuaţia de continuitate*. Termenul f se numeşte *termenul sursă*, iar termenul $\Phi = u\mathbf{v}$ se numeşte *termenul flux*. Să mai observăm că $\operatorname{div}(u\mathbf{v}) = u \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla u$.

Termenii flux şi sursă sunt funcţii de x şi de t, dar dependenţa lor de x şi t poate fi realizată şi prin intermediul densităţii $u(x,t)$. In astfel de cazuri, ecuaţia (2.1) este, de cele mai multe ori, o ecuaţie neliniară în raport cu u.

In ecuaţia fundamentală de conservare, de regulă, se presupune cunoscut termenul sursă f, în timp ce fluxul $u\mathbf{v}$ este intim legat de natura procesului real (fizic, chimic, biologic, etc.). In funcţie de expresia sa se obţin din ecuaţia (2.1) diferite tipuri de ecuaţii cu derivate parţiale. Vom prezenta câteva dintre ele:

Convecţie. Dacă viteza este constantă, adică $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$, sau $\Phi = u\mathbf{v}_0$, se spune că (2.1) este ecuaţia *convecţiei.* Aşadar, *ecuaţia convecţiei* este

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla u = f.$$

2.2 Ecuaţia difuziei

Difuzie. Dacă fluxul este proporţional cu gradientul lui u, adică

$$\Phi = -a^2 \nabla u, \tag{2.2}$$

ceea ce înseamnă că mişcarea are loc urmând gradienţii densităţii, atunci ecuaţia de continuitate (2.1) devine *ecuaţia difuziei*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f. \tag{2.3}$$

In situaţii concrete, proprietatea (2.2) este garantată de legi specifice, empirice. Să ilustrăm aceasta printr-un exemplu.

Fie u temperatura unui corp material omogen ce ocupă regiunea Ω şi fie c capacitatea termică a materialului. Atunci $c\,u\,(x,t)$ este energia termică stocată în punctul x la momentul t. Conform legii lui Fourier, energia variază urmând gradienţii de temperatură, adică

$$cu\mathbf{v} = -k\nabla u,$$

unde k este conductibilitatea termică. Atunci ecuaţia (2.3) devine ecuaţia căldurii

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{k}{c}\Delta u = f.$$

O astfel de ecuaţie guvernează, de asemenea, dinamica unei populaţii în arealul Ω. Şi în acest caz, fluxul urmează gradienţii densităţii, populaţia deplasându-se dinspre regiunile dens populate spre cele cu densitate mai mică.

In *regim staţionar*, adică atunci când funcţiile f şi u nu depind de timp, ecuaţia difuziei devine ecuaţia lui Poisson, care, în absenţa surselor, se reduce la ecuaţia lui Laplace.

Menţionăm faptul că ecuaţia lui Laplace este satisfăcută de potenţialul câmpului electric staţionar, ca şi de potenţialul câmpului gravitaţional.

Convecţie-difuzie. Dacă $\Phi = u\mathbf{v}_0 - a^2\nabla u$, unde $\mathbf{v}_0$ este un vector dat, atunci ecuaţia de continuitate devine *ecuaţia de convecţie-difuzie*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla u - a^2\Delta u = f.$$

In toate cazurile de mai sus densitatea surselor a fost una oarecare, care poate depinde chiar de u. De exemplu, dacă $f = -\lambda u$ şi $\lambda > 0$, atunci sursele au ca efect diminuarea sau descompunerea. Dacă, din contră $\lambda > 0$, atunci sursele sunt pozitive, de creştere sau adăugare. Astfel de situaţii apar în dinamica populaţiilor, atunci când se acţionează prin diminuare (de exemplu, prin vânătoare), sau adăugare (de exemplu, de puieţi).

Iată un alt exemplu, în care f depinde de u, de această dată în mod neliniar. Este vorba de *ecuaţia lui Fisher*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d\,\Delta u = ru\left(1 - \frac{u}{K}\right).$$

In context ecologic, u este densitatea unei populaţii, iar termenul sursă $f = ru\,(1 - u/K)$ reprezintă procesul naşteri-decese. Atât timp cât densitatea u a populaţiei se menţine sub pragul K, f este pozitiv, adică rata naşterii este superioară ratei mortalităţii. Din contră, dacă u depăşeşte pragul K, rata naşterii devine inferioară ratei mortalităţii. Pragul K se numeşte *capacitatea mediului* şi ţine de resursele limitate pe care le oferă mediul speciei în cauză. O astfel de lege de creştere a populaţiei care ţine seamă de capacitatea mediului, se numeşte *lege logistică.*

2.3 Sisteme de ecuaţii de reacţie-difuzie

Putem generaliza cazul de difuzie discutat în secţiunea anterioară presupunând că avem, spre exemplu, mai multe substanţe (sau specii de animale) care difuzează în domeniul Ω şi care, în plus, interacţionează. Notând cu u vectorul ale cărui componente u_i, $i = 1, 2, ..., m$ reprezintă densităţile celor m substanţe considerate, suntem conduşi la ecuaţia, vectorială de această dată,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\,\Delta u = f,$$

unde D este matricea diagonală a coeficienţilor d_i de difuzie, iar $f = (f_1,\, f_2,\, ...,\, f_m)$. Faptul că substanţele interacţionează (reacţionează unele faţă de altele) se exprimă matematic prin aceea că termenul sursă f_i al fiecărei ecuaţii depinde nu numai de u_i, ci de toate densităţile $u_1, u_2, ..., u_m$. Un astfel de sistem se numeşte *sistem de reacţie-difuzie.*

Sistemele de reacţie-difuzie modelează numeroase procese din fizică, chimie şi biologie. De exemplu, în context ecologic (a se vedea Leung [25] şi Murray [32]), coexistenţa a două specii, pradă şi prădător se modelează printr-un sistem de forma

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} - d_1 \Delta u_1 = u_1\,(a + g_1\,(u_1, u_2)) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} - d_2 \Delta u_2 = u_2\,(-b + g_2\,(u_1, u_2))\,. \end{cases} \tag{2.4}$$

In cazul clasic: $d_1 = d_2 = a = b = 1$, $g_1 = -u_1 - 2u_2$, iar $g_2 = 2u_1 - u_2$.

2.4 Obţinerea ecuaţiei unidimensionale a undelor

Considerăm o coardă elastică omogenă având densitatea liniară constantă ρ, ale cărei capete sunt fixate în punctele de abscisă 0, respectiv

1. Presupunem că ea vibrează în planul (x,y), $x \in [0,1]$. Fie $u(x,t)$ coordonata y a punctului coardei de abscisă x, la momentul t ($u(x,t)$ este abaterea punctului x de la poziţia de echilibru stabil). Următoarele ipoteze sunt rezonabile din punct de vedere fizic şi simplifică considerabil expresiile matematice:

(i) Secţiunea coardei este neglijabilă în raport cu lungimea sa; astfel, la fiecare moment t, coarda poate fi privită ca o curbă reprezentând graficul funcţiei $u(.,t)$.

(ii) Fie $\mathbf{T}(x,t)$ forţa elastică de tensiune, adică suma forţelor interne per unitatea de lungime datorate deformării coardei. Se presupune că $\mathbf{T}(x,t)$ este un vector tangent la coardă în punctul $(x, u(x,t))$. De asemenea, se presupune că lungimea T a vectorului $\mathbf{T}$ depinde numai de x, nu şi de t.

(iii) Rezistenţa materialului la deformare este neglijabilă în raport cu forţa elastică de tensiune. Asupra coardei pot acţiona forţe exterioare orientate numai după direcţia axei ordonatelor.

(iv) Vibraţiile sunt mici în sensul că $|u|^{\theta}$ şi $|u_x|^{\theta}$, pentru $\theta > 1$, sunt neglijabile în raport cu $|u|$ şi $|u_x|$.

Fie $x \in (0,1)$ şi t fixaţi. Considerăm tangenta la graficul lui $u(.,t)$ în punctul de abscisă x. Aceasta formează cu axa absciselor un unghi $\alpha \in (0, \pi/2)$ dat de

$$\sin\alpha = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}.$$

Componenta verticală a vectorului $\mathbf{T}(x,t)$ este atunci

$$T\sin\alpha = T\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}.$$

Fie acum o porţiune a coardei corespunzătoare intervalului elementar $[x_1, x_2] \subset (0,1)$ care îl conţine pe x. Condiţia ca această porţiune a coardei să fie în echilibru instantaneu, este ca suma forţelor care acţionează asupra ei să fie nulă. Componentele verticale ale forţelor care acţionează sunt următoarele:

1) Diferenţa componentelor verticale ale forţelor de tensiune la extremităţi, adică

$$\begin{aligned} &\left(T\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\right)(x_1,t) - \left(T\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\right)(x_2,t) \\ = \quad & -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\right) dx. \end{aligned}$$

2) Forţa newtoniană datorată acceleraţiei $u_{tt}(x,t)$,

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,dx.$$

3) Componenta verticală (singura posibil nenulă) a forţelor exterioare de densitate $-f_0$,

$$-\int_{x_1}^{x_2} f_0(x,t)\,dx.$$

Aşadar, condiţia de echilibru instantaneu implică

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\right)(x,t) + f_0(x,t)\right] dx.$$

Dacă se împarte la $x_2 - x_1$ şi se trece la limită cu $x_2 - x_1 \to 0$, obţinem ecuaţia

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}}\right)(x,t) = f_0(x,t).$$

Faptul că şi componenta orizontală a forţei totale este nulă, revine la

$$(T\cos\alpha)(x_1,t) = (T\cos\alpha)(x_2,t),$$

adică

$$\left(\frac{T}{\sqrt{1+u_x^2}}\right)(x_1,t) = \left(\frac{T}{\sqrt{1+u_x^2}}\right)(x_2,t).$$

Rezultă că

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{T}{\sqrt{1+u_x^2}}\right) dx = 0,$$

de unde se deduce că funcţia $T/\sqrt{1+u_x^2}$ este constantă în raport cu x. Folosind ipotezele (ii) şi (iv), putem presupune că $T/\sqrt{1+u_x^2}$ este o constantă pozitivă T_0. Atunci ecuaţia devine

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f$$

unde $a^2 = T_0/\rho$ iar $f = f_0/\rho$.

Menţionăm că pentru $n = 2$, ecuaţia undelor modelează micile vibraţii ale unei membrane elastice; pentru orice t, graficul funcţiei $x \longmapsto u(x,t)$ reprezintă configuraţia membranei la momentul t. La modul general, ecuaţia undelor modelează fenomenul de propagare a undelor acustice, electromagnetice, etc. într-un mediu izotrop $\Omega \subset \mathbf{R}^n$.

2.5 Alte ecuaţii din fizica matematică

Prezentăm aici câteva din ecuaţiile cu derivate parţiale de ordinul doi care intervin frecvent în matematica aplicată.

1) *Ecuaţia lui Schrödinger*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = i\Delta u, \quad (x,t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$$

este ecuaţia fundamentală a mecanicii cuantice. Funcţia $|u(x,t)|^2$ reprezintă densitatea probabilităţii ca o particolă să se găsească la momentul t in punctul x.

Evident că soluţia se caută ca funcţie cu valori complexe. Astfel dacă $u = u_1 + iu_2$, unde u_1 şi u_2 sunt funcţii reale, atunci ecuaţia lui Schrödinger se poate scrie sub forma sistemului tare cuplat (a se compara cu (2.4))

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\Delta u_2 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = \Delta u_1. \end{cases}$$

2) *Ecuaţia lui Ginzburg–Landau*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (\lambda + i\alpha)\,\Delta u + (\kappa + i\beta)\,|u|^2\,u - \gamma u = 0, \ \ (x,t) \in \Omega \times \mathbf{R}.$$

$(\lambda, \alpha, \beta, \gamma, \kappa \in \mathbf{R})$ este o ecuaţie Schrödinger neliniară care intervine in probleme de hidrodinamică, în studiul sistemelor chimice guvernate de ecuaţii de reacţie-difuzie, etc.

3) *Ecuaţia lui Klein–Gordon*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + m^2 u = f, \ \ (x,t) \in \Omega \times \mathbf{R}_+$$

$(m \in \mathbf{R} \setminus \{0\})$ este o ecuaţie hiperbolică liniară.

4) *Ecuaţia sine-Gordon*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \beta \sin u = f, \ \ (x,t) \in \Omega \times \mathbf{R}_+$$

este un exemplu de ecuaţie neliniară de tipul ecuaţiei undelor.

5) *Sistemul Navier–Stokes*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v} - \mu\Delta\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} + \nabla p = f \\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \end{cases}$$

Sistemul intervine în studiul fluidelor vâscoase incompresibile. Necunoscutele sunt funcţiile viteză $\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ şi presiune p.

6) *Ecuaţia lui Boussinesq*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \, \Delta u^2$$

intervine în modelarea procesului de infiltrare a apei. Remarcăm neliniaritatea specifică acestei ecuaţii, în care operatorul lui Laplace se aplică pătratului funcţiei u.

Numeroase alte ecuaţii ce intervin în mecanică şi mai general în fizică pot fi găsite în monografia Temam [54].

Capitolul 3
Probleme la limită eliptice

3.1 Formulele lui Green

Teorema 3.1 (formulele lui Green) *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă, mărginită şi de clasă C^1.*

1) *Dacă $u \in C^1(\overline{\Omega})$ şi $v \in C^2(\overline{\Omega})$, atunci*

$$\text{(G1)} \qquad \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \nu}\, d\sigma = \int_{\Omega} (u\, \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v)\, dx.$$

2) *Dacă $u, v \in C^2(\overline{\Omega})$, atunci*

$$\text{(G2)} \qquad \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) d\sigma = \int_{\Omega} (u\, \Delta v - v\, \Delta u)\, dx.$$

Demonstraţie. Cum $u \in C^1(\overline{\Omega})$ şi $v \in C^2(\overline{\Omega})$, avem

$$\mathbf{v} = u \nabla v \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbf{R}^n).$$

Pe de altă parte,

$$(\mathbf{v}, \nu) = u \frac{\partial v}{\partial \nu}, \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = u\, \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v.$$

Mai departe, formula (G1) este o simplă consecinţă a teoremei divergenţei. Formula (G2) se obţine prin scăderea, membru cu membru, a relaţiilor obţinute prin aplicarea formulei (G1) cuplurilor de funcţii $[u, v]$ şi $[v, u]$.
■

Relaţiile (G1) şi (G2) se numesc *formulele lui Green* şi au un rol important în teoria clasică a problemelor la limită.

Corolarul 3.1 (Gauss) *Fie* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *o mulţime deschisă, mărginită şi de clasă* C^1. *Dacă* $u \in C^2(\overline{\Omega})$ *este o funcţie armonică pe* Ω *(adică* $\Delta u\,(x) = 0$ *pentru orice* $x \in \Omega$*), atunci*

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma = 0.$$

Demonstraţie. Se aplică formula (G1) cuplului de funcţii $[1, u]$. ■

Teorema lui Gauss exprimă o proprietate a funcţiilor armonice, anume aceea că fluxul câmpului vectorial ∇u prin suprafaţa închisă $\partial\Omega$ este nul, dacă funcţia u este armonică pe Ω.

3.2 Soluţia fundamentală a ecuaţiei lui Laplace

Definiţia 3.1 Numim *soluţie fundamentală a ecuaţiei lui Laplace*, funcţia $N : \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$,

$$\begin{array}{ll} N\,(x) = -\frac{1}{(n-2)\omega_n |x|^{n-2}} & \text{pentru } n \geq 3 \\ N\,(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x| & \text{pentru } n = 2 \end{array} \tag{3.1}$$

unde $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma\,(n/2)$ este măsura sferei unitate din $\mathbf{R}^n$ (Γ este funcţia lui Euler) şi $|x| = \left(\sum_{j=1}^n x_j^2\right)^{1/2}$ este norma euclidiană a spaţiului $\mathbf{R}^n$.

Propoziţia 3.1 *Funcţia* N *aparţine spaţiului* $C^\infty\,(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$, *este local integrabilă Lebesgue pe* $\mathbf{R}^n$ $(u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n))$ *şi este armonică pe* $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, *adică*

$$\Delta N\,(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}. \tag{3.2}$$

Demonstraţie. Un calcul simplu arată că

$$\frac{\partial N}{\partial x_j} = \frac{x_j}{\omega_n\,|x|^n}, \quad \frac{\partial^2 N}{\partial x_j^2} = \frac{1}{\omega_n}\left(\frac{1}{|x|^n} - \frac{n x_j^2}{|x|^{n+2}}\right)$$

pentru $x \neq 0$, de unde (3.2) rezultă imediat. Faptul că $N \in C^\infty\,(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ este aproape evident. Faptul că $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$ rezultă pe baza lemei care urmează. ■

Lema 3.1 *Dacă* $\lambda < n$, *atunci* $|x|^{-\lambda} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$.

Demonstraţie. Este suficient să demonstrăm că $|x|^{-\lambda} \in L^1(B_R)$, unde $B_R = B_R(0)$. Pentru aceasta se folosesc coordonatele sferice în $\mathbf{R}^n$, obţindu-se

$$\int_{B_R} |x|^{-\lambda}\, dx = \int_0^R r^{-\lambda} r^{n-1} dr \int_{\partial B_1} d\sigma = \frac{\omega_n R^{n-\lambda}}{n-\lambda} < \infty.$$

■

Observaţia 3.1 *Avem*

$$\left|\frac{\partial N}{\partial x_j}(x)\right| \le \frac{1}{\omega_n |x|^{n-1}}, \qquad x \neq 0.$$

Folosind Lema 3.1, deducem că pentru orice funcţie f măsurabilă şi mărginită într-un deschis mărginit Ω, funcţiile

$$x \longmapsto \int_\Omega N(x-y) f(y)\, dy, \qquad x \longmapsto \int_\Omega \frac{\partial N}{\partial x_j}(x-y) f(y)\, dy$$

sunt definite pentru orice $x \in \mathbf{R}^n$.

Soluţia fundamentală a ecuaţiei lui Laplace intervine în numeroase formule legate de laplacean. Un prim exemplu este următoarea formulă de reprezentare integrală a funcţiilor netede.

Teorema 3.2 (Riemann–Green) *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă, mărginită şi de clasă C^1 şi fie $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Atunci*

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \Delta u(y)\, N(x-y)\, dy \\ &+ \int_{\partial\Omega} \left(u(y) \frac{\partial N}{\partial \nu_y}(x-y) - N(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) \right) d\sigma_y \\ = &\begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega} \end{cases} \end{aligned} \tag{3.3}$$

unde s-a notat cu ν_y versorul normalei exterioare lui Ω, în punctul $y \in \partial\Omega$.

Demonstraţie. 1) Fie $x \in \mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Concluzia rezultă imediat dacă se aplică a doua formulă a lui Green cuplului de funcţii $[u(y), N(x-y)]$ şi se foloseşte (3.2).

2) Fie $x \in \Omega$. Aplicăm (G2) cuplului de funcţii $[u(y), N(x-y)]$ pe deschisul $\Omega_\delta = \Omega \setminus \overline{B}_\delta(x)$, unde $\delta > 0$ este astfel încât $\overline{B}_\delta(x) \subset \Omega$. Ţinând cont de (3.2), obţinem

$$\begin{aligned} & \int_{\partial\Omega_\delta} \left(u(y) \frac{\partial N}{\partial \nu_y}(x-y) - N(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) \right) d\sigma_y \qquad (3.4) \\ = & -\int_{\Omega_\delta} N(x-y) \Delta u(y)\, dy. \end{aligned}$$

Insă $\partial\Omega_\delta = \partial\Omega \cup \partial B_\delta(x)$, iar pentru $y \in \partial B_\delta(x)$, avem

$$\begin{aligned} N(x-y) &= -\frac{1}{(n-2)\,\omega_n \delta^{n-2}} \qquad (3.5) \\ \frac{\partial N}{\partial \nu_y}(x-y) &= -\frac{dN(x-y)}{d|x-y|} = -\frac{1}{\omega_n \delta^{n-1}}. \end{aligned}$$

Notând $B = B_\delta(x)$, din (3.4) şi (3.5) deducem

$$\begin{aligned} & -\int_{\Omega_\delta} \Delta u(y) N(x-y)\, dy \qquad (3.6) \\ = & \int_{\partial\Omega} \left(u(y) \frac{\partial N}{\partial \nu_y}(x-y) - N(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) \right) d\sigma_y \\ & -\frac{1}{\omega_n \delta^{n-1}} \int_{\partial B} u\, d\sigma + \frac{1}{(n-2)\,\omega_n \delta^{n-2}} \int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma. \end{aligned}$$

Ţinând cont de faptul că măsura lui ∂B este $\omega_n \delta^{n-1}$ şi folosind teorema de medie a integralei Riemann, găsim

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta^{n-1}} \int_{\partial B} u d\sigma &= \omega_n u(\xi_\delta) \to \omega_n u(x) \\ \frac{1}{\delta^{n-2}} \int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma &= \omega_n \delta \frac{\partial u}{\partial \nu}(\zeta_\delta) \to 0 \end{aligned}$$

pentru $\delta \to 0$, unde ξ_δ, $\zeta_\delta \in \partial B$ sunt punctele care intervin în teorema de medie. Pe de altă parte, pe baza Lemei 3.1, funcţia $y \longmapsto \Delta u(y) N(x-y)$ este integrabilă Lebesgue pe Ω. Deci,

$$\int_{\Omega_\delta} \Delta u(y) N(x-y)\, dy \to \int_\Omega \Delta u(y) N(x-y)\, dy$$

pentru $\delta \to 0$. Trecând la limită în (3.6), obţinem concluzia dorită. ■

Următorul rezultat este o consecinţă imediată a Teoremei 3.2.

Corolarul 3.2 *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă, mărginită şi de clasă C^1. Dacă $u \in C^2(\overline{\Omega})$ este o funcţie armonică pe Ω, atunci*

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left(u(y) \frac{\partial N}{\partial \nu_y}(x-y) - N(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) \right) d\sigma_y, \quad x \in \Omega. \tag{3.7}$$

Relaţia (3.7) reprezintă o formulă de reprezentare integrală a funcţiilor armonice. Ea exprimă faptul că o funcţie armonică pe Ω este complet determinată de valorile sale şi ale derivatei sale normale pe punctele lui $\partial\Omega$.

O consecinţa imediată a formulei (3.7) este proprietatea de infinit diferenţiabilitate a funcţiilor armonice.

Corolarul 3.3 *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă. Dacă $u \in C^2(\Omega)$ este o funcţie armonică pe Ω, atunci $u \in C^\infty(\Omega)$ şi pentru orice $\alpha \in \mathbf{N}^n$, funcţia $D^\alpha u$ este armonică pe Ω.*

Demonstraţie. Fie $x_0 \in \Omega$ un punct oarecare. Există atunci $\delta > 0$ astfel încât $\overline{B}_\delta(x_0) \subset \Omega$. Concluzia rezultă dacă se aplică formula (3.7) lui $B_\delta(x_0)$ în locul lui Ω şi se foloseşte faptul că $N(x-y)$ şi $\frac{\partial N}{\partial \nu_y}(x-y)$ sunt infinit diferenţiabile în raport cu x, $x \in B_\delta(x_0)$. Aşadar, u este infinit diferenţiabilă într-o vecinătate a lui x_0. In final se arată că $D_x^\alpha N(x-y)$ şi $D_x^\alpha \frac{\partial N}{\partial \nu_y}(x-y)$ sunt armonice pe $B_\delta(x_0)$. ■

Se poate arăta mai mult, anume că orice funcţie armonică pe Ω este analitică pe Ω; a se vedea secţiunea de Probleme.

3.3 Teorema de medie a funcţiilor armonice

Dacă u este o funcţie liniară (deci armonică) pe un interval al axei reale, atunci valoarea sa pe orice punct este media aritmetică a valorilor pe extremităţile oricărui subinterval centrat în acel punct. Această proprietate trivială admite o generalizare interesantă pentru funcţii armonice de mai multe variabile.

Teorema 3.3 (teorema de medie a funcţiilor armonice) *Fie u o funcţie armonică pe o mulţime deschisă $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Atunci, oricare ar fi bila închisă $\overline{B}_r(x) \subset \Omega$, $u(x)$ este media valorilor funcţiei u pe punctele sferei $\partial B_r(x)$, adică*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y)\, d\sigma. \tag{3.8}$$

Demonstraţie. Aplicăm formula (3.7) pentru $B_r(x)$ pe poziţia lui Ω. Relaţia (3.8) rezultă atunci, dacă se ţine cont de faptul că pentru $y \in \partial B_r(x)$, avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial \nu_y}(x-y) &= \frac{\partial N(x-y)}{\partial |x-y|} = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} = \text{constant} \\ N(x-y) &= \text{constant} \end{aligned}$$

şi se foloseşte Corolarul 3.1. ■

O aplicaţie interesantă a Teoremei 3.3 este următoarea teoremă a lui Newton: C*âmpul gravitaţional al unui corp sferic omogen este, în exteriorul acestuia, identic cu câmpul unui corp punctiform de masă egală, plasat în centrul sferei.* Acest principiu fundamental permite ca în studiul interacţiunii corpurilor sferice, de exemplu planete, acestea să fie înlocuite cu puncte materiale. Intr-adevăr, mărimea câmpului gravitaţio-nal al unei sfere de rază R şi de centru x_0, într-un punct exterior x, este egală cu

$$\gamma(x) = \int_{\partial B_R(x_0)} \frac{c}{|x-y|} \, d\sigma_y$$

unde c este produsul densitătii de masă cu constanta gravitaţiei. Funcţia $u(y) = c\,|x-y|^{-1}$ este armonică pe $\mathbf{R}^3 \setminus \{x\}$ şi deci, conform cu (3.8), $\gamma(x) / \left(4\pi R^2\right) = u(x_0)$. Aşadar

$$\gamma(x) = 4\pi R^2 \frac{c}{|x-x_0|}$$

ceea ce trebuia demonstrat.

3.4 Principiul de maxim

Dacă $u \in C^2(a,b)$, $u''(x) \geq 0$ pentru orice $x \in (a,b)$ (u este convexă pe intervalul (a,b)) şi dacă există $x_0 \in (a,b)$ astfel încât $u(x_0) = \sup_{x \in (a,b)} u(x)$, atunci este clar că funcţia u este constantă pe (a,b). Această proprietate admite o generalizare pentru funcţii de mai multe variabile având laplaceanul nenegativ pe un *domeniu*, adică pe o mulţime deschisă şi conexă.

Teorema 3.4 (principiul tare de maxim) *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un domeniu şi fie $u \in C^2(\Omega)$ o funcţie satisfăcând $\Delta u(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \Omega$.*

Dacă există $x_0 \in \Omega$ *astfel încât* $u(x_0) = \sup\limits_{\Omega} u$, *atunci funcţia* u *este constantă pe* Ω.

Demonstraţie. Notăm $m = \sup\limits_{\Omega} u$ şi considerăm mulţimea

$$\mathcal{M} = \{x \in \Omega : \; u(x) = m\}.$$

Este clar că $\mathcal{M} \subset \Omega$ este nevidă ($x_0 \in \mathcal{M}$). De asemenea, u fiind continuă, $\mathcal{M}$ este închisă în Ω. Să arătăm că $\mathcal{M}$ este totodată deschisă. Intr-adevăr, fie $x^* \in \mathcal{M}$ un punct oarecare. Există $R > 0$ astfel încât $\overline{B}_R(x^*) \subset \Omega$. Aplicând teorema lui Riemann-Green bilei $B = B_r(x^*)$, unde $0 < r < R$, obţinem

$$\begin{aligned} u(x^*) &= \int_B \Delta u(y)\, N(x^* - y)\, dy \\ &\quad + \int_{\partial B} \left(u(y) \frac{\partial N}{\partial \nu_y}(x^* - y) - N(x^* - y) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) \right) d\sigma_y. \end{aligned}$$

Cum pentru $y \in \partial B$, avem

$$\begin{aligned} N(x^* - y) &= -\frac{1}{(n-2)\,\omega_n r^{n-2}} \\ \frac{\partial N}{\partial \nu_y}(x^* - y) &= \frac{dN(x^* - y)}{d\,|x^* - y|} = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \end{aligned}$$

iar pe baza formulei (G1) a lui Green,

$$\int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma = \int_B \Delta u\, dy$$

obţinem

$$\begin{aligned} u(x^*) &= \int_B \Delta u(y) \frac{1}{(n-2)\,\omega_n} \left[\frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{|x^* - y|^{n-2}} \right] dy \\ &\quad + \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B} u(y)\, d\sigma. \end{aligned}$$

Funcţia de sub prima integrală fiind nepozitivă, avem mai departe

$$u(x^*) \le \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B} u(y)\, d\sigma$$

de unde rezultă $u(y) = m$ pentru orice $y \in \partial B$. In final, dată fiind alegerea arbitrară a lui r, $r < R$, se constată că $u(y) = m$ pentru orice $y \in B_R(x^*)$. Aceasta arată că x^* este interior lui $\mathcal{M}$. Aşadar, $\mathcal{M}$ este o submulţime nevidă, în acelaşi timp deschisă şi închisă în Ω. Dat fiind faptul că Ω este conex, rezultă $\mathcal{M} = \Omega$, adică u este constantă pe Ω. ■

Corolarul 3.4 (principiul tare de minim) *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un domeniu şi fie $u \in C^2(\Omega)$ o funcţie satisfăcând $\Delta u \leq 0$ pe Ω. Dacă există $x_0 \in \Omega$ astfel încât $u(x_0) = \inf_{\Omega} u$, atunci funcţia u este constantă pe Ω.*

Demonstraţie. Se aplică Teorema 3.4 funcţiei $-u$. ■

In cazul în care, în plus domeniul Ω este mărginit şi funcţia u este continuă pe $\overline{\Omega}$, au loc următoarele rezultate.

Corolarul 3.5 *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un domeniu mărginit şi fie $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ o funcţie neconstantă pe Ω. Atunci*

1) $\Delta u \geq 0$ *pe* $\Omega \Longrightarrow u(x) < \max_{\partial\Omega} u$ *pentru orice* $x \in \Omega$;

2) $\Delta u \leq 0$ *pe* $\Omega \Longrightarrow u(x) > \min_{\partial\Omega} u$ *pentru orice* $x \in \Omega$;

3) $\Delta u = 0$ *pe* $\Omega \Longrightarrow |u(x)| < \max_{\partial\Omega} |u|$ *pentru orice* $x \in \Omega$.

Are loc şi următoarea formă slabă a implicaţiilor 1)-2) din Corolarul 3.5.

Corolarul 3.6 *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi mărginită şi fie $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Atunci*

1) $\Delta u \geq 0$ *pe* Ω, $u \leq 0$ *pe* $\partial\Omega \Longrightarrow u \leq 0$ *pe* $\overline{\Omega}$ (*principiul slab de maxim);*

2) $\Delta u \leq 0$ *pe* Ω, $u \geq 0$ *pe* $\partial\Omega \Longrightarrow u \geq 0$ *pe* $\overline{\Omega}$ (*principiul slab de minim*).

Este clar că principiile de maxim stabilite în acest paragraf pot fi extinse la cazul operatorilor eliptici generali (a se vedea secţiunea de Complemente). Pentru alte generalizări recomandăm Proter–Weinberger [41] şi Rus [45].

3.5 Unicitatea şi dependenţa continuă de date a soluţiei problemei Dirichlet

Teorema 3.5 (de unicitate) *Dacă $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ este o mulţime deschisă şi mărginită, $f \in C(\Omega)$ şi $g \in C(\partial\Omega)$, atunci problema* (1.7) *are cel mult o soluţie în $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.*

Demonstraţie. Fie u_1 şi u_2 două soluţii oarecare pentru (1.7). Atunci funcţia $u = u_1 - u_2$ satisface $\Delta u = 0$ pe Ω şi $u = 0$ pe $\partial\Omega$. Folosind Corolarul 3.6, deducem că $u = 0$ pe $\overline{\Omega}$, de unde $u_1 = u_2$. ■

Teorema 3.6 (de estimare a priori) *Fie* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *o mulţime deschisă şi mărginită. Dacă* $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega)$ *şi* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *este soluţia problemei* (1.7), *atunci*

$$|u|_{C(\overline{\Omega})} \leq |g|_{C(\partial\Omega)} + c\,|f|_{C(\overline{\Omega})} \tag{3.9}$$

unde c *este o constantă pozitivă depinzând numai de* Ω.

Demonstraţie. Mulţimea Ω fiind mărginită, există $\delta > 0$ astfel încât $|x_1| \leq \delta$ oricare ar fi $x \in \overline{\Omega}$, unde x_1 este prima componentă a lui x. Considerăm funcţia

$$v(x) = |g|_{C(\partial\Omega)} + \left(e^{2\delta} - e^{x_1+\delta}\right)|f|_{C(\overline{\Omega})}, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Este clar că $v \geq 0$ pe $\overline{\Omega}$. Avem

$$\begin{array}{ll} \Delta(u-v)(x) = f(x) + e^{x_1+\delta}\,|f|_{C(\overline{\Omega})} \geq 0 & \text{pe } \Omega \\ (u-v)(x) = g(x) - |g|_{C(\partial\Omega)} - \left(e^{2\delta} - e^{x_1+\delta}\right)|f|_{C(\overline{\Omega})} \leq 0 & \text{pe } \partial\Omega. \end{array}$$

Aplicând Corolarul 3.6 1), obţinem $u - v \leq 0$ pe $\overline{\Omega}$. In mod analog, se deduce $-u - v \leq 0$ pe $\overline{\Omega}$. Aşadar, $|u| \leq v$ pe $\overline{\Omega}$, de unde se găseşte (3.9) cu $c = \max\limits_{x \in \overline{\Omega}} \left(e^{2\delta} - e^{x_1+\delta}\right)$. ■

Teorema 3.7 (de dependenţă continuă de date) *Fie* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *o mulţime deschisă şi mărginită. Dacă* $f,\ \widehat{f} \in C(\overline{\Omega})$; $g,\ \widehat{g} \in C(\partial\Omega)$, *iar* $u,\ \widehat{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *sunt soluţiile problemei* (1.7) *corespunzătoare datelor* f *şi* g, *respectiv* $\widehat{f}$ *şi* $\widehat{g}$, *atunci*

$$|u - \widehat{u}|_{C(\overline{\Omega})} \leq |g - \widehat{g}|_{C(\partial\Omega)} + c\left|f - \hat{f}\right|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Demonstraţie. Se observă că $u - \widehat{u}$ este soluţia problemei (1.7) corespunzătoare datelor $f - \widehat{f}$ şi $g - \widehat{g}$ şi se aplică (3.9). ■

Teorema 3.7 arată că la mici variaţii ale datelor corespund variaţii mici ale soluţiilor.

3.6 Funcţia lui Green a problemei Dirichlet

In condiţiile Teoremei 3.2, dacă $u \in C^2(\overline{\Omega})$ este soluţia problemei Dirichlet (1.7) corespunzătoare datelor $f \in C(\overline{\Omega})$ şi $g \in C(\partial\Omega)$, avem

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_\Omega f(y)\, N(x-y)\, dy \qquad (3.10) \\ &+ \int_{\partial\Omega} \left(g(y) \frac{\partial N}{\partial \nu_y}(x-y) - N(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) \right) d\sigma_y \end{aligned}$$

pentru orice $x \in \Omega$. Această formulă de ,,aproape reprezentare" a soluţiei conţine un termen neprecizat, anume acela în care intervine $\partial u / \partial \nu$. Introducerea funcţiei lui Green are ca scop eliminarea acestui termen.

Definiţia 3.2 Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă, mărginită şi de clasă C^1. Notăm cu Λ diagonala lui Ω, adică mulţimea $\{(x,x) : x \in \Omega\}$. *Funcţia lui Green* a problemei Dirichlet (pentru operatorul lui Laplace şi pentru Ω) este funcţia

$$G : \Omega \times \overline{\Omega} \setminus \Lambda \to \mathbf{R}, \quad G(x,y) = \Phi(x,y) - N(x-y),$$

unde $\Phi : \Omega \times \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$ satisface următoarele condiţii:

$$\begin{array}{ll} \Phi(x,.) \in C^2(\overline{\Omega}); & \\ \Delta_y \Phi(x,y) = 0 & \text{pentru orice } y \in \Omega; \\ \Phi(x,y) = N(x-y) & \text{pentru orice } y \in \partial\Omega, \end{array}$$

oricare ar fi $x \in \Omega$.

Aşadar, pentru orice $x \in \Omega$ fixat, funcţia $\Phi(x,.)$ este soluţia problemei Dirichlet speciale, corespunzătoare datelor 0 şi $N(x-.)$. In consecinţă, dacă funcţia lui Green există, ea este unică. Existenţa funcţiei lui Green va fi demonstrată ulterior.

Teorema 3.8 (de reprezentare) *Fie $u \in C^2(\overline{\Omega})$ soluţia problemei* (1.7) *corespunzătoare datelor $f \in C(\overline{\Omega})$ şi $g \in C(\partial\Omega)$. Dacă funcţia lui Green există, atunci*

$$u(x) = -\int_\Omega f(y)\, G(x,y)\, dy - \int_{\partial\Omega} g(y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y)\, d\sigma_y, \quad x \in \Omega. \qquad (3.11)$$

Demonstraţie. Aplicăm a doua formulă a lui Green funcţiilor $u(y)$ şi $\Phi(x,y)$. Ţinând cont de faptul că $\Delta_y \Phi(x,y) = 0$ pentru orice $y \in \Omega$, obţinem

$$\int_{\partial\Omega} \left(u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(x,y) - \Phi(x,y) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) \right) d\sigma_y = -\int_{\Omega} \Phi(x,y) \Delta u(y)\, dy$$

adică

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_{\Omega} f(y) \Phi(x,y)\, dy \\ &\quad - \int_{\partial\Omega} \left(g(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(x,y) - N(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu_y}(y) \right) d\sigma_y. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Concluzia rezultă acum din (3.10) şi (3.12), prin adunare membru cu membru. ∎

3.7 Formula lui Poisson

Determinarea efectivă a funcţiei lui Green nu poate fi făcută decât pentru domenii Ω având o geometrie simplă. Să construim, spre exemplu, funcţia lui Green în cazul în care $\Omega = B$, unde B este bila deschisă de rază R, centrată în origine, a spaţiului $\mathbf{R}^n$.

Aplicaţia numită *inversiune* în raport cu sfera,

$$\overline{x} = \frac{R^2}{|x|^2} x, \quad x \neq 0 \tag{3.13}$$

transformă $B \setminus \{0\}$ în $\mathbf{R}^n \setminus B$ şi invariază punctele sferei ∂B. Dacă $x \in B \setminus \{0\}$ şi $y \in \partial B$, atunci (3.13) arată că triunghiurile determinate de punctele $y,\ 0,\ \overline{x}$ şi respectiv $x,\ 0,\ y$, sunt asemenea. In consecinţă,

$$|x-y| = |\overline{x}-y| \frac{|x|}{R} = |\overline{x}-y| \frac{R}{|\overline{x}|}, \quad x \in B \setminus \{0\},\ y \in \partial B.$$

Atunci, pentru orice $x \in B \setminus \{0\}$ fixat, soluţia problemei

$$\begin{cases} \Delta_y \Phi(x,y) = 0, & y \in B \\ \Phi(x,y) = N(x-y), & y \in \partial B \end{cases}$$

este dată de

$$\Phi(x,y)=\begin{cases}\left(\frac{R}{|x|}\right)^{n-2}N(\overline{x}-y) & \text{pentru } n\geq 3\\[2ex] \frac{1}{2\pi}\ln\left(|\overline{x}-y|\frac{|x|}{R}\right) & \text{pentru } n=2\end{cases}$$

iar pentru $x=0$, ea este constanta

$$\Phi(0,y)=\begin{cases}-\frac{1}{(n-2)\omega_n R^{n-2}} & \text{pentru } n\geq 3\\[2ex] \frac{1}{2\pi}\ln R & \text{pentru } n=2\end{cases}$$

Aşadar, pentru $n\geq 3$, funcţia lui Green este

$$G(x,y)=\begin{cases}-N(x-y)+R^{n-2}|x|^{2-n}N(\overline{x}-y), & 0<|x|<R\\[2ex] -N(y)-\frac{1}{(n-2)\omega_n R^{n-2}}, & x=0\end{cases}\tag{3.14}$$

iar pentru $n=2$, ea este

$$G(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\left(-\ln|x-y|+\ln\left(|\overline{x}-y|\frac{|x|}{R}\right)\right), & 0<|x|<R\\[2ex] \frac{1}{2\pi}(-\ln|y|+\ln R), & x=0.\end{cases}$$

In continuare vom determina derivata normală exterioară la sferă a funcţiei lui Green. Să presupunem $n\geq 3$. Avem

$$\frac{\partial N}{\partial x_j}(x-y)=\frac{x_j-y_j}{\omega_n|x-y|^n}=-\frac{\partial N}{\partial y_j}(x-y)$$

de unde

$$\nabla_x N(x-y)=\frac{1}{\omega_n|x-y|^n}(x-y)=-\nabla_y N(x-y).\tag{3.15}$$

Pe punctele y ale sferei, se are

$$\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y)=\left(\nabla_y G(x,y),\frac{1}{R}y\right).$$

Folosind (3.15) obţinem

$$\left(-\nabla_y N\left(x-y\right), \frac{1}{R}y\right) = \frac{\left(x-y,\, y\right)}{\omega_n R\left|x-y\right|^n}$$

$$\begin{aligned}\left(\nabla_y\left(R^{n-2}\left|x\right|^{2-n} N\left(\overline{x}-y\right)\right), \frac{1}{R}y\right) &= -R^{n-2}\left|x\right|^{2-n}\frac{\left(\overline{x}-y,\, y\right)}{\omega_n R\left|\overline{x}-y\right|^n} \\ &= -\frac{\left|x\right|^2\left(\overline{x}-y,\, y\right)}{R^3\omega_n\left|x-y\right|^n}.\end{aligned}$$

Rezultă

$$\frac{\partial G}{\partial \nu_y}\left(x,y\right) = -\frac{R^2-\left|x\right|^2}{\omega_n R\left|x-y\right|^n}. \tag{3.16}$$

Această formulă este valabilă şi pentru $n=2$, unde $\omega_2 = 2\pi$. Menţionăm că expresia (3.16) poartă numele de *nucleul lui Poisson.*

Să considerăm acum problema Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace pe bila $B = B_R\left(0\right)$:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \left|x\right| < R \\ u = g, & \left|x\right| = R \end{cases} \tag{3.17}$$

unde $g \in C(\partial B)$. Dacă în (3.11) folosim (3.16), obţinem următoarea formulă de reprezentare, datorată lui Poisson.

Teorema 3.9 (formula lui Poisson) *Dacă* $u \in C^2(\overline{B})$ *este soluţia problemei* (3.17), *atunci*

$$u\left(x\right) = \frac{R^2-\left|x\right|^2}{\omega_n R}\int_{\partial B}\frac{g\left(y\right)}{\left|x-y\right|^n}\,d\sigma_y\,, \quad \left|x\right| < R. \tag{3.18}$$

Corolarul 3.7 *Pentru orice* $x \in B$, *avem*

$$\frac{R^2-\left|x\right|^2}{\omega_n R}\int_{\partial B}\frac{1}{\left|x-y\right|^n}\,d\sigma_y = 1. \tag{3.19}$$

Demonstraţie. Pentru $g \equiv 1$, soluţia problemei (3.17) este $u \equiv 1$. Concluzia este acum evidentă pe baza formulei (3.18). ■

Este adevărată şi reciproca Teoremei 3.9. Mai precis avem următorul rezultat.

Teorema 3.10 *Pentru orice $g \in C(\partial B)$, problema Dirichlet* (3.17) *are o soluţie unică $u \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$, dată de formula* (3.18).

Demonstraţie. Un calcul elementar arată că funcţia (3.16) este armonică pe B în raport cu x. Rezultă că funcţia u dată de (3.18) este în $C^2(B)$ şi satisface ecuaţia lui Laplace pe B. Rămâne să arătăm că

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = g(x_0) \quad \text{pentru orice } x_0 \in \partial B.$$

Fie ε un număr pozitiv arbitrar fixat şi $\delta > 0$ astfel încât $|g(y) - g(x_0)| \leq \varepsilon$ oricare ar fi $y \in \Sigma_\delta = \{y \in \partial B : |y - x_0| \leq \delta\}$. Atunci, pentru $|x - x_0| \leq \delta/2$ şi $y \in \partial B \setminus \Sigma_\delta$ avem $|x - y| \geq |x_0 - y| - |x - x_0| \geq \delta - \delta/2 = \delta/2$ şi folosind de asemenea (3.19), obţinem

$$\begin{aligned}
|u(x) - g(x_0)| &\leq \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B} |g(y) - g(x_0)| \, |x - y|^{-n} \, d\sigma_y \\
&= \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \Big(\int_{\Sigma_\delta} |g(y) - g(x_0)| \, |x - y|^{-n} \, d\sigma_y \\
&\quad + \int_{\partial B \setminus \Sigma_\delta} |g(y) - g(x_0)| \, |x - y|^{-n} \, d\sigma_y \Big) \\
&\leq \varepsilon + 2M \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n} \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \, \omega_n R^{n-1},
\end{aligned}$$

unde $M = |g|_{C(\partial B)}$. De aici deducem că dacă $|x - x_0|$ este suficient de mic, atunci $|x|$ este foarte aproape de R şi în consecinţă $|u(x) - u(x_0)| \leq 2\varepsilon$, ceea ce trebuia demonstrat. ∎

Aşadar, problema Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace pe o bilă este corect formulată, adică soluţia ei există, este unică şi depinde continuu de date.

Formula lui Poisson stă la baza metodei lui Perron pentru demonstrarea existenţei soluţiei problemei Dirichlet pentru ecuaţia lui Laplace pe un domeniu oarecare (a se vedea secţiunea de Complemente).

3.8 Principiul lui Dirichlet

Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi mărginită şi fie $f \in C(\overline{\Omega})$. Considerăm problema Dirichlet omogenă pentru ecuaţia lui Poisson

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{pe } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.20}$$

Numim *soluţie clasică* a problemei (3.20), orice funcţie $u \in C^2(\overline{\Omega})$ care satisface punctual egalităţile (3.20). Din cele de mai sus rezultă că problema (3.20) are cel mult o soluţie clasică.

Introducem acum următorul spaţiu de funcţii:

$$C_0^1\left(\overline{\Omega}\right) = \left\{u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right) : u\left(x\right) = 0 \text{ pentru orice } x \in \partial\Omega\right\}$$

şi definim *funcţionala energie* asociată problemei Dirichlet, $E : C_0^1\left(\overline{\Omega}\right) \to \mathbf{R}$, prin

$$E\left(u\right) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\left|\nabla u\right|^2 - f\,u\right) dx.$$

Are loc următoarea teoremă de caracterizare variaţională a soluţiei clasice a problemei Dirichlet.

Teorema 3.11 (principiul lui Dirichlet) *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ deschis, mărginit şi de clasă C^1 şi fie $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right) \cap C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Următoarele propoziţii sunt echivalente:*

(i) *u este soluţia clasică a problemei* (3.20).

(ii) *u satisface identitatea variaţională*

$$\int_\Omega \left(\nabla u \cdot \nabla v - f\,v\right) dx = 0 \quad \textit{pentru orice } v \in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right). \tag{3.21}$$

(iii) *u este punctul de minim absolut şi strict al funcţionalei energie, adică*

$$E\left(u\right) < E\left(w\right) \;\; \textit{pentru orice } w \in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right),\; w \neq u.$$

Demonstraţie. (i) $\Rightarrow$ (ii): Presupunem că u este soluţia problemei (3.20). Inmulţind ecuaţia cu o funcţie oarecare $v \in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$, integrând pe Ω şi aplicând prima formulă Green, obţinem

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx = \int_\Omega f\,v\,dx$$

adică (3.21).

(ii) $\Rightarrow$ (i): Din (3.21), din nou folosind prima formulă Green, se obţine egalitatea

$$\int_\Omega \left(\Delta u - f\right) v\,dx = 0$$

valabilă pentru orice $v \in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Cum $\Delta u - f$ este o funcţie continuă pe $\overline{\Omega}$, se deduce că $\Delta u - f = 0$ pe Ω. Aşadar u este soluţia problemei (3.20).

Inainte de a demonstra echivalenţa propoziţiilor (ii) şi (iii) vom determina expresia energiei $E(u+v)$ pentru suma a două funcţii oarecare $u, v \in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$:

$$\begin{aligned} E(u+v) &= \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla(u+v)|^2 - f\,(u+v)\right)dx \qquad (3.22) \\ &= \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}|\nabla v|^2 + \nabla u \cdot \nabla v - f\,u - f\,v\right)dx \\ &= E(u) + \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - f\,v)\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx. \end{aligned}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Presupunem că u satisface identitatea (3.21). Fie $w \in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Folosind (3.22) deducem

$$\begin{aligned} E(w) &= E(u + (w-u)) = E(u) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(w-u)|^2\,dx \\ &\geq E(u). \end{aligned}$$

Deci u minimizează pe E. Inegalitatea anterioară este strictă în caz că $w \neq u$. Intr-adevăr, valoarea integralei $\int_\Omega |\nabla(w-u)|^2\,dx$ este zero numai dacă funcţia $\nabla(w-u)$ este identic nulă pe Ω, deci dacă $w-u$ este constantă. Cum însă ambele funcţii u şi w sunt nule pe $\partial\Omega$, această constantă nu poate fi decât zero. Dar atunci $w = u$, ceea ce a fost exclus.

(iii) $\Rightarrow$ (ii): Presupunem că u minimizează pe E. Fie $v \in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$ o funcţie oarecare. Atunci

$$E(u) \leq E(u+tv)$$

pentru orice $t \in \mathbf{R}$. Aşadar, $t = 0$ este punct de minim al funcţiei $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definită prin

$$g(t) = E(u+tv).$$

Să constatăm că g este derivabilă în punctul $t = 0$. Intr-adevăr, folosind (3.22) găsim că

$$\begin{aligned} \frac{g(t) - g(0)}{t} &= \frac{E(u+tv) - E(u)}{t} \\ &= \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - f\,v)\,dx + \frac{t}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx. \end{aligned}$$

Făcând $t \to 0$ obţinem

$$g'(0) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - f\, v)\, dx.$$

Aşadar teorema lui Fermat este aplicabilă. In consecinţă, $g'(0) = 0$, adică (3.21) are loc. ■

Observaţia 3.2 Dacă definim *derivata după direcţia* v a funcţionalei E în punctul u, prin

$$E'(u;v) := \lim_{t\to 0+} \frac{E(u+tv) - E(u)}{t},$$

atunci

$$E'(u;v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - f\, v)\, dx,$$

iar proprietatea (ii) din Teorema 3.11 revine la faptul că u este *punct critic* al lui E, în sensul că

$$E'(u;v) = 0 \quad \text{pentru orice } v \in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right).$$

Conform Teoremei 3.11 pentru a demonstra existenţa unei soluţii a problemei Dirichlet avem două posibilităţi:

1) de a demonstra existenţa unei funcţii u care satisface identitatea variaţională (3.21), sau

2) de a demonstra existenţa unei funcţii u care minimizează funcţionala energie.

Din păcate, acest lucru nu este în general posibil. Motivul constă în faptul că spaţiul $C^2\left(\overline{\Omega}\right) \cap C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$ este prea sărac pentru aceasta. In secţiunea următoare se arată în ce fel acest spaţiu poate fi îmbogăţit (completat) pentru ca problema existenţei soluţiilor să-şi găsească rezolvarea.

3.9 Soluţia generalizată a problemei Dirichlet

In acord cu formula (3.21), vom înzestra spaţiul liniar $C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$ (unde $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ este deschis şi mărginit) cu produsul scalar $(.,.)_{0,1}$ definit în felul următor

$$(u,v)_{0,1} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx \quad \left(u, v \in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)\right) \tag{3.23}$$

şi cu norma corespunzătoare $|.|_{0,1}$

$$|u|_{0,1} = (u,u)_{0,1}^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \left(u \in C_0^1 \left(\overline{\Omega} \right) \right). \tag{3.24}$$

Cu aceste notaţii, identitatea variaţională (3.21) se scrie ca

$$(u,v)_{0,1} - (f,v)_{L^2} = 0, \quad v \in C_0^1 \left(\overline{\Omega} \right)$$

iar funcţionala energie este

$$E(u) = \frac{1}{2} |u|_{0,1}^2 - (f,u)_{L^2}, \quad u \in C_0^1 \left(\overline{\Omega} \right).$$

In ambele formule putem considera mai general că $f \in L^2(\Omega)$. Prezenţa termenului $|u|_{0,1}^2 /2$ în expresia funcţionalei energie conferă normei $|.|_{0,1}$ denumirea de *normă energetică*.

Folosind aceleaşi argumente ca în demonstraţia echivalenţei propoziţiilor (ii) şi (iii) din Teorema 3.11, obţinem următorul rezultat.

Propoziţia 3.2 *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ deschis şi mărginit, $f \in L^2(\Omega)$ şi $u \in C_0^1 \left(\overline{\Omega} \right)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(a) *u satisface identitatea variaţională*

$$(u,v)_{0,1} - (f,v)_{L^2} = 0 \quad \textit{pentru orice } v \in C_0^1 \left(\overline{\Omega} \right). \tag{3.25}$$

(b) *u este punctul de minim absolut şi strict al funcţionalei energie, adică*

$$E(u) < E(w) \quad \textit{pentru orice } w \in C_0^1 \left(\overline{\Omega} \right), \ w \neq u.$$

Acest rezultat sugerează ca o funcţie $u \in C_0^1 \left(\overline{\Omega} \right)$ care satisface identitatea variaţională (3.25), sau, în mod echivalent, minimizează funcţionala energie, să fie considerată soluţie generalizată a problemei Dirichlet (3.20). Chiar şi în spaţiul mai bogat $C_0^1 \left(\overline{\Omega} \right)$ problema existenţei unui element u cu proprietatea (3.25) nu poate fi tranşată. Motivul este că spaţiul prehilbertian $\left(C_0^1 \left(\overline{\Omega} \right), (.,.)_{0,1} \right)$ nu este complet.

Notăm cu $\left(H_0^1(\Omega), (.,.)_{0,1} \right)$ completatul spaţiului $\left(C_0^1 \left(\overline{\Omega} \right), (.,.)_{0,1} \right)$.

Amintim că orice spaţiu metric (X,d) admite un completat; prin completatul spaţiului metric X se înţelege ,,cel mai mic" spaţiu metric complet care îl include pe X. Termenul ,,cel mai mic" este înţeles în sensul că spaţiul completat este inclus în orice alt spaţiu metric complet care include pe X. Cheia completării o reprezintă noţiunea de *şiruri fundamentale echivalente*. Se spune că două şiruri fundamentale (x_k) şi (y_k) de elemente ale lui X sunt echivalente dacă $d(x_k, y_k) \to 0$ pentru $k \to \infty$. Dacă (x_k) este un şir fundamental oarecare, atunci prin $\widehat{(x_k)}$ notăm clasa tuturor şirurilor fundamentale ce sunt echivalente cu (x_k). Fie $\widetilde{X}$ mulţimea claselor de şiruri fundamentale echivalente. Putem afirma că $X \subset \widetilde{X}$ dacă identificăm orice element $x \in X$ cu clasa şirurilor fundamentale ce sunt echivalente cu şirul constant x, adică $x \equiv \widehat{(x)}$. Mai departe, metrica d se extinde la $\widetilde{X} \times \widetilde{X}$ după cum urmează:

$$d\left(\widehat{(x_k)}, \widehat{(y_k)}\right) := \lim_{k\to\infty} d(x_k, y_k).$$

Cititorul poate verifica faptul că această definiţie nu depinde de alegerea reprezentanţilor celor două clase, că d astfel definită este o metrică pe $\widetilde{X}$ şi că $\left(\widetilde{X}, d\right)$ este un spaţiu complet, cel mai mic spaţiu complet ce include pe X. Pentru detalii, trimitem la Kantorovich–Akilov [24, p. 33].

Următorul rezultat este esenţial pentru a putea identifica elementele spaţiului $H_0^1(\Omega)$ cu anumite funcţii din $L^2(\Omega)$.

Teorema 3.12 (inegalitatea lui Poincaré) *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ deschis şi mărginit. Există o constantă pozitivă C depinzând numai de Ω astfel încât*

$$\int_\Omega u^2\,dx \le C^2 \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx$$

oricare ar fi $u \in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$.

Demonstraţie. Fie $C > 0$ astfel încât

$$\Omega \subset \left\{x \in \mathbf{R}^n :\, x = \left(x_1, x'\right),\ |x_1| \le \frac{C}{2},\ x' \in \mathbf{R}^{n-1}\right\}.$$

Fie $u \in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$. Prelungind funcţia u cu zero pe $\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}$, putem scrie

$$u(x) = u\left(x_1, x'\right) = \int_{-\frac{C}{2}}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}\left(s, x'\right) ds \quad \left(x \in \left[-\frac{C}{2}, \frac{C}{2}\right] \times \mathbf{R}^{n-1}\right)$$

de unde, folosind inegalitatea lui Hölder,

$$u^2(x) \le \int_{-\frac{C}{2}}^{x_1} ds \cdot \int_{-\frac{C}{2}}^{x_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\left(s, x'\right)\right)^2 ds \le C \int_{-\frac{C}{2}}^{\frac{C}{2}} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\left(s, x'\right)\right)^2 ds.$$

Integrând în raport cu x' pe $\mathbf{R}^{n-1}$, cu x_1 pe $\left[-\frac{C}{2}, \frac{C}{2}\right]$ şi folosind $u = 0$ pe $\mathbf{R}^n \setminus \Omega$, obţinem

$$\int_\Omega u^2\,dx \le C^2 \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 dx \le C^2 \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx.$$

■

Inegalitatea lui Poincaré poate fi scrisă şi sub forma

$$|u|_{L^2} \le C\,|u|_{0,1} \quad \left(u \in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)\right). \tag{3.26}$$

Această inegalitate implică faptul că orice şir de elemente din $C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$ care este fundamental în raport cu norma $|.|_{0,1}$, este fundamental şi în $L^2(\Omega)$, şi deci convergent în $L^2(\Omega)$. In plus, dacă (u_k) şi (v_k) sunt două şiruri de elemente din $C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$ fundamentale în raport cu norma $|.|_{0,1}$ şi echivalente în sensul că $|u_k - v_k|_{0,1} \to 0$ când $k \to \infty$, atunci limitele lor în $L^2(\Omega)$ coincid, după cum rezultă tot din inegalitatea lui Poincaré. Astfel, există o corespondenţă biunivocă între elementele completatului $H_0^1(\Omega)$ (clase de şiruri fundamentale echivalente) şi elemente ale spaţiului $L^2(\Omega)$. In acest sens, spaţiul $H_0^1(\Omega)$ poate fi considerat un subspaţiu liniar al lui $L^2(\Omega)$. Mai mult decât atât, inegalitatea lui Poincaré (3.26) se extinde prin densitate la spaţiul $H_0^1(\Omega)$. Aşadar

$$|u|_{L^2} \le C\,|u|_{0,1} \quad \left(u \in H_0^1(\Omega)\right). \tag{3.27}$$

Din această inegalitate rezultă că orice şir convergent în $H_0^1(\Omega)$ este convergent cu aceiaşi limită şi în $L^2(\Omega)$. Se spune că incluziunea $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ este *continuă*.

Este adevărat încă mai mult, anume că orice şir mărginit din $H_0^1(\Omega)$ conţine un subşir convergent în $L^2(\Omega)$, adică faptul că incluziunea $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ este *compactă*. In adevăr, teorema lui Ascoli–Arzèla (a se vedea Precup [38], [40]) garantează că incluziunea $C_0^1\left(\overline{\Omega}\right) \subset C\left(\overline{\Omega}\right)$ este compactă. Pe de altă parte, incluziunea $C\left(\overline{\Omega}\right) \subset L^2(\Omega)$ este continuă aşa cum se constată imediat. Rezultă că incluziunea $C_0^1\left(\overline{\Omega}\right) \subset L^2(\Omega)$ este compactă de asemenea. Această proprietate se păstrează prin completarea lui $C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$.

Spaţiul $H_0^1(\Omega)$ se numeşte *spaţiu Sobolev* şi este *spaţiul energetic* al problemei Dirichlet (3.20). Este un spaţiu Hilbert şi au loc incluziunile:

$$C_0^1\left(\overline{\Omega}\right) \subset H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$$

(ambele incluziuni sunt dense).

In continuare, vom desemna produsul scalar $(.,.)_{0,1}$ şi norma $|.|_{0,1}$, prin $(.,.)_{H_0^1}$ şi respectiv $|.|_{H_0^1}$.

Este acum evident că putem extinde funcţionala energie la spaţiul $H_0^1(\Omega)$, după cum urmează:

$$E : H_0^1(\Omega) \to \mathbf{R}, \quad E(u) = \frac{1}{2}|u|_{H_0^1}^2 - (f,u)_{L^2}.$$

Ca mai sus, se poate stabili următorul rezultat.

Propoziţia 3.3 *Fie* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *deschis şi mărginit,* $f \in L^2(\Omega)$ *şi* $u \in H_0^1(\Omega)$. *Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(a) *u satisface identitatea variaţională*

$$(u,v)_{H_0^1} - (f,v)_{L^2} = 0 \quad \text{pentru orice } v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.28}$$

(b) *u este punctul de minim absolut şi strict al funcţionalei energie, adică*

$$E(u) < E(w) \quad \text{pentru orice } w \in H_0^1(\Omega), \ w \neq u.$$

Prin comparaţie cu Teorema 3.11, putem acum defini noţiunea de soluţie generalizată a problemei Dirichlet.

Definiţia 3.3 Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ deschis şi mărginit şi fie $f \in L^2(\Omega)$. Numim *soluţie slabă* (sau *soluţie generalizată*) a problemei Dirichlet (3.20), o funcţie $u \in H_0^1(\Omega)$ care satisface identitatea (3.28).

Teorema 3.13 (de existenţă şi unicitate a soluţiei slabe) *Fie* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *deschis şi mărginit. Pentru orice* $f \in L^2(\Omega)$, *problema* (3.20) *are o soluţie slabă unică.*

Demonstraţie. Avem de demonstrat existenţa şi unicitatea funcţiei $u \in H_0^1(\Omega)$ care satisface identitatea (3.28). Pentru aceasta se aplică teorema lui Riesz de reprezentare a funcţionalelor liniare şi continue pe spaţii Hilbert (vezi Kantorovitch–Akilov [24, p. 195]). In cazul nostru spaţiul Hilbert este spaţiul Sobolev $\left(H_0^1(\Omega), (.,.)_{H_0^1}\right)$, iar funcţionala este:

$$F : H_0^1(\Omega) \to \mathbf{R}, \quad F(v) = (f,v)_{L^2}.$$

Este evident că funcţionala F este liniară. Ea este de asemenea, continuă. Intr-adevăr, folosind inegalitatea lui Poincaré obţinem

$$|F(v)| \leq |f|_{L^2} |v|_{L^2} \leq C |f|_{L^2} |v|_{H_0^1}.$$

Această inegalitate demonstrează continuitatea lui F. Pe baza teoremei lui Riesz, există în mod unic un element $u \in H_0^1(\Omega)$ astfel încât $F(v) = (u, v)_{H_0^1}$ pentru orice $v \in H_0^1(\Omega)$. Aşadar, $(u, v)_{H_0^1} = (f, v)_{L^2}$ oricare ar fi $v \in H_0^1(\Omega)$, adică u este soluţia slabă (unică) a problemei (3.20). ■

Incheiem această secţiune cu o observaţie asupra produsului scalar $(.,.)_{H_0^1}$ şi a normei $|.|_{H_0^1}$ pe spaţiul $H_0^1(\Omega)$. Dacă u, v sunt funcţii din $C_0^1(\overline{\Omega})$, atunci numerele $(u, v)_{H_0^1}$ şi $|u|_{H_0^1}$ se exprimă conform formulelor (3.23) şi (3.24) prin două integrale Riemann ce fac să intervină gradientul funcţiilor u, v, adică derivatele parţiale de ordinul întâi ale celor două funcţii. Intrebarea care se pune în mod natural este dacă astfel de reprezentări integrale ale produsului scalar şi normei pot fi date în cazul general când $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Răspunsul este afirmativ, dacă se reuşeste să se dea un sens derivatelor parţiale de ordinul întâi ale funcţiilor din $H_0^1(\Omega)$. Fie u o funcţie oarecare a spaţiului $H_0^1(\Omega)$. Din cele de mai sus rezultă că u este limita în $L^2(\Omega)$ a unui şir $(u_k)_{k\geq 1}$ de elemente din $C_0^1(\overline{\Omega})$, fundamental în raport cu norma energetică. Aşadar

$$\int_\Omega |\nabla (u_k - u_m)|^2 \, dx \to 0 \quad \text{pentru } k, m \to \infty.$$

Este însă evident că pentru orice $j \in \{1, 2, ..., n\}$ are loc inegalitatea

$$\int_\Omega \left| \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right|^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla (u_k - u_m)|^2 \, dx.$$

Deci şirul $\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)_{k\geq 1}$ este fundamental în $L^2(\Omega)$. Fie u_{x_j} limita şirului $\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)_{k\geq 1}$ în $L^2(\Omega)$. Prin definiţie,

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} := u_{x_j} \qquad (j = 1, 2, ..., n).$$

Cititorul poate verifica că această definiţie este corectă întrucât nu depinde de alegerea şirului fundamental (u_k) ca reprezentant al lui u. Aşadar, orice funcţie din spaţiul Sobolev $H_0^1(\Omega)$ admite derivate parţiale de ordinul întâi generalizate. Acestea sunt funcţii din $L^2(\Omega)$ şi cu ajutorul lor se obţin reprezentările

$$(u,v)_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad |u|_{H_0^1} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

valabile oricare ar fi $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Atragem atenţia că de această dată, integrale care intervin sunt în sensul lui Lebesgue.

3.10 Serii Fourier abstracte

Acest paragraf pregăteşte secţiunea următoare în care vom indica un procedeu de aproximare a soluţiei slabe a problemei Dirichlet. Acest procedeu are la bază reprezentarea soluţiei sub forma unei serii Fourier în raport cu un sistem de funcţii proprii.

Fie H un spaţiu Hilbert real înzestrat cu produsul scalar $(.,.)$ şi norma $|.|$. Fie $(\phi_k)_{k\geq 1}$ un *sistem ortonormat* de elemente ale lui H, adică

$$(\phi_k, \phi_j) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } k \neq j \\ 1 & \text{dacă } k = j. \end{cases}$$

Definiţia 3.4 Pentru orice element $u \in H$, seria

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u, \phi_k)\, \phi_k$$

se numeşte *seria Fourier* a elementului u în raport cu sistemul ortonormat $(\phi_k)_{k\geq 1}$. Coeficienţii ei, numerele reale (u, ϕ_k), se numesc *coeficienţii Fourier* ai lui u în raport cu sistemul $(\phi_k)_{k\geq 1}$.

Au loc următoarele propoziţii:

Propoziţia 3.4 1) *Pentru orice element* $u \in H$, *suma pătratelor coeficienţilor săi Fourier în raport cu* $(\phi_k)_{k\geq 1}$ *este finită şi nu depăşeşte pe* $|u|^2$, *adică*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (u, \phi_k)^2 \leq |u|^2, \quad u \in H \quad (\textit{inegalitatea lui Bessel}). \tag{3.29}$$

2) *Seria Fourier a oricărui element este convergentă.*

Demonstraţie. 1) Sistemul $(\phi_k)_{k\geq 1}$ fiind ortonormat, avem

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| u - \sum_{k=1}^{m} (u.\phi_k)\, \phi_k \right|^2 \qquad (3.30) \\ &= \left(u - \sum_{k=1}^{m} (u.\phi_k)\, \phi_k ,\ u - \sum_{k=1}^{m} (u.\phi_k)\, \phi_k \right) \\ &= |u|^2 - \sum_{k=1}^{m} (u, \phi_k)^2 . \end{aligned}$$

Deci

$$\sum_{k=1}^{m} (u, \phi_k)^2 \leq |u|^2$$

ceea ce arată că seria numerică cu termeni pozitivi $\sum_{k=1}^{\infty} (u, \phi_k)^2$ este convergentă şi de asemenea, demonstrează (3.29).

2) Din

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m+1}^{m+p} (u, \phi_k)\, \phi_k \right|^2 &= \left(\sum_{k=m+1}^{m+p} (u, \phi_k)\, \phi_k ,\ \sum_{k=m+1}^{m+p} (u, \phi_k)\, \phi_k \right) \\ &= \sum_{k=m+1}^{m+p} (u, \phi_k)^2 \end{aligned}$$

se deduce că şirul sumelor parţiale ale seriei Fourier este fundamental în H, la fel cum este fundamental în $\mathbf{R}$ şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum_{k=1}^{\infty} (u, \phi_k)^2$. Spaţiul H fiind complet, rezultă că şirul sumelor parţiale ale seriei Fourier este convergent, adică seria Fourier este convergentă. ■

Propoziţia 3.5 (proprietatea de minim a coeficienţilor Fourier) *Oricare ar fi* $u \in H$, $m \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ *şi coeficienţii* $a_k \in \mathbf{R}$, $k = 1, 2, ..., m$, *are loc inegalitatea*

$$\left| u - \sum_{k=1}^{m} a_k \phi_k \right| \geq \left| u - \sum_{k=1}^{m} (u, \phi_k)\, \phi_k \right| .$$

Demonstraţie. Prin ridicare la pătrat, inegalitatea de demonstrat devine

$$|u|^2 - 2\sum_{k=1}^{m} a_k\,(u,\phi_k) + \sum_{k=1}^{m} a_k^2 \geq |u|^2 - \sum_{k=1}^{m}(u,\phi_k)^2 .$$

Aceasta este însă echivalentă cu inegalitatea evidentă

$$\sum_{k=1}^{m}\left(a_k - (u,\phi_k)\right)^2 \geq 0.$$

■

Teorema 3.14 *Fie* $(\phi_k)_{k\geq 1}$ *un sistem ortonormat de elemente ale spaţiului Hilbert H. Următoarele propoziţii sunt echivalente:*

(i) *Seria Fourier in raport cu* $(\phi_k)_{k\geq 1}$ *a oricărui element* $u \in H$ *are ca sumă elementul u însuşi.*

(ii) *Dacă* $(u,\phi_k) = 0,\ k = 1,2,...,$ *atunci* $u = 0$.

(iii) $|u|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty}(u,\phi_k)^2$ *pentru orice* $u \in H$ (*egalitatea lui Parseval*).

(iv) *Orice element* $u \in H$ *poate fi aproximat oricât de bine prin combinaţii liniare finite de elemente ale sistemului* $(\phi_k)_{k\geq 1}$.

Demonstraţie. (i) $\Rightarrow$ (ii): Conform lui (i) avem

$$\sum_{k=1}^{\infty}(u,\phi_k)\,\phi_k = u, \quad u \in H. \tag{3.31}$$

Dacă pentru un element u toţi coeficienţii săi Fourier sunt nuli, atunci (3.31) arată că $u = 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Pentru orice u avem

$$\left(u - \sum_{k=1}^{\infty}(u,\phi_k)\,\phi_k\,,\ \phi_j\right) = 0, \ \ j = 1,2,\ldots .$$

Din (ii) rezultă atunci că $u - \sum_{k=1}^{\infty}(u,\phi_k)\,\phi_k = 0$.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii): Se foloseşte (3.30), pe baza căreia se are

$$\left|u - \sum_{k=1}^{\infty}(u,\varphi_k)\,\varphi_k\right|^2 = |u|^2 - \sum_{k=1}^{\infty}(u,\varphi_k)^2 .$$

(i) $\Rightarrow$ (iv): Trivial, sumele parţiale ale seriei Fourier fiind combinaţiile liniare finite ale elementelor din sistemul $(\phi_k)_{k\geq 1}$.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Rezultă pe baza proprietăţii de minim a coeficienţilor Fourier. ■

Un sistem ortonormat $(\phi_k)_{k\geq 1}$ se spune că este *complet* dacă satisface oricare din cele patru condiţii echivalente din Teorema 3.14.

In secţiunea care urmează vom vedea că problemei Dirichlet (în Ω) i se poate asocia câte un sistem complet de elemente ale lui $L^2(\Omega)$, respectiv ale lui $H_0^1(\Omega)$.

3.11 Valorile şi funcţiile proprii ale problemei Dirichlet

Scopul următor este de a găsi efectiv soluţia slabă a problemei Dirichlet (3.20). Vom reuşi aceasta folosind metoda seriilor Fourier, cu ajutorul unui sistem ortonormat şi complet de elemente din spaţiul $H_0^1(\Omega)$ asociat problemei Dirichlet. Construcţia acestui sistem necesită valorile şi funcţiile proprii ale problemei Dirichlet.

Definiţia 3.5 Se numeşte *valoare proprie* a problemei Dirichlet pentru operatorul $-\Delta$, orice număr real λ pentru care problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{pe } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.32}$$

admite o soluţie slabă nenulă. O astfel de soluţie se numeşte *funcţie proprie.*

Aşadar, $\lambda \in \mathbf{R}$ este valoare proprie dacă şi numai dacă există $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ astfel încât

$$(u, v)_{H_0^1} = \lambda (u, v)_{L^2} \quad \text{pentru orice } v \in H_0^1(\Omega). \tag{3.33}$$

Atragem atenţia asupra faptului că pentru orice număr real λ, problema (3.32) admite soluţia nulă. Interesul este de a determina acele valori ale lui λ pentru care (3.32) admite şi soluţii nebanale.

Propoziţia 3.6 1) *Valorile proprii ale problemei Dirichlet sunt pozitive.*

2) *La valori proprii diferite corespund funcţii proprii ortogonale în* $L^2(\Omega)$ *şi în* $H_0^1(\Omega)$.

Demonstraţie. 1) Fie λ o valoare proprie şi fie u o funcţie proprie corespunzătoare ei. Dacă în (3.33) alegem $v = u$, obţinem $|u|_{H_0^1}^2 = \lambda\,|u|_{L^2}^2$. Cum $u \neq 0$ fiind funcţie proprie, deducem că $\lambda > 0$.

2) Fie λ_1 şi λ_2 două valori proprii diferite şi fie u_1 şi u_2 două funcţii proprii corespunzătoare lor. Avem

$$(u_1, v)_{H_0^1} = \lambda_1\,(u_1, v)_{L^2}\,, \quad (u_2, v)_{H_0^1} = \lambda_2\,(u_2, v)_{L^2}$$

pentru orice $v \in H_0^1(\Omega)$. Alegând $v = u_2$ în prima egalitate şi $v = u_1$ în cea de a doua, găsim

$$\lambda_1\,(u_1, u_2)_{L^2} = \lambda_2\,(u_1, u_2)_{L^2} = (u_1, u_2)_{H_0^1} \tag{3.34}$$

de unde, cum $\lambda_1 \neq \lambda_2$, deducem că $(u_1, u_2)_{L^2} = 0$, adică faptul că u_1, u_2 sunt ortogonale în $L^2(\Omega)$. Acum (3.34) implică $(u_1, u_2)_{H_0^1} = 0$, adică ortogonalitatea funcţiilor u_1, u_2 în $H_0^1(\Omega)$. ■

Pe baza teoremei care urmează se va putea stabili că valorile proprii ale problemei Dirichlet formează un şir nedescrescător ce tinde la infinit.

Teorema 3.15 *Problema Dirichlet admite un şir* $(\lambda_k)_{k\geq 1}$ *de valori proprii şi corespunzător un şir* $(\phi_k)_{k\geq 1}$ *de funcţii proprii, normat în* $L^2(\Omega)$, *adică cu* $|\phi_k|_{L^2} = 1$ *pentru orice* k, *având următoarele proprietăţi:*

(a) $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \leq ...\,;\ \lambda_k \to \infty$ *când* $k \to \infty$;

(b) $(\phi_k)_{k\geq 1}$ *este ortonormat şi complet în* $L^2(\Omega)$;

(c) $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\phi_k\right)_{k\geq 1}$ *este ortonormat şi complet în* $H_0^1(\Omega)$.

Demonstraţie. Fie

$$\lambda_1 = \inf\left\{|u|_{H_0^1}^2 : \ u \in H_0^1(\Omega)\,, \ \ |u|_{L^2} = 1\right\} \tag{3.35}$$

şi fie (u_k) un şir minimizant, adică un şir satisfăcând condiţiile:

$$u_k \in H_0^1(\Omega)\,, \ |u_k|_{L^2} = 1, \ |u_k|_{H_0^1}^2 \to \lambda_1 \ \text{pentru } k \to \infty.$$

Cum incluziunea $H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ este compactă, putem presupune, trecând eventual la un subşir, că $u_k \to \phi_1$ in $L^2(\Omega)$, unde ϕ_1 este o anumită funcţie din $L^2(\Omega)$. Este clar că $|\phi_1|_{L^2} = 1$. Mai departe, identitatea

$$|u_k - u_m|_{H_0^1}^2 + |u_k + u_m|_{H_0^1}^2 = 2\left(|u_k|_{H_0^1}^2 + |u_m|_{H_0^1}^2\right)$$

implică

$$|u_k - u_m|^2_{H^1_0} \leq 2\left(|u_k|^2_{H^1_0} + |u_m|^2_{H^1_0}\right) - \lambda_1 |u_k + u_m|^2_{L^2} \to 0$$

pentru $k, m \to \infty$. Aşadar, şirul (u_k) este fundamental în $H^1_0(\Omega)$. In consecinţă, $u_k \to \phi_1$ în $H^1_0(\Omega)$, de unde $\lambda_1 = |\phi_1|^2_{H^1_0}$, adică infimumul λ_1 este atins.

Să observăm acum că λ_1 este valoare proprie, iar ϕ_1 este o funcţie proprie corespunzătoare ei. Intr-adevăr, pentru orive $v \in H^1_0(\Omega)$ fixat, funcţia

$$g(t) = \frac{|\phi_1 + tv|^2_{H^1_0}}{|\phi_1 + tv|^2_{L^2}}$$

definită într-o vecinătate a originii (în care $|\phi_1 + tv|^2_{L^2} \neq 0$), are minim în $t = 0$. Calculând derivata ei în punctul $t = 0$, găsim

$$g'(0) = 2\left[(\phi_1, v)_{H^1_0} - \lambda_1 (\phi_1, v)_{L^2}\right] = 0,$$

ceea ce arată că $-\Delta\phi_1 = \lambda_1\phi_1$ în sens slab.

Mai departe, observăm că λ_1 este cea mai mică valoare proprie. Intr-adevăr, dacă λ este o valoare proprie oarecare şi ϕ este o funcţie proprie corespunzătoare ei, cu $|\phi|_{L^2} = 1$, iar în identitatea

$$(\phi, v)_{H^1_0} = \lambda (\phi, v)_{L^2} \qquad \left(v \in H^1_0(\Omega)\right)$$

alegem $v = \phi$, atunci obţinem $\lambda = |\phi|^2_{H^1_0}$. Având în vedere definiţia lui λ_1, deducem că $\lambda_1 \leq \lambda$.

A doua valoare proprie se obţine astfel:

$$\lambda_2 = \inf\left\{|u|^2_{H^1_0} : u \in H^1_0(\Omega),\ |u|_{L^2} = 1,\ (u, \phi_1)_{L^2} = 0\right\}.$$

In mod asemănător se arată (exerciţiu) că acest infimum este atins şi că orice funcţie ϕ_2 ce realizează infimumul este o funcţie proprie corespunzătoare lui λ_2.

La pasul k, având selectate funcţiile proprii $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_{k-1}$, definim

$$\lambda_k = \inf\left\{|u|^2_{H^1_0} : u \in H^1_0(\Omega),\ |u|_{L^2} = 1,\ \left(u, \phi_j\right)_{L^2} = 0,\ j = \overline{1, k-1}\right\}$$

şi reţinem o funcţie ϕ_k pentru care acest infimum este atins.

Şirul (λ_k) astfel obţinut este în mod evident nedescrescător. Să presupunem că acest şir ar fi mărginit. Atunci, din $\lambda_k = |\phi_k|^2_{H^1_0}$ am avea că şirul (ϕ_k) este mărginit în $H^1_0(\Omega)$. Cunoscând că incluziunea $H^1_0(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ este compactă putem concluziona că cel puţin un subşir al lui (ϕ_k) este convergent în $L^2(\Omega)$. Acest lucru este însă exclus fiindcă

$$|\phi_k - \phi_m|^2_{L^2} = |\phi_k|^2_{L^2} + |\phi_m|^2_{L^2} - 2(\phi_k, \phi_m)_{L^2} = 2.$$

Aşadar, $\lambda_k \to \infty$ pentru $k \to \infty$.

Sistemul $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\phi_k\right)$ este ortonormat în $H^1_0(\Omega)$ după cum rezultă din următoarea consecinţă a formulei (3.33):

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\phi_k,\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}}\phi_m\right)_{H^1_0} = \sqrt{\frac{\lambda_k}{\lambda_m}}\,(\phi_k, \phi_m)_{L^2}\,.$$

Pentru completitudine, fie $v \in H^1_0(\Omega)$ o funcţie oarecare. Pentru orice întreg $n \geq 2$ considerăm

$$w_n = v - \sum_{k=1}^{n-1} (v, \phi_k)_{L^2}\,\phi_k = v - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k}(v, \phi_k)_{H^1_0}\,\phi_k\,. \tag{3.36}$$

Folosind ortonormalitatea lui (ϕ_k) în $L^2(\Omega)$, găsim că

$$\left(w_n, \phi_j\right)_{L^2} = 0, \quad j = 1, 2, ..., n-1.$$

Utilizând expresia lui λ_n deducem atunci că

$$|w_n|^2_{H^1_0} \geq \lambda_n\,|w_n|^2_{L^2}\,.$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned}
|v|^2_{H^1_0} &= \left| w_n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k}(v, \phi_k)_{H^1_0}\,\phi_k \right|^2_{H^1_0} \\
&= \left(w_n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k}(v, \phi_k)_{H^1_0}\,\phi_k,\ w_n + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k}(v, \phi_k)_{H^1_0}\,\phi_k \right)_{H^1_0} \\
&= |w_n|^2_{H^1_0} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\lambda_k}(v, \phi_k)^2_{H^1_0} \geq |w_n|^2_{H^1_0}\,.
\end{aligned}$$

Deci

$$|w_n|_{L^2}^2 \le \frac{1}{\lambda_n}|w_n|_{H_0^1}^2 \le \frac{1}{\lambda_n}|v|_{H_0^1}^2 .$$

Pentru $n \to \infty$ această inegalitate împreună cu faptul că $\lambda_n \to \infty$, implică $w_n \to 0$ în $L^2(\Omega)$. Atunci (3.36) implică

$$\begin{aligned} v &= \sum_{k=1}^{\infty} (v, \phi_k)_{L^2} \phi_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(v, \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\phi_k \right)_{H_0^1} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\phi_k , \end{aligned}$$

convergenţa seriei fiind garantată în $L^2(\Omega)$. Cum însă seriile Fourier sunt toate convergente, rezultă că această serie (vezi cea de a doua expresie a ei) converge şi în $H_0^1(\Omega)$. Cu aceasta este demonstrată completitudinea sistemului $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\phi_k\right)$ în $H_0^1(\Omega)$. Completitudinea lui (ϕ_k) în $L^2(\Omega)$ rezultă din cele de mai sus şi din densitatea lui $H_0^1(\Omega)$ în $L^2(\Omega)$.
■

Observaţia 3.3 Din (3.35) rezultă că $1/\sqrt{\lambda_1}$ este cea mai mică constantă pentru care inegalitatea lui Poincaré (3.27) este adevărată pentru orice $u \in H_0^1(\Omega)$. Aşadar

$$|u|_{L^2} \le \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}|u|_{H_0^1} \quad \left(u \in H_0^1(\Omega)\right). \tag{3.37}$$

Are loc următoarea teoremă de reprezentare a soluţiei slabe a problemei Dirichlet cu ajutorul valorilor şi funcţiilor proprii.

Teorema 3.16 *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi mărginită, fie (λ_k) şi (ϕ_k) valorile şi funcţiile proprii ale problemei Dirichlet, ca în Teorema* 3.15. *Atunci, pentru orice $f \in L^2(\Omega)$, soluţia slabă a problemei (*3.20) *se reprezintă sub forma*

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \phi_k)_{L^2}}{\lambda_k} \phi_k \tag{3.38}$$

convergenţa seriei având loc în $H_0^1(\Omega)$, deci şi în $L^2(\Omega)$.

Demonstraţie. Dacă $u \in H_0^1(\Omega)$ este soluţia slabă a problemei (3.20), atunci

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \phi_k)_{L^2}}{\lambda_k} \phi_k &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(u, \phi_k)_{H_0^1}}{\lambda_k} \phi_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(u, \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \phi_k\right)_{H_0^1} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \phi_k = u.\end{aligned}$$

■

3.12 Cazul ecuaţiilor eliptice în formă de divergenţă

Rezultatele obţinute mai sus, ca şi metoda variaţională folosită, pot fi extinse la cazul operatorilor eliptici în *formă de divergenţă* care generalizează operatorul $-\Delta$, anume

$$\begin{aligned}Lu &= -\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_0(x) u \\ &= -\operatorname{div}(A(x) \nabla u) + a_0(x) u\end{aligned} \tag{3.39}$$

unde $A(x)$ este matricea pătratică de ordinul n ale cărei elemente sunt $a_{jk}(x)$ şi unde se presupune că $a_{jk},\ a_0 \in L^\infty(\Omega)$, $a_{jk} = a_{kj},\ a_0 \geq 0$ şi

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \xi_j \xi_k \geq \mu |\xi|^2, \quad \text{pentru orice } \xi \in \mathbf{R}^n \text{şi a.p.t. } x \in \Omega. \tag{3.40}$$

Constanta $\mu > 0$ este numită *constantă de elipticitate tare.*

Cheia acestei extinderi rezidă în faptul că pentru Ω mărginit, funcţionala biliniară

$$a(u, v) = \int_\Omega \left(\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_k} + a_0 uv\right) dx \tag{3.41}$$

defineşte un produs scalar pe $C_0^1(\overline{\Omega})$ astfel încât norma corespunzătoare

$$a(u, u)^{\frac{1}{2}} = \left\{\int_\Omega \left(\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + a_0 u^2\right) dx\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.42}$$

este echivalentă pe $C_0^1(\overline{\Omega})$ cu norma $|u|_{0,1}$ definită prin formula (3.24). Cititorul este îndemnat să demonstreze această echivalenţă folosind inegalitatea (3.40), condiţia $a_0 \geq 0$, inegalitatea lui Poincaré şi inegalitatea lui Cauchy–Schwarz. Pe baza acestei echivalenţe, completatul lui $C_0^1(\overline{\Omega})$ în raport cu norma $a(.,.)^{1/2}$ coincide cu spaţiul $H_0^1(\Omega)$ definit în Secţiunea 3.9.

Considerăm problema Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = f & \text{pe } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.43}$$

Prin *soluţie clasică* înţelegem o funcţie $u \in C^2(\overline{\Omega})$ care satisface punctual egalităţile (3.43) (în acest caz $f \in C(\overline{\Omega})$), iar prin *soluţie slabă* (pentru $f \in L^2(\Omega)$) înţelegem o funcţie $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfăcând

$$a(u,v) = (f,v)_{L^2} \quad \text{pentru orice } v \in H_0^1(\Omega).$$

Funcţionala energie asociată problemei (3.43) este

$$E : H_0^1(\Omega) \to \mathbf{R}, \quad E(u) = \frac{1}{2} a(u,u) - (f,u)_{L^2}. \tag{3.44}$$

Se constată că pentru orice $v \in H_0^1(\Omega)$, avem

$$\lim_{t \to 0} \frac{E(u+tv) - E(u)}{t} = a(u,v) - (f,v)_{L^2}.$$

Mai departe, se poate demonstra principiul lui Dirichlet care ne spune că o funcţie $u \in H_0^1(\Omega)$ este soluţie slabă a problemei (3.43) dacă şi numai dacă ea este punct de minim global şi strict al funcţionalei energie (3.44) şi, folosind teorema lui Riesz, se poate demonstra existenţa şi unicitatea soluţiei slabe a problemei (3.43). De asemenea, teoria valorilor şi funcţiilor proprii, precum şi teorema de reprezentare a soluţiei slabe cu ajutorul valorilor şi funcţiilor proprii, prezentată în secţiunea anterioară rămân valabile în totalitate dacă se consideră mai general operatorul L in locul operatorului $-\Delta$ şi dacă locul produsului scalar $(u,v)_{0,1}$ şi al normei $|u|_{0,1}$ (notate şi cu $(u,v)_{H_0^1}$ şi $|u|_{H_0^1}$) este luat de $a(u,v)$ şi respectiv $a(u,u)^{1/2}$. Formularea exactă a acestor rezultate ca şi detaliile de demonstraţie rămân pe seama cititorului, ca un excelent exerciţiu.

3.13 Soluţia generalizată a problemei Neumann

Considerăm problema Neumann omogenă

$$\begin{cases} -\Delta u + a_0\,(x)\,u = f & \text{pe } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{pe } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.45}$$

unde $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ este o mulţime deschisă şi mărginită, $a_0 \in C(\overline{\Omega})$ şi $a_0\,(x) \geq m > 0$ oricare ar fi $x \in \Omega$.

Numim *soluţie clasică* a problemei (3.45) în care Ω este de clasă C^1 şi $f \in C(\overline{\Omega})$, o funcţie $u \in C^2(\overline{\Omega})$ care satisface punctual egalităţile (3.45).

Ataşam problemei Neumann funcţionala energie

$$E : C^1\left(\overline{\Omega}\right) \to \mathbf{R},\;\; E\,(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}\,|\nabla u|^2 + \frac{1}{2} a_0\, u^2 - f\, u\right) dx.$$

Ca în cazul problemei Dirichlet are loc următoarea teoremă de caracterizare variaţională a soluţiei clasice a problemei Neumann.

Teorema 3.17 *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ deschis, mărginit şi de clasă C^1 şi fie $u \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$. Următoarele propoziţii sunt echivalente:*

(i) *u este soluţia clasică a problemei* (3.45).

(ii) *u satisface identitatea variaţională*

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + a_0\, uv - f\, v)\, dx = 0, \quad v \in C^1\left(\overline{\Omega}\right). \tag{3.46}$$

(iii) *u este punctul de minim absolut şi strict al funcţionalei energie, adică*

$$E\,(u) < E\,(w) \;\; \textit{pentru orice } w \in C^1\left(\overline{\Omega}\right),\;\; w \neq u.$$

Demonstraţie. (i) $\Rightarrow$ (ii): Dacă $u \in C^2(\overline{\Omega})$ este soluţie clasică a problemei (3.45), atunci înmulţind cu $v \in C^1(\overline{\Omega})$, integrând pe Ω şi folosind prima formulă a lui Green, obţinem

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + a_0\, uv)\;\, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, v\;\, d\sigma = \int_\Omega f v\, dx. \tag{3.47}$$

Cum însă $\partial u/\partial \nu = 0$ pe $\partial\Omega$, deducem

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + a_0\, uv)\, dx = \int_\Omega f v\, dx, \tag{3.48}$$

adică (3.46).
(ii) $\Rightarrow$ (i): Din (3.48) se obţine

$$\int_{\Omega}(-\Delta u+a_0\,u-f)\,v\,dx-\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,v\,d\sigma=0 \tag{3.49}$$

pentru orice $v\in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$. In particular, această egalitate este adevărată pentru orice $v\in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$, adică

$$\int_{\Omega}(-\Delta u+a_0\,u-f)\,v\,dx=0,\quad v\in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right).$$

De aici se deduce $-\Delta u+a_0u-f=0$ în Ω. Acum, revenind la (3.49), constatăm că

$$\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,v\,d\sigma=0,\quad v\in C^1\left(\overline{\Omega}\right).$$

Rezultă $\partial u/\partial\nu=0$ pe $\partial\Omega$.

Echivalenţa (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) se demonstrează la fel ca în Teorema 3.11. ■

Această teoremă sugerează ca spaţiul $C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ să fie înzestrat cu produsul scalar asociat operatorului diferenţial $-\Delta u+a_0u$,

$$a(u,v)=\int_{\Omega}(\nabla u\cdot\nabla v+a_0\,uv)\,dx\quad\left(u,v\in C^1\left(\overline{\Omega}\right)\right)$$

şi cu norma energetică corespunzătoare

$$a(u,u)^{\frac{1}{2}}=\left\{\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^2+a_0u^2\right)dx\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{3.50}$$

Fie $H^1(\Omega)$ completatul spaţiului

$$\left\{u\in C^1(\Omega):u\in L^2(\Omega),\ \frac{\partial u}{\partial x_j}\in L^2(\Omega),\ j=1,2,...,n\right\}$$

în raport cu norma energetică (3.50). Este clar că acest spaţiu conţine completatul spaţiului $\left(C^1\left(\overline{\Omega}\right),a(.,.)\right)$. Se poate însă demonstra (vezi Adams [1, p. 53-56]) că dacă Ω este de clasă C^1, atunci $H^1(\Omega)$ coincide cu completatul lui $\left(C^1\left(\overline{\Omega}\right),a(.,.)\right)$. Spaţiul $H^1(\Omega)$ este spaţiul energetic al problemei Neumann (3.45). Este un spaţiu Hilbert şi au loc incluziunile:

$$C^1\left(\overline{\Omega}\right)\subset H^1(\Omega)\subset L^2(\Omega).$$

Funcţionala energie se extinde la spaţiul $H^1(\Omega)$, după cum urmează:

$$E : H^1(\Omega) \to \mathbf{R}, \quad E(u) = \frac{1}{2} a(u,u) - (f,u)_2 .$$

Ca mai sus, se poate stabili următorul rezultat.

Propoziţia 3.7 *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ deschis şi mărginit, $f \in L^2(\Omega)$ şi $u \in H^1(\Omega)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

(a) *u satisface identitatea variaţională*

$$a(u,v) - (f,v)_{L^2} = 0 \ \text{ pentru orice } v \in H^1(\Omega). \tag{3.51}$$

(b) *u este punctul de minim absolut şi strict al funcţionalei energie, adică*

$$E(u) < E(w) \ \text{ pentru orice } w \in H^1(\Omega), \ w \neq u.$$

Prin comparaţie cu Teorema 3.17, putem acum defini noţiunea de soluţie generalizată a problemei Neumann.

Definiţia 3.6 Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ deschis şi mărginit şi fie $f \in L^2(\Omega)$. Numim *soluţie slabă* (sau *soluţie generalizată*) a problemei Neumann (3.45), o funcţie $u \in H^1(\Omega)$ care satisface identitatea (3.51).

Teorema 3.18 (de existenţă şi unicitate a soluţiei slabe) *Fie Ω deschis şi mărginit. Pentru orice $f \in L^2(\Omega)$, problema* (3.45) *are o soluţie slabă unică.*

Demonstraţie. Se aplică teorema lui Riesz de reprezentare a funcţionalelor liniare şi continue pe spaţii Hilbert. In cazul nostru spaţiul Hilbert este spaţiul $\left(H^1(\Omega), a(.,.)\right)$, iar funcţionala este:

$$F : H^1(\Omega) \to \mathbf{R}, \quad F(v) = (f,v)_{L^2} .$$

Este evident că funcţionala F este liniară. Ea este, de asemenea, continuă. Intr-adevăr,

$$|F(v)| \le |f|_{L^2} |v|_{L^2} .$$

Pe de altă parte, folosind $a_0 \ge m > 0$, avem

$$\begin{aligned} |v|_{L^2} &= \left(\int_\Omega v^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\int_\Omega a_0 v^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \frac{1}{\sqrt{m}} \left(\int_\Omega \left(|\nabla v|^2 + a_0 v^2\right) dx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{m}} a(v,v)^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

Deci

$$|F(v)| \leq \frac{1}{\sqrt{m}} |f|_{L^2} a(v,v)^{\frac{1}{2}}.$$

Această inegalitate implică continuitatea lui F. Pe baza teoremei lui Riesz, există în mod unic un element $u \in H^1(\Omega)$ astfel încât $F(v) = a(u,v)$ pentru orice $v \in H^1(\Omega)$. Aşadar, $a(u,v) = (f,v)_{L^2}$ oricare ar fi $v \in H^1(\Omega)$, adică u este soluţia slabă (unică) a problemei (3.45). ■

Este posibilă o teorie similară a valorilor şi funcţiilor proprii pentru problema Neumann, care, în particular, să conducă la reprezentarea soluţiei slabe a problemei Neumann sub forma unei serii de tipul (3.38).

Observaţia 3.4 Subliniem faptul că spre deosebire de condiţia la limită a lui Dirichlet care este încorporată în definiţia spaţiului de funcţii $H_0^1(\Omega)$, condiţia la limită a lui Neumann apare în mod natural ca o consecinţă a egalităţii variaţionale (3.51) (a se vedea demonstraţia implicaţiei (ii) ⇒ (i) a Teoremei 3.17). Acesta este motivul pentru care condiţia pe frontieră a lui Neumann este numită *condiţie la limită naturală.*

In Partea II vom face un studiu mai detaliat al spaţiilor Sobolev în general şi al spaţiilor $H_0^1(\Omega)$ şi $H^1(\Omega)$, în particular.

In legătură cu definiţia soluţiilor slabe sau generalizate ale problemelor la limită eliptice, în termenii spaţiilor energetice asociate, a se vedea Dincă [12] şi Hărăguş [18].

3.14 Complemente

3.14.1 Inegalitatea lui Harnack

Inegalitatea lui Harnack afirmă că pentru orice funcţie armonică nenegativă, minimul şi maximul pe un compact oarecare al domeniului de definiţie sunt comparabile.

Teorema 3.19 *Fie u o funcţie armonică nenegativă pe Ω. Atunci, oricare ar fi două bile concentrice $B_r = B_r(x_0)$ şi $B_R = B_R(x_0)$ astfel încât $0 < r < R$ şi $\overline{B}_R \subset \Omega$, avem*

$$\left(\frac{R}{R+r}\right)^{n-2} \frac{R-r}{R+r} u(x_0) \leq u(x) \leq \left(\frac{R}{R-r}\right)^{n-2} \frac{R+r}{R-r} u(x_0) \quad (3.52)$$

pentru orice $x \in B_r$.

Demonstraţie. Efectuând eventual o translaţie, putem presupune $x_0 = 0$. Pe baza formulei lui Poisson şi a teoremei de medie a funcţiilor armonice, pentru orice $x \in B_R$, avem

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{u(y)}{|x-y|^n} d\sigma_y \\ &\leq \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{u(y)}{(|y| - |x|)^n} d\sigma_y \\ &= \frac{R^2 - |x|^2}{(R - |x|)^n} R^{n-2} \frac{1}{\omega_n R^{n-2}} \int_{\partial B_R} u(y)\, d\sigma \\ &= \left(\frac{R}{R - |x|} \right)^{n-2} \frac{R + |x|}{R - |x|} u(0) \end{aligned}$$

de unde rezultă a doua inegalitate din (3.52). Pentru prima inegalitate din (3.52), se porneşte de la

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{u(y)}{|x-y|^n} d\sigma_y \geq \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B_R} \frac{u(y)}{(|x| + |y|)^n} d\sigma_y$$

şi se continuă în mod asemănător. ■

Folosind (3.52) deducem că pentru oricare două puncte $x_1, x_2 \in B_r$ avem

$$u(x_1) \leq \left(\frac{R+r}{R-r} \right)^n u(x_2). \tag{3.53}$$

Această inegalitate ne permite să demonstrăm rezultatul care urmează.

Corolarul 3.8 (inegalitatea lui Harnack) *Pentru orice domeniu $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ şi orice submulţime compactă $K \subset \Omega$, există o constantă C depinzând numai de Ω şi K astfel încât*

$$\max_K u \leq C \min_K u \tag{3.54}$$

oricare ar fi funcţia armonică nenegativă $u \in C^2(\Omega)$.

Demonstraţie. Fie $0 < R <$ dist $(K, \partial\Omega)$ şi $r = R/2$. Folosind conexitatea lui Ω şi compactitatea lui K, putem găsi un şir finit de bile închise $\overline{B}_R(x_1), \overline{B}_R(x_2), ..., \overline{B}_R(x_m)$ incluse în Ω astfel încât bilele

$B_r(x_1), B_r(x_2), ..., B_r(x_m)$ să acopere pe K şi să fie câte două conectate, adică să existe $x'_k \in B_r(x_k) \cap B_r(x_{k+1})$ pentru orice $k = 1, 2, ..., m-1$. Să demonstrăm că $C = 3^{nm}$. Pentru aceasta este suficient să se arate că $u(x) \leq 3^{nm} u(y)$ oricare ar fi punctele $x, y \in K$. Aceasta rezultă prin aplicarea repetată a formulei (3.53), de cel mult m ori. ■

Facem observaţia că inegalitatea lui Harnack implică principiul tare de maxim al funcţiilor armonice. Intr-adevăr, dacă $u(x_0) = \sup_\Omega u$, $x_0 \in \Omega$, atunci funcţia $v = u(x_0) - u$ este armonică şi nenegativă pe domeniul Ω şi $\min_K v = 0$ oricare ar fi compactul $K \subset \Omega$ ce conţine pe x_0. Din (3.54) rezultă atunci că $v \leq 0$ pe K. Aşadar, $v = 0$ pe Ω, adică u este constant pe Ω.

Corolarul 3.9 *O funcţie armonică nenegativă pe un domeniu este fie identic nulă, fie pozitivă pe acel domeniu.*

Demonstraţie. Presupunând contrarul se contrazice (3.54) dacă se alege K astfel încât $\max_K u > 0$ şi $\min_K u = 0$. ■

3.14.2 Principiul de maxim al lui Hopf

Generalizarea principiului de maxim la cazul operatorilor eliptici generali este datorată lui E. Hopf. Vom considera operatorul

$$\begin{aligned} Lu &= \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x) u \\ &= Mu + c(x) u \end{aligned}$$

unde presupunem că a_{jk}, b_j, $c \in C(\overline{\Omega})$, $a_{jk} = a_{kj}$, $c(x) \leq 0$ pe Ω şi

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \xi_j \xi_k \geq \mu |\xi|^2 \quad \text{pentru toţi } x \in \overline{\Omega} \text{şi } \xi \in \mathbf{R}^n$$

(condiţia de *elipticitate tare*)

pentru vreun $\mu > 0$.

Teorema 3.20 *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi fie $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ astfel încât $Mu \geq 0$ pe Ω şi $u(x_0) = \sup_{\overline{\Omega}} u$, unde $x_0 \in \partial\Omega$ este un punct pentru care există o bilă deschisă $B \subset \Omega$ cu $x_0 \in \partial B$. Atunci, fie că funcţia u este constantă, fie că*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

Demonstraţie. Vom demonstra pentru început *versiunea slabă* a Teoremei 3.20, care necesită în plus ipoteza

$$u(x) < u(x_0) \quad \text{pentru orice } x \in \Omega.$$

Alegem o bilă B_0 concentrică cu B, astfel incât $\overline{B}_0 \subset B$ şi notăm cu x_1 centrul lor şi cu R raza bilei B. Vom nota pentru simplitate, $r = |x - x_1|$. Considerăm funcţia

$$v(x) = e^{-\alpha r^2} - e^{-\alpha R^2},$$

unde $\alpha > 0$. Avem

$$v = 0 \quad \text{pe } \partial B, \quad v > 0 \quad \text{pe } B \ \text{ şi } \ \frac{\partial v}{\partial \nu} < 0 \quad \text{pe } \partial B.$$

Pentru a determina Mv calculăm derivatele

$$\frac{\partial v}{\partial x_j} = -2\alpha x_j e^{-\alpha r^2}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x_j \partial x_k} = 4\alpha^2 x_j x_k e^{-\alpha r^2} - 2\delta_{jk}\alpha e^{-\alpha r^2}$$

unde δ_{jk} este simbolul lui Kronecker. Aşadar

$$Mv \geq \left(4\alpha^2 \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) x_j x_k - C\alpha\right) e^{-\alpha r^2} \geq \left(4\alpha^2 \mu |x|^2 - C\alpha\right) e^{-\alpha r^2}.$$

Rezultă că pentru α suficient de mare, avem $Mv > 0$ pe $\overline{B} \setminus B_0$. Să fixăm un astfel de număr α. Rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$, $M(\varepsilon v + u) > 0$ pe $\overline{B} \setminus B_0$. De aici deducem imediat că funcţia $\varepsilon v + u$ îşi atinge maximul pe compactul $\overline{B} \setminus B_0$, numai pe $\partial(\overline{B} \setminus B_0)$.

Cum $u < u(x_0)$ pe ∂B_0, putem alege $\varepsilon > 0$ astfel încât $\varepsilon v + u < u(x_0)$ pe ∂B_0. Deci $\varepsilon v + u$ îşi atinge maximul pe ∂B. Acolo însă $v = 0$, de unde vedem că maximul funcţiei $\varepsilon v + u$ pe compactul $\overline{B} \setminus B_0$ este atins pe punctul x_0. Rezultă

$$\frac{\partial(\varepsilon v + u)}{\partial \nu}(x_0) \geq 0.$$

Cum însă $\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) < 0$, deducem că $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$, ceea ce doream să arătăm. ■

Are loc următoarea generalizare a Teoremei 3.4.

Teorema 3.21 (principiul tare de maxim al lui Hopf) *Fie* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *un domeniu şi fie* $u \in C^2(\Omega)$ *o funcţie satisfăcând* $Mu(x) \geq 0$ *pentru orice* $x \in \Omega$. *Dacă există* $x_0 \in \Omega$ *astfel încât* $u(x_0) = \sup\limits_{\Omega} u$, *atunci funcţia* u *este constantă pe* Ω.

Demonstraţie. Fie $m = \sup\limits_{\Omega} u$ şi fie $\mathcal{M} = \{x \in \Omega : u(x) = m\}$. Este clar că $\mathcal{M}$ este o mulţime nevidă ($x_0 \in \mathcal{M}$) şi închisă în Ω. Este deci suficient să arătăm că $\mathcal{M}$ este deschisă.

Fie $x^* \in \mathcal{M}$ şi fie bila $\overline{B}_R(x^*) \subset \Omega$. Este suficient să arătăm că $B_{R/2}(x^*) \subset \mathcal{M}$. Pentru aceasta, fie $x \in B_{R/2}(x^*)$ un punct oarecare. Atunci

$$\delta = \operatorname{dist}(x, \mathcal{M}) \leq \operatorname{dist}(x, x^*) < \frac{R}{2}.$$

Vom arăta că $\delta = 0$. Presupunem contrarul, anume că $\delta > 0$ şi considerăm restricţia lui u la $\overline{B}_\delta(x)$. Avem $u \in C^2(\overline{B}_\delta(x))$ şi din definiţia lui δ, există $x_1 \in \partial B_\delta(x) \cap \mathcal{M}$ astfel încât $u(x_1) = m$ şi $u < m$ pe $B_\delta(x)$. Atunci, pe baza versiunii slabe a Teoremei 3.20 deja demonstrate, $(\partial u/\partial \nu)(x_1) > 0$. Pe de altă parte, x_1 aparţine lui Ω şi este un punct de maxim al lui u, deci $\nabla u(x_1) = 0$. Contradicţia la care am ajuns ne arată că $\delta = 0$. ■

Demonstraţia completă a Teoremei 3.20. Teorema 3.21 implică faptul că dacă funcţia u nu este constantă, atunci $u(x) < \sup\limits_{\Omega} u = u(x_0)$. Aşadar ipoteza versiunii slabe este satisfăcută şi demonstraţia este completă. ■

Corolarul 3.10 (principiul slab de maxim al lui Hopf) *Fie* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *un domeniu mărginit şi fie* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. *Dacă* $Lu \geq 0$ *pe* Ω *şi* $u \leq 0$ *pe* $\partial\Omega$, *atunci* $u \leq 0$ *pe* $\overline{\Omega}$.

Demonstraţie. Se presupune contrarul. Atunci mulţimea deschisă $\Omega' = \{x \in \Omega : \ u(x) > 0\}$ este nevidă. De asemenea, folosind faptul că $c(x) \leq 0$, avem $Mu = Lu - c(x)u \geq 0$ pe Ω'. In plus $u = 0$ pe $\partial\Omega'$. Rezultă că pe orice componentă conexă a lui Ω', funcţia u este neconstantă şi îşi atinge supremumul în interior, ceea ce contrazice Teorema 3.21. ■

3.14.3 Potenţialul de volum

In formulele (3.3) şi (3.7) intervine o funcţie specială definită cu ajutorul soluţiei fundamentale a ecuaţiei lui Laplace,

$$V(x) = \int_{\Omega} N(x-y) f(y) \, dy$$

numită *potenţialul de volum* (sau *potenţialul newtonian*) de densitate f.

Proprietatea principală a potenţialului de volum este aceea că el reprezintă o soluţie particulară a ecuaţiei lui Poisson $\Delta V = f$.

Teorema 3.22 *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi mărginită.*

1) Dacă f este o funcţie mărginită şi măsurabilă pe Ω, atunci $V \in C^1(\mathbf{R}^n)$ şi pentru orice $x \in \mathbf{R}^n$ avem

$$\frac{\partial V}{\partial x_j}(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial N}{\partial x_j}(x-y) f(y) \, dy, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{3.55}$$

2) Dacă $f \in C^1(\Omega)$, atunci în plus $V \in C^2(\Omega)$ şi

$$\Delta V = f \quad \text{pe } \Omega. \tag{3.56}$$

Demonstraţie. 1) Pe baza Observaţiei 3.1, funcţia

$$V_j(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial N}{\partial x_j}(x-y) f(y) \, dy$$

este bine definită pe $\mathbf{R}^n$. Pentru a demonstra că $V_j = \partial V / \partial x_j$ considerăm o funcţie $\eta \in C^1(\mathbf{R})$ cu următoarele proprietăţi: $0 \leq \eta \leq 1$, $0 \leq \eta' \leq 2$, $\eta(t) = 0$ pentru $t \leq 1$ şi $\eta(t) = 1$ pentru $t \geq 2$. Pentru orice $\varepsilon > 0$, definim funcţia

$$V_\varepsilon(x) = \int_{\Omega} N(x-y) \eta_\varepsilon f(y) \, dy$$

unde $\eta_\varepsilon = \eta(|x-y| / \varepsilon)$. Se observă imediat că $V_\varepsilon \in C^1(\mathbf{R}^n)$ şi

$$V_j(x) - \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x_j}(x) = \int_{|x-y| \leq 2\varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_j} \{(1-\eta_\varepsilon) N(x-y)\} f(y) \, dy.$$

Rezultă

$$\begin{aligned}
&\left| V_j(x) - \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial x_j}(x) \right| \\
\leq \; & \sup |f| \int_{|x-y| \leq 2\varepsilon} \left(\left| \frac{\partial N}{\partial x_j}(x-y) \right| + \frac{2}{\varepsilon} |N(x-y)| \right) dy \\
\leq \; & \sup |f| \begin{cases} \frac{2n\varepsilon}{n-2} & \text{pentru } n \geq 3 \\ 4\varepsilon(1 + |\ln 2\varepsilon|) & \text{pentru } n = 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

In consecinţă, V_ε şi $\partial V_\varepsilon/\partial x_j$ converg uniform pe $\mathbf{R}^n$ la V, respectiv V_j, când $\varepsilon \to 0$. Aşadar, $V \in C^1(\mathbf{R}^n)$ şi $V_j = V$.

2) Fie $x_0 \in \Omega$ un punct oarecare fixat şi fie $B = B_r(x_0)$ astfel încât $\overline{B} \subset \Omega$. Avem

$$V(x) = V_r(x) + \int_{\Omega_r} N(x-y) f(y)\, dy,$$

unde $\Omega_r = \Omega \setminus \overline{B}$, iar

$$V_r(x) = \int_B N(x-y) f(y)\, dy.$$

Este clar că funcţia $V(x) - V_r(x)$ este armonică pe B. Ne propunem să arătăm că $V_r \in C^2(B)$ şi $\Delta V_r(x_0) \to f(x_0)$ când $r \to 0$. Pentru aceasta, să observăm că pe baza punctului 1), $V_r \in C^1(\mathbf{R}^n)$ şi

$$\nabla V_r(x) = \int_B \nabla_x N(x-y) f(y)\, dy = -\int_B \nabla_y N(x-y) f(y)\, dy.$$

Integrând prin părţi, găsim mai departe

$$\nabla V_r(x) = -\frac{1}{r}\int_{\partial B} N(x-y) f(y)(y-x_0)\, d\sigma_y + \int_B N(x-y) \nabla f(y)\, dy$$

unde s-a folosit faptul că $\nu(y) = (y-x_0)/r$. Prima integrală este în mod clar o funcţie din $C^1(B;\mathbf{R}^n)$. Pe baza punctului 1) şi cea de a doua integrală este în $C^1(B;\mathbf{R}^n)$. Rezultă $V_r \in C^2(B)$. Mai departe, folosind de asemenea punctul 1), găsim pentru $x \in B$:

$$\begin{aligned}
\Delta V_r(x) &= -\frac{1}{r}\int_{\partial B} \operatorname{div}_x\ (N(x-y) f(y)(y-x_0))\, d\sigma_y \\
&\quad + \int_B \operatorname{div}_x\ (N(x-y)\nabla f(y))\, dy \\
&= -\frac{1}{r}\int_{\partial B} (\nabla_x N(x-y), y-x_0) f(y)\, d\sigma_y \\
&\quad + \int_B (\nabla_x N(x-y), \nabla f(y))\, dy.
\end{aligned}$$

Dar

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\int_{\partial B} (\nabla_x N(x_0-y), y-x_0) f(y)\, d\sigma_y \\
= &-\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B} f(y)\, d\sigma \to -f(x_0)
\end{aligned}$$

iar

$$\left|\int_B \left(\nabla_x N\left(x-y\right), \nabla f\left(y\right)\right) dy\right| \leq C \int_B \left|x_0 - y\right|^{1-n} dy \leq Cr \to 0$$

pentru $r \to 0$.

Aşadar $\Delta V_r\left(x_0\right) \to f\left(x_0\right)$ pentru $r \to 0$. ∎

Denumirea de potenţial provine din fizică, unde se spune că un câmp vectorial (de forţe) $\mathbf{F}$ derivă dintr-un potenţial dacă există o funcţie V astfel încât

$$\nabla V = \mathbf{F}.$$

Astfel, de exemplu, conform legii lui Coulomb, o sarcină electrică q plasată în punctul $y \in \mathbf{R}^3$ acţionează asupra sarcinii unitate aflată în punctul x cu forţa $q\left(x-y\right) / \left|x-y\right|^3$. Dacă acum considerăm o distribuţie de sarcini electrice în porţiunea Ω a spaţiului, cu densitatea $f\left(y\right)$, atunci, prin însumare, asupra sarcinii unitate aflată în x va acţiona forţa

$$\mathbf{F} = \int_\Omega \frac{x-y}{\left|x-y\right|^3} f\left(y\right) dy.$$

Se observă că potenţialul ei este funcţia

$$V\left(x\right) = \int_\Omega \frac{1}{\left|x-y\right|} f\left(y\right) dy.$$

Teorema 3.22 permite ca studiul problemelor la limită pentru ecuaţia lui Poisson să fie redus la studiul problemelor corespunzătoare pentru ecuaţia lui Laplace. Intr-adevăr, dacă u este o soluţie a ecuaţiei lui Poisson

$$\Delta u = f \quad \text{ pe } \Omega,$$

unde $f \in C^1\left(\Omega\right) \cap C(\overline{\Omega})$, iar V este potenţialul newtonian de densitate f, atunci funcţia $v = u - V$ este soluţie a ecuaţiei lui Laplace

$$\Delta v = 0 \quad \text{ pe } \Omega.$$

In plus, este important pentru problemele la limită avute în vedere, Dirichlet, Neumann sau Robin, faptul că $V \in C^1(\mathbf{R}^n)$ şi deci se poate vorbi despre valorile funcţiilor V şi $\partial V/\partial \nu$ pe frontiera lui Ω.

In următorul paragraf vom descrie în detaliu metoda funcţiilor subarmonice (sau metoda lui Perron) pentru demonstrarea existenţei soluţiei problemei Dirichlet relative la ecuaţia lui Laplace.

3.14.4 Metoda lui Perron

Am văzut că funcţiile armonice pe un interval (a,b) sunt funcţiile liniare pe (a,b). Vom numi funcţie *sub-armonică* pe (a,b), orice funcţie continuă şi convexă pe (a,b). Amintim că o funcţie u continuă pe (a,b) este convexă dacă şi numai dacă satisface inegalitatea lui Jensen

$$u(x) \leq \frac{u(x-r)+u(x+r)}{2}$$

oricare ar fi intervalul $[x-r,x+r] \subset (a,b)$. O funcţie u se va numi *supra-armonică* pe (a,b) dacă $-u$ este sub-armonică pe (a,b), adică dacă u este continuă şi concavă pe (a,b). Pentru cazul funcţiilor de mai multe variabile, aceste noţiuni sunt generalizate după cum urmează:

Definiţia 3.7 *O funcţie $u \in C(\Omega)$ este sub-armonică pe Ω dacă*

$$u(x) \leq \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B_r(x)} u(y)\, d\sigma \quad \text{oricare ar fi } \overline{B}_r(x) \subset \Omega.$$

Spunem că $u \in C(\Omega)$ este supra-armonică pe Ω dacă $-u$ este sub-armonică pe Ω.

Pe baza teoremei de medie a funcţiilor armonice, rezultă că suma unei funcţii sub-armonice cu o funcţie armonică este o funcţie sub-armonică.

Menţionăm principalele proprietăţi ale funcţiilor sub-armonice:

Teorema 3.23 *Fie $u \in C^2(\Omega)$. Atunci u este sub(supra)-armonică pe Ω dacă şi numai dacă $\Delta u \geq (\leq)\, 0$ pe Ω.*

Demonstraţie. Dacă $\Delta u \geq 0$ pe Ω, atunci aplicând (3.11) bilei $B = B_r(x)$ şi ţinând cont de expresia funcţiei lui Green pentru sferă, ca şi de pozitivitatea ei, obţinem

$$\begin{aligned} u(x) &= -\int_B \Delta u(y)\, G(x,y)\, dy - \int_{\partial B} u(y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y)\, d\sigma_y \qquad (3.57)\\ &\leq -\int_{\partial B} u(y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y)\, d\sigma_y \\ &= -\int_{\partial B} u(y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(0,y-x)\, d\sigma_y = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B} u(y)\, d\sigma \end{aligned}$$

ceea ce arată că funcţia u este sub-armonică pe Ω.

Reciproc, (3.57) implică

$$\int_B \Delta u\,(y)\, G\,(x,y)\, dy = \int_B \Delta u\,(y)\, G\,(0,y-x)\, dy \geq 0.$$

De aici,

$$\Delta u\,(x) \int_B G\,(0,y-x)\, dy \geq \int_B G\,(0,y-x)\, [\Delta u\,(x) - \Delta u\,(y)]\, dy$$

de unde concluzia $\Delta u\,(x) \geq 0$ rezultă dacă se aplică a doua formulă de medie pentru integrala din membrul drept, se împarte la integrala din membrul stâng şi se trece la limită cu $r \to 0$. ■

Teorema 3.24 (principiul de maxim al funcţiilor sub-armonice) *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un domeniu şi fie $u \in C\,(\Omega)$ o funcţie sub-armonică pe Ω. Dacă există $x_0 \in \Omega$ astfel încât $u(x_0) = \sup\limits_{\Omega} u$, atunci u este constantă pe Ω.*

Demonstraţie. Se foloseşte definiţia funcţiilor sub-armonice şi raţionamentul din demonstraţia Teoremei 3.4. ■

O aplicaţie interesantă a principiului de maxim este următoarea teoremă de caracterizare a funcţiilor armonice.

Teorema 3.25 *O funcţie $u \in C\,(\Omega)$ este armonică dacă şi numai dacă ea este simultan sub şi supra-armonică.*

Demonstraţie. Necesitatea rezultă din teorema de medie a funcţiilor armonice. Pentru suficienţă, fie $B = B_r\,(x)$ o bilă oarecare astfel încât $\overline{B} \subset \Omega$. Fie $v \in C^2(B) \cap C(\overline{B})$ unica soluţie garantată de Teorema 3.10, a problemei Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{pe } B \\ v = u & \text{pe } \partial B. \end{cases}$$

Atunci funcţiile $u - v$ şi $v - u$ sunt sub-armonice pe B şi sunt nule pe ∂B. Principiul de maxim al funcţiilor sub-armonice implică atunci că $u \equiv v$ pe B. Deci u este armonică pe B şi dată fiind alegerea arbitrară a bilei B, u este armonică pe Ω. ■

Corolarul 3.11 *Fie (u_k) un şir de funcţii armonice pe Ω care converge la funcţia u uniform pe orice compact inclus în Ω. Atunci funcţia u este armonică pe Ω.*

Demonstraţie. Este clar că $u \in C(\Omega)$. Mai departe, fie $B = B_r(x)$ astfel încât $\overline{B} \subset \Omega$. Funcţiile u_k fiind armonice satisfac

$$u_k(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B} u_k(y)\, d\sigma\,,$$

de unde, ţinând cont şi de uniform convergenţa pe $\overline{B}$ a lui u_k la u, găsim

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B} u(y)\, d\sigma.$$

Aceasta ne arată că funcţia u este simultan sub şi supra-armonică pe Ω şi deci armonică, pe baza Teoremei 3.25. ■

Teorema 3.26 *Fie u o funcţie sub-armonică pe Ω şi B o bilă deschisă astfel încât $\overline{B} \subset \Omega$. Fie $\overline{u}$ funcţia armonică pe B satisfăcând $\overline{u} = u$ pe ∂B. Atunci funcţia*

$$U(x) = \begin{cases} \overline{u}(x), & x \in B \\ u(x), & x \in \Omega \setminus B, \end{cases} \tag{3.58}$$

numită modificarea armonică pe B a lui u, este de asemenea sub-armonică pe Ω.

Demonstraţie. Fie B' o bilă oarecare cu $\overline{B'} \subset \Omega$ şi fie h o funcţie armonică pe B' satisfăcând $U \le h$ pe $\partial B'$. Să observăm pentru început că funcţia $u - \overline{u}$ este sub-armonică pe B şi nulă pe ∂B. In consecinţă, pe baza principiului de maxim al funcţiilor sub-armonice, $u - \overline{u} \le 0$ pe B, de unde $u \le U$ pe întregul Ω. Rezultă că funcţia $u - h$ sub-armonică pe B' satisface $u - h \le 0$ pe $\partial B'$. Principiul de maxim implică atunci, $u - h \le 0$ pe B'. Cum $u = U$ pe $\Omega \setminus B$, avem atunci $U \le h$ pe $B' \setminus B$. Pe de altă parte, $U - h$ este armonică pe $B \cap B'$ şi $U - h \le 0$ pe $\partial(B \cap B')$, de unde $U \le h$ pe $B \cap B'$. Aşadar $U \le h$ pe B' şi, dată fiind alegerea arbitrară a lui B', U este sub-armonică pe Ω. ■

Să mai observăm că dacă u_1 şi u_2 sunt sub-armonice pe Ω, atunci funcţia $u = \max\{u_1, u_2\}$ este de asemenea sub-armonică pe Ω.

In cele ce urmează $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ va fi o mulţime deschisă, mărginită şi conexă, iar $g \in C(\partial\Omega)$. O funcţie sub-armonică $v \in C(\overline{\Omega})$ se spune că este o *sub-funcţie* a lui g, dacă $v \le g$ pe $\partial\Omega$. In mod analog, o funcţie supra-armonică v este o *supra-funcţie* a lui g, dacă $v \ge g$ pe $\partial\Omega$. Pe baza principiului de maxim, orice sub-funcţie a lui g este mai mică sau egală cu orice supra-funcţie a lui g. In particular, o funcţie constantă k

este o sub-funcţie (supra-funcţie) a lui g, dacă şi numai dacă $k \leq \max\limits_{\partial\Omega} g$ ($k \geq \max\limits_{\partial\Omega} g$). Să notăm cu S_g mulţimea sub-funcţiilor lui g.

Este clar că dacă $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ este soluţia problemei

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{pe } \Omega \\ u = g & \text{pe } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.59}$$

atunci $v \leq u$, oricare ar fi sub-funcţia v a lui g. Aceasta ne sugerează să căutăm soluţia u sub forma

$$u(x) = \sup_{v \in S_g} v(x), \quad x \in \overline{\Omega}. \tag{3.60}$$

Aceasta este ideea fundamentală a metodei lui Perron.

Lema 3.2 *Funcţia* (3.60) *este armonică pe* Ω.

Demonstraţie. Pentru orice $v \in S_g$, funcţia $v - \max\limits_{\partial\Omega} g$ este subarmonică şi nepozitivă pe $\partial\Omega$. Pe baza principiului de maxim, rezultă atunci că $v \leq \max\limits_{\partial\Omega} g$ pe $\overline{\Omega}$, ceea ce arată că funcţia (3.60) este bine definită. Fie $x_0 \in \Omega$ un punct arbitrar şi fie (v_k) un şir de funcţii din S_g astfel încât $v_k(x_0) \to u(x_0)$ pentru $k \to \infty$. Inlocuind eventual pe v_k cu funcţia $\max\left\{v_k, \min\limits_{\partial\Omega} g\right\}$, de asemenea aparţinând lui S_g, putem presupune că şirul (v_k) este mărginit în $C(\overline{\Omega})$.

Fie bila $B = B_R(x_0)$ astfel încât $\overline{B} \subset \Omega$ şi fie V_k modificarea armonică pe B a lui v_k, conformă formulei (3.58). Avem $V_k \in S_g$ şi $V_k(x_0) \to u(x_0)$. Pe de altă parte, pe baza formulei lui Poisson,

$$V_k(x) = \frac{R^2 - |x - x_0|^2}{\omega_n R} \int_{\partial B} \frac{v_k(y)}{|x - x_0 - y|^n} d\sigma_y, \quad x \in B.$$

Rezultă că pe orice bilă $\overline{B}_r(x_0)$ inclusă în B, mulţimea funcţiilor continue V_k este mărginită şi echicontinuă şi deci, conform teoremei lui Ascoli-Arzèla (a se vedea Precup [38]), conţine un subşir uniform convergent. Alegând $r = R - 1/k$ şi folosind procedeul diagonal putem găsi un subşir al lui (V_k), pentru simplitate notat tot cu (V_k), care converge uniform pe orice compact din B la o funcţie $v \in C(B)$. Corolarul 3.11 implică că v este armonică pe B. In plus $v \leq u$ pe B şi $v(x_0) = u(x_0)$. Să arătăm că de fapt $v = u$ pe B. Pentru aceasta, să presupunem că

$v(x_1) < u(x_1)$ pentru un anumit punct $x_1 \in B$. Atunci ar exista o funcţie $\widehat{v} \in S_g$ astfel încât $v(x_1) < \widehat{v}(x_1)$. Notând $w_k = \max\{\widehat{v}, V_k\}$ şi considerând modificarea sa armonică W_k (pe B), prin procedeul des-cris mai sus am obţine că un subşir al lui (W_k) converge la o funcţie armonică w satisfăcând $v \leq w \leq u$ pe B şi $v(x_0) = w(x_0) = u(x_0)$. Astfel, funcţia $w - v$, armonică pe B, îşi atinge maximul pe punctul interior $x_0 \in B$. Principiul tare de maxim implică atunci că $w = v$ pe B. Cum însă $W_k(x_1) \geq w_k(x_1) \geq \widehat{v}(x_1)$, ar rezulta $w(x_1) \geq \widehat{v}(x_1) > v(x_1)$, o contradicţie. Aşadar, u este armonică pe B şi cum B a fost arbitrar ales în Ω, u este armonică pe Ω. ∎

Pasul următor constă în a demonstra că funcţia (3.60) este continuă pe $\overline{\Omega}$ şi $u = g$ pe $\partial\Omega$, dacă $\partial\Omega$ posedă anumite calităţi geometrice. Acestea se formulează folosind noţiunea de barieră.

Fie $x_0 \in \partial\Omega$. Spunem că funcţia $w \in C(\overline{\Omega})$ este o *barieră* în x_0 relativ la Ω, dacă

$$\begin{gathered} w \text{ este supra-armonică în } \Omega, \\ w > 0 \text{ în } \overline{\Omega} \setminus \{x_0\} \text{ şi } w(x_0) = 0. \end{gathered}$$

Subliniem faptul că proprietatea unui punct x_0 de a admite o barieră relativ la Ω este o proprietate locală. Intr-adevăr, dacă x_0 admite bariera $w \in C(\overline{\Omega} \cap \overline{B}_r(x_0))$ relativ la $\Omega \cap B_r(x_0)$, atunci funcţia

$$\widetilde{w}(x) = \begin{cases} \min\{w(x), m\} & \text{dacă } x \in \overline{\Omega} \cap B_{r/2}(x_0) \\ m & \text{dacă } x \in \overline{\Omega} \setminus B_{r/2}(x_0) \end{cases}$$

unde $m = \min\left\{w(x) : x \in \overline{\Omega},\ r/2 \leq |x - x_0| \leq r\right\}$, este o barieră în x_0 relativ la Ω.

Un punct $x_0 \in \partial\Omega$ se spune că este *regular* dacă există o barieră în acel punct.

Lema 3.3 *Fie u funcţia armonică definită prin formula* (3.60). *Dacă punctul $x_0 \in \partial\Omega$ este regular, atunci*

$$u(x) \to g(x_0) \quad \textit{pentru } x \in \Omega,\ x \to x_0.$$

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ şi fie $M = \max\limits_{\partial\Omega} |g|$. Fie de asemenea w o barieră în x_0. Folosind continuitatea în x_0 a funcţiilor g şi w şi proprietăţile barierei, deducem că există numerele pozitive δ şi k astfel încât

$$\begin{array}{ll} |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon & \text{dacă } |x - x_0| < \delta, \\ kw(x) \geq 2M & \text{dacă } |x - x_0| \geq \delta. \end{array}$$

Funcţiile $g(x_0)+\varepsilon+kw$ şi $g(x_0)-\varepsilon-kw$ sunt supra-funcţie, respectiv sub-funcţie a lui g. Folosind definiţia lui u şi faptul că orice supra-funcţie domină orice sub-funcţie, deducem că

$$g(x_0)-\varepsilon-kw(x)\leq u(x)\leq g(x_0)+\varepsilon+kw(x), \quad x\in\Omega.$$

Atunci

$$|u(x)-g(x_0)|\leq\varepsilon+kw(x), \quad x\in\Omega.$$

Concluzia rezultă acum fiindcă $w(x)\to 0$ pentru $x\to x_0$. ■

O consecinţă imediată a Lemelor 3.2 şi 3.3 este următoarea teoremă.

Teorema 3.27 *Condiţia necesară şi suficientă pentru ca problema* (3.59) *să admită soluţie în* $C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ *pentru orice* $g\in C(\partial\Omega)$, *este ca toate punctele frontierei* $\partial\Omega$ *să fie regulare.*

Demonstraţie. Suficienţa rezultă imediat din Lemele 3.2 şi 3.3, soluţia problemei (3.59) fiind funcţia u construită conform formulei (3.60). Pentru necesitate, fie $x_0\in\partial\Omega$ un punct oarecare. Atunci soluţia problemei (3.59) corespunzătoare funcţiei $g(x)=|x-x_0|$, este o barieră în x_0 după cum se constată imediat. Deci x_0 este regular. ■

In continuare vom da condiţii suficiente pentru ca punctele frontierei unei mulţimi Ω să fie regulare.

1) **Condiţia segmentului exterior** (pentru cazul $n=2$). Se spune că $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ satisface *condiţia segmentului exterior* într-un punct $x_0\in\partial\Omega$, dacă există un punct $x_1\in\mathbf{R}^n\setminus\{x_0\}$ astfel încât

$$\lambda x_1+(1-\lambda)x_0\notin\Omega, \quad \text{pentru orice } \lambda\in[0,1].$$

In cazul $n=2$, această condiţie este suficientă pentru ca x_0 să fie regular. Intr-adevăr, folosind coordonatele polare (ρ,φ) cu originea în x_0 şi semiaxa $\varphi=0$ de direcţie x_0-x_1, se verifică faptul că funcţia

$$w(x)=-\frac{\ln\rho}{\ln^2\rho+\varphi^2}$$

este o barieră în x_0 relativ la $\Omega\cap B_{r_0}(x_0)$, unde $r_0<1$.

2) **Condiţia conului exterior.** Se spune că $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ satisface *condiţia conului exterior* într-un punct $x_0\in\partial\Omega$, dacă există un con convex şi deschis C, cu vârful în origine şi un număr $r_0>0$ astfel încât

$$\Omega\cap(x_0+C)\cap B_{r_0}(x_0)=\emptyset.$$

Această condiţie revine la faptul că există $x_1 \in \mathbf{R}^n \setminus \{x_0\}$, $0 < \theta_0 < \pi$ şi $r_0 > 0$ astfel încât

$$\Omega \cap B_{r_0}(x_0) \subset \{x : \text{unghi}\,(x_0 - x_1,\, x - x_0) < \theta_0\}.$$

Se poate arăta (a se vedea Dautray–Lions [9, vol. 2, p. 399] pentru $n \geq 3$, că dacă Ω satisface condiţia conului exterior în x_0, atunci x_0 este regular admiţând o barieră de forma $w(x) = r^\lambda \psi(\theta)$, unde $r = |x - x_0|$ şi $\theta = \text{unghi}\,(x_0 - x_1, x - x_0)$.

Condiţia conului exterior implică în mod evident condiţia segmentului exterior.

Spre exemplu, dacă Ω este o mulţime convexă, atunci ea satisface condiţia conului exterior.

3) **Condiţia de netezime** C^1. Dacă Ω este de clasă C^1, atunci Ω satisface condiţia conului exterior în toate punctele lui $\partial\Omega$.

Concluzionând, avem următorul rezultat de existenţă pentru problema Dirichlet. Astfel este încheiată şi discuţia pe marginea formulării corecte a acestei probleme.

Teorema 3.28 *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un domeniu mărginit, cu frontiera formată numai din puncte regulare. Atunci pentru orice $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ şi $g \in C(\partial\Omega)$, există o unică soluţie $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ a problemei Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{pe } \Omega \\ u = g & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases}$$

3.14.5 Potenţialele de suprafaţă

In formulele (3.3) şi (3.7) intervin două tipuri de funcţii definite cu ajutorul soluţiei fundamentale a ecuaţiei lui Laplace şi a integralei de suprafaţă. Acestea sunt

- *potenţialul de strat simplu* de densitate α

$$W_0(x) = \int_{\partial\Omega} N(x - y)\, \alpha(y)\, d\sigma_y$$

- *potenţialul de strat dublu* de densitate β

$$W(x) = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial N}{\partial \nu_y}(x - y)\, \beta(y)\, d\sigma_y.$$

Din punct de vedere fizic, potenţialul de strat simplu poate fi interpretat ca potenţial al câmpului electric indus de o distribuţie de sarcini pe suprafaţă $\partial\Omega$, cu densitatea α. Potenţialul de strat dublu este potenţialul unor dipoli distribuiţi pe suprafaţă $\partial\Omega$, cu densitatea β.

Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă, mărginită şi de clasă C^2 şi fie $\alpha,\ \beta \in C(\partial\Omega)$. Menţionăm fără demonstraţie proprietăţile principale ale potenţialelor de suprafaţă. Pentru detalii indicăm Barbu [3], Folland [14], Mihlin [29] şi Vladimirov [57].

Teorema 3.29 1) *Funcţia W este armonică pe $\mathbf{R}^n \setminus \partial\Omega$, iar restricţia ei la $\partial\Omega$ este continuă.*

2) *Pentru orice $x_0 \in \partial\Omega$, avem*

$$\begin{array}{ll} W(x) \to W(x_0) - \frac{1}{2}\beta(x_0) & \textit{pentru } x \to x_0,\ x \in \Omega \\ W(x) \to W(x_0) + \frac{1}{2}\beta(x_0) & \textit{pentru } x \to x_0,\ x \in \mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}. \end{array} \tag{3.61}$$

Formulele (3.61) exprimă faptul că potenţialul de strat dublu este discontinuu în toate punctele x_0 ale frontierei pentru care $\beta(x_0) \neq 0$.

Inainte de a enunţa rezultatul principal asupra potenţialului de strat simplu, introducem următoarele spaţii de funcţii: $C^1_\nu(\overline{\Omega})$ este spaţiul funcţiilor $u \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ pentru care limita

$$\frac{\partial u}{\partial \nu^-}(x) = \lim_{t \to 0^-} \nu(x) \cdot \nabla u(x + t\nu(x))$$

există pentru orice $x \in \partial\Omega$, convergenţa fiind uniformă pe $\partial\Omega$. De asemenea, $C^1_\nu(\mathbf{R}^n \setminus \Omega)$ este spaţiul funcţiilor $u \in C^1(\mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}) \cap C(\mathbf{R}^n \setminus \Omega)$ pentru care limita

$$\frac{\partial u}{\partial \nu^+}(x) = \lim_{t \to 0^+} \nu(x) \cdot \nabla u(x + t\nu(x))$$

există pentru orice $x \in \partial\Omega$, convergenţa fiind uniformă pe $\partial\Omega$.

Teorema 3.30 1) *Funcţia W_0 este armonică pe $\mathbf{R}^n \setminus \partial\Omega$ şi este continuă pe $\mathbf{R}^n$.*

2) *$W_0 \in C^1_\nu(\overline{\Omega})$, $W_0 \in C^1_\nu(\mathbf{R}^n \setminus \Omega)$ şi pentru orice $x \in \partial\Omega$, avem*

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_0}{\partial \nu^-}(x) &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial N}{\partial \nu_x}(x - y)\,\alpha(y)\,d\sigma_y - \frac{1}{2}\alpha(x) \\ \frac{\partial W_0}{\partial \nu^+}(x) &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial N}{\partial \nu_x}(x - y)\,\alpha(y)\,d\sigma_y + \frac{1}{2}\alpha(x). \end{aligned}$$

Alături de potenţialul de volum, potenţialele de suprafaţă pot fi folosite la demonstrarea existenţei soluţiilor problemelor la limită eliptice, aşa cum vom indica în cele ce urmează.

3.14.6 Metoda ecuaţiilor integrale a lui Fredholm

Presupunem că $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ este o mulţime deschisă, mărginită şi de clasă C^2, pentru ca toate proprietăţile potenţialelor de suprafaţă să aibă loc.

Teorema 3.29 sugerează ca soluţia problemelor Dirichlet interioară (D_i) şi exterioară (D_e) să se caute sub forma unui potenţial de strat dublu, iar Teorema 3.30 sugerează ca soluţia problemelor Neumann interioară (N_i) şi exterioară (N_e) să se caute sub forma unui potenţial de strat simplu (subliniem faptul că toate aceste probleme sunt relative la ecuaţia omogenă a lui Laplace). Mai exact, soluţia problemelor (D_i) şi (D_e) se caută sub forma

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial N}{\partial \nu_y}(x-y)\,\beta(y)\,d\sigma_y$$

iar soluţia problemelor (N_i) şi (N_e), sub forma

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} N(x-y)\,\alpha(y)\,d\sigma_y.$$

In lumina Teoremelor 3.29 şi 3.30, cele patru probleme la limită sunt echivalente cu următoarele ecuaţii integrale liniare:

$$(\mathrm{D}_i) \qquad -\frac{1}{2}\beta(x) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial N}{\partial \nu_y}(x-y)\,\beta(y)\,d\sigma_y = g(x), \quad x \in \partial\Omega;$$

$$(\mathrm{D}_e) \qquad \frac{1}{2}\beta(x) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial N}{\partial \nu_y}(x-y)\,\beta(y)\,d\sigma_y = g(x), \quad x \in \partial\Omega;$$

$$(\mathrm{N}_i) \qquad -\frac{1}{2}\alpha(x) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial N}{\partial \nu_x}(x-y)\,\alpha(y)\,d\sigma_y = g(x), \quad x \in \partial\Omega;$$

$$(\mathrm{N}_e) \qquad \frac{1}{2}\alpha(x) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial N}{\partial \nu_x}(x-y)\,\alpha(y)\,d\sigma_y = g(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Astfel problema existenţei soluţiilor celor patru probleme la limită se reduce la problema existenţei soluţiilor β, respectiv α, ale ecuaţiilor integrale Fredholm de speţa a doua de mai sus. Studiul acestor ecuaţii se bazează pe teorema de alternativă a lui Fredholm pentru operatori liniari complet continui pe spaţii Banach. Pentru detalii recomandăm Barbu [3], Dautray–Lions [9, vol. 2], Folland [14], Mihlin [29] şi Vladimirov [57].

3.15 Probleme

Operatori diferenţiali

1) Se spune că ecuaţia cu derivate parţiale (1.6) este în *formă canonică* dacă $a_{jk} \in \{-1, 0, 1\}$ oricare ar fi j şi k. Dacă $a_{kk} = 1$ (sau -1) pentru orice $k \in \{1, 2, ..., n\}$ şi $a_{jk} = 0$ pentru $j \neq k$, ecuaţia este eliptică; dacă a_{kk} sunt toţi egali cu 1 (sau toţi egali cu -1) cu excepţia a cel puţin unul egal cu 0 şi $a_{jk} = 0$ pentru $j \neq k$, atunci ecuaţia este parabolică; dacă există cel puţin doi coeficienţi opuşi, atunci ecuaţia este hiperbolică. Pentru detalii indicăm Vladimirov [57, p. 60].

Să se aducă la forma canonică precizându-se tipul, ecuaţiile: a) $u_{xx} - 2u_{xy} - 3u_{yy} + u_x = 0$ b) $10u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} + u_x + u_y = 0$ c) $u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} - 2u_x = 0$ d) $u_{xx} - xu_{yy} = 0$.

2) Să se determine toate soluţiile ecuaţiilor: a) $a^2 u_{xx} - u_{yy} = 0$ b) $3u_{xx} + 2u_{xy} - u_{yy} = 0$.

Indicaţie. Se aduce ecuaţia la forma canonică.

3) Să se determine expresia laplaceanului în coordonate cilindrice, sferice (în $\mathbf{R}^3$) şi polare (în $\mathbf{R}^2$).

Indicaţie. Se efectuează schmbări ale variabilelor. Se obţine:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
(în coordonatele cilindrice ρ, φşi z)

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$
(în coodonatele polare ρşi φ)

$$\Delta u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$$
(în coordonatele sferice r, θşi φ).

4) Să se determine *soluţiile radiale,* adică de forma $u(x) = v(|x|)$, ale ecuaţiei lui Laplace pe $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$.

Indicaţie. Se rezolvă ecuaţia diferenţială ordinară

$$v'' + \frac{n-1}{r}v' = 0 \quad \text{pentru } r > 0,$$

unde $v = v(r)$, $r = |x|$. Se obţin soluţiile

$$\begin{aligned} u(x) &= c_1 |x|^{2-n} + c_2 && \text{pentru } n \geq 3 \\ u(x) &= c_1 \ln|x| + c_2 && \text{pentru } n = 2. \end{aligned}$$

Probleme la limită

5) Să se rezolve problema

$$\begin{cases} \Delta u(x,y)=0, & 0<x<a,\ 0<y<b \\ u(x,0)=\sin^3\frac{\pi x}{a},\ u(x,b)=0, & 0\le x\le a \\ u(0,y)=u(a,y)=0, & 0<y<b. \end{cases}$$

Indicaţie. Folosim *metoda separării variabilelor*. Se caută funcţii armonice neidentic nule, de forma $u(x,y)=X(x)Y(y)$ cu $X(0)=X(a)=Y(b)=0$. Rezultă că funcţiile X şi Y satisfac condiţiile

$$\begin{aligned} X''+\lambda X &= 0,\quad 0\le x\le a;\ X(0)=X(a)=0; \\ Y''-\lambda Y &= 0,\quad 0\le y\le b;\ Y(b)=0. \end{aligned}$$

Se constată că există soluţii netriviale numai pentru $\lambda=\lambda_k=(k\pi/a)^2$, anume $X_k(x)=\sin(k\pi x/a)$, $Y_k(y)=\operatorname{sh}(k\pi(b-y)/a)$, $k\in\mathbf{N}\backslash\{0\}$. Se caută soluţia problemei ca o combinaţie liniară a funcţiilor $X_k(x)Y_k(y)$. Cum $\sin^3\frac{\pi x}{a}=\frac{3}{4}\sin\frac{\pi x}{a}-\frac{1}{4}\sin\frac{3\pi x}{a}$, obţinem

$$u(x,y)=\frac{3}{4}\sin\frac{\pi x}{a}\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}}-\frac{1}{4}\sin\frac{3\pi x}{a}\frac{\operatorname{sh}\frac{3\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh}\frac{3\pi b}{a}}.$$

6) Să se rezolve

$$\begin{cases} \Delta u=0, & 0<x<\pi,\ 0<y<\pi \\ u(x,0)=A\sin x,\ u(x,\pi)=0, & 0\le x\le\pi \\ u(0,y)=B\sin 3y,\ u(\pi,y)=0, & 0<y<\pi. \end{cases}$$

Indicaţie. Soluţia se caută sub forma $u=u_1+u_2$, unde u_1 şi u_2 sunt funcţii armonice pe $(0,\pi)\times(0,\pi)$ şi satisfac câte o singură condiţie neomogenă la limită.

7) Să se rezolve următoarele probleme (în coordonate polare):

a) $\Delta u=0$ pentru $\rho<R$, $u=\cos^2\varphi$ pentru $\rho=R$;

b) $\Delta u=0$ pentru $\rho<R$, $\partial u/\partial\rho=A\cos\varphi$ pentru $\rho=R$;

c) $\Delta u=0$ pentru $\rho>R$, $u=\cos 3\varphi$ pentru $\rho=R$, $|u|\le C$;

d) $\Delta u=0$ pentru $R_1<\rho<R_2$, $u=A$ pentru $\rho=R_1$, $u=\cos\varphi$ pentru $\rho=R_2$.

Indicaţie. Se caută soluţii netriviale ale ecuaţiei lui Laplace, de forma $u(\rho,\varphi)=Z(\rho)\Phi(\varphi)$. Folosind expresia laplaceanului în coordonate polare, găsim

$$\begin{aligned} \Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi) &= 0, \\ \rho^2Z''(\rho)+\rho Z'(\rho)-\lambda Z(\rho) &= 0. \end{aligned}$$

Intrucât $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$, prima ecuaţie admite soluţii neidentic nule numai pentru $\lambda = \lambda_k = k^2$, anume $\Phi_k(\varphi) = a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi,\ k \in \mathbf{N}$. Mai departe găsim $Z_k(\rho) = c_k \rho^k + d_k \rho^{-k}$ pentru $k \geq 1$ şi $Z_0(\rho) = c_0 \ln \rho + d_0$ pentru $k = 0$.

Soluţia problemelor la limită pe $\Omega = \left\{x \in \mathbf{R}^2 : \rho = |x| < R\right\}$ se caută sub forma

$$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \left(\frac{\rho}{R}\right)^k,$$

pentru problemele la limită pe $\Omega = \left\{x \in \mathbf{R}^2 : \rho > R\right\}$, sub forma

$$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \left(\frac{R}{\rho}\right)^k,$$

iar pentru problemele la limită pe coroana $\Omega = \left\{x \in \mathbf{R}^2 : R_1 < \rho < R_2\right\}$, sub forma

$$u = a \ln \rho + b + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \rho^k + b_k \rho^{-k}\right) \cos k\varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k \rho^k + d_k \rho^{-k}\right) \sin k\varphi$$

(a se vedea Problema 8.6.2 pentru justificarea formalismului de mai sus).

8) Să se afle distribuţia staţionară a temperaturii $u(\rho, \varphi, z)$ în interiorul unui cilindru infinit de rază R, dacă suprafaţă cilindrului este menţinută la temperatura $u(R, \varphi, z) = A \cos \varphi$.

Indicaţie. Este de aşteptat ca funcţia u să nu depindă de z. Aşadar este suficient să studiem problema într-o secţiune transversală. Se ajunge astfel la problema $\Delta u = 0$ pentru $\rho < R$, $u = A \cos \varphi$ pentru $\rho = R$.

9) Arătaţi că nu există nici o soluţie $u \in C^2(\overline{B})$, $B = B_R(0)$, pentru problema Neumann

$$\begin{cases} \Delta u = 1 & \text{pe } B \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{pe } \partial B. \end{cases}$$

*Indica*ţie. Se foloseşte prima formulă a lui Green.

Funcţii armonice

10) Fie u o funcţie armonică pe mulţimea deschisă $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Atunci, oricare ar fi bila închisă $\overline{B}_r(x) \subset \Omega$, $u(x)$ este media valorilor funcţiei u pe punctele bilei (sferei pline) $\overline{B}_r(x)$, adică

$$u(x) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} u(y)\, dy$$

(*versiunea ,,plină" a formulei de medie*).

Indicaţie. Se integrează de la 0 la r în raport cu τ, formula

$$\omega_n \tau^{n-1} u(x) = \int_{\partial B_\tau(x)} u(y)\, d\sigma_y.$$

11) O funcţie armonică pe $\mathbf{R}^n$ mărginită inferior sau superior este constantă (*teorema lui Liouville*).

Indicaţie. Fără a restrânge generalitatea se poate presupune $u \geq 0$. Fie $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$ două puncte arbitrare şi $r_1 = r_2 + |x_1 - x_2| \geq r_2 > 0$. Atunci $B_2 = B_{r_2}(x_2) \subset B_{r_1}(x_1) = B_1$ şi aplicând versiunea ,,plină" a formulei de medie, găsim

$$u(x_2) = \frac{n}{\omega_n r_2^n} \int_{B_2} u(y)\, dy \leq \frac{n}{\omega_n r_2^n} \int_{B_1} u(y)\, dy = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n u(x_1).$$

Pentru $r_2 \to \infty$ se obţine $u(x_2) \leq u(x_1)$. Analog, $u(x_1) \leq u(x_2)$.

O altă demonstraţie pentru teorema lui Liouville poate fi dată pe baza Teoremei 3.19.

12)* Fie u o funcţie armonică pe domeniul $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Dacă u se anulează pe o submulţime nevidă şi deschisă a lui Ω, atunci u este identic nulă pe Ω.

Indicaţie. Fie $B_R(x_0) \subset \Omega$ o bilă pe care u este identic nulă. Folosind inegalitatea lui Harnack se arată că u va fi nulă de-a lungul oricărui drum continuu ce porneşte din x_0.

13)* Pentru orice $\alpha \in \mathbf{N}^n \setminus \{0\}$ există o constantă $C = C(n, \alpha)$ astfel încât, dacă u este o funcţie armonică şi mărginită pe $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, atunci

$$|D^\alpha u(x)| \leq \frac{C}{(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega))^{|\alpha|}} \sup_\Omega |u|, \quad x \in \Omega.$$

Indicaţie. Dacă $\partial\Omega = \emptyset$, adică $\Omega = \mathbf{R}^n$, inegalitatea de demonstrat revine la faptul că $D^\alpha u$ este funcţia nulă, ceea ce rezultă din teorema lui Liouville. Fie deci $\partial\Omega \neq \emptyset$. Pe baza Corolarului 3.3, este suficient să estimăm derivatele de ordinul întâi. Pentru $r < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, avem

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(x)} \frac{\partial u}{\partial x_j}(y)\, dy = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{\partial B_r(x)} u(y)\, \nu_j(y)\, d\sigma$$

şi inegalitatea rezultă dacă se ţine cont de faptul că $|\nu_j| \leq 1$ şi r măs(∂B_r) $= n$ măs(B_r).

14)* Să se demonstreze că inegalitatea de la exerciţiul anterior are loc pentru următoarea expresie a constantei C:

$$C(n,\alpha) = (ne)^{|\alpha|}\frac{|\alpha|!}{e}.$$

Rezolvare. Se presupune formula adevărată pentru α şi se arată că ea rămîne valabilă şi pentru β cu $|\beta| = |\alpha| + 1$. Pentru un astfel de β avem $D^\beta u = \partial D^\alpha u/\partial x_j$ pentru un anumit j. Fixăm un număr $\tau \in (0,1)$ şi aplicăm versiunea ,,plină" a formulei de medie funcţiei $D^\beta u$ şi bilei $B_{\tau r}(x)$, unde ca mai sus, $r < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$. Obţinem

$$\begin{aligned} D^\beta u(x) &= \frac{n}{\omega_n(\tau r)^n}\int_{B_{\tau r}(x)}\frac{\partial D^\alpha u}{\partial x_j}dy \\ &= \frac{n}{\omega_n(\tau r)^n}\int_{\partial B_{\tau r}(x)} D^\alpha u(y)\frac{y_j - x_j}{|y-x|}d\sigma_y. \end{aligned}$$

Insă, după cum s-a presupus, avem

$$|D^\alpha u(y)| \le \left(\frac{ne}{(1-\tau)r}\right)^{|\alpha|}\frac{|\alpha|!}{e}\sup_\Omega |u|, \quad y \in \partial B_{\tau r}(x).$$

Rezultă

$$\left|D^\beta u(x)\right| \le \left(\frac{ne}{r}\right)^{|\alpha|+1}\frac{1}{(1-\tau)^{|\alpha|}\tau}\frac{|\alpha|!}{e^2}\sup_\Omega |u|.$$

In final se alege $\tau = 1/|\beta|$ şi se foloseşte inegalitatea

$$\left(1-\frac{1}{|\beta|}\right)^{-|\alpha|} \le \left(1-\frac{1}{|\beta|}\right)^{-|\beta|} \le e.$$

15)* Orice funcţie u armonică pe Ω este local analitică pe Ω, adică pentru orice $\overline{x} \in \Omega$, există o vecinătate V a lui $\overline{x}$ astfel încât seria Taylor

$$\sum_\alpha \frac{D^\alpha u(\overline{x})}{\alpha!}(x-\overline{x})^\alpha,$$

unde $(x-\overline{x})^\alpha = \prod_{j=1}^n (x_j - \overline{x}_j)^{\alpha_k}$ şi $\alpha! = \prod_{j=1}^n \alpha_j!$, converge la $u(x)$ uniform pe V.

Indicaţie. Teorema lui Taylor ne spune că

$$u(x) = \sum_{|\alpha|\le m}\frac{D^\alpha u(\overline{x})}{\alpha!}(x-\overline{x})^\alpha + \sum_{|\beta|=m+1}\frac{D^\beta u(\xi)}{\beta!}(\xi-\overline{x})^\beta$$

unde $\xi \in B_r(\overline{x})$. Dar

$$\left|D^\beta u(\xi)\right| \leq \left(\frac{ne}{ne^{2n+1}r}\right)^{|\beta|} \frac{|\beta|!}{e} \sup_\Omega |u|.$$

Folosind şi inegalitatea $|\beta|! \leq e^{n|\beta|}\beta!$ obţinem

$$\frac{\left|D^\beta u(\xi)\right|}{\beta!} \left|(\xi - \overline{x})^\beta\right| \leq e^{-n|\beta|} \sup_\Omega |u|.$$

In concluzie, restul din formula lui Taylor se poate estima astfel

$$\left|\sum_{|\beta|=m+1} \frac{D^\beta u(\xi)}{\beta!}(\xi - \overline{x})^\beta\right| \leq \sum_{|\beta|=m+1} e^{-n|\beta|} \leq |\beta|^n e^{-n|\beta|}$$

şi tinde la zero pentru $m \to \infty$, uniform în raport cu $x \in B_r(\overline{x})$.

16)* Fie (u_k) un şir de funcţii armonice pe domeniul Ω. Dacă şirul este minorat de o funcţie u_0 armonică pe Ω (adică $u_0 \leq u_k$ pe Ω, pentru orice k) şi există $x_0 \in \Omega$ astfel încât şirul de numere reale $(u_k(x_0))$ este mărginit superior, atunci (u_k) conţine un subşir ce converge la o funcţie armonică, uniform pe orice compact inclus în Ω.

Rezolvare. Se poate presupune că $u_k \geq 0$ pe Ω, pentru orice k. Fie $K \subset \Omega$ un compact cu $x_0 \in K$. Inegalitatea lui Harnack arată că $\max_K u_k \leq C \min_K u_k \leq C u_k(x_0) \leq C'$. Deci şirul (u_k) este mărginit în spaţiul $C(K)$. Să arătăm că el este în plus echicontinuu. Fie $x \in K$ şi $\overline{B} = \overline{B}_r(x) \subset \Omega$. Notăm

$$m_k(r) = \min_{\overline{B}} u_k, \quad M_k(r) = \max_{\overline{B}} u_k.$$

Aplicând (3.53) funcţiilor $u_k - m_k(r)$ şi $M_k(r) - u_k$ găsim

$$\begin{aligned} M_k(r/2) - m_k(r) &\leq 3^n\left(m_k(r/2) - m_k(r)\right), \\ M_k(r) - m_k(r/2) &\leq 3^n\left(M_k(r) - M_k(r/2)\right). \end{aligned}$$

Fie $\varpi_k(r) = M_k(r) - m_k(r)$, oscilaţia lui u_k pe $\overline{B}$. Atunci,

$$\varpi_k(r) + \varpi_k(r/2) \leq 3^n\left(\varpi_k(r) - \varpi_k(r/2)\right),$$

de unde

$$\varpi_k(r/2) \leq \theta\, \varpi_k(r), \qquad \text{cu} \quad \theta = \frac{3^n - 1}{3^n + 1} < 1.$$

Rezultă

$$\varpi_k\left(r/2^j\right) \leq \theta^j \varpi_k(r) \leq \theta^j M_k(r).$$

In consecinţă, $\varpi_k\left(r/2^j\right) \to 0$ pentru $j \to \infty$, uniform în raport cu k. Aşadar (u_k) este echicontinuu. Concluzia rezultă acum pe baza teoremei lui Ascoli-Arzèla.

Principiul de maxim

17) Folosind principiul de maxim pentru laplacean, să se demonstreze următorul principiu de maxim pentru operatorul $\Delta u + c(x)u$ unde $c(x) \leq 0$: Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un domeniu, $c \in C(\Omega)$ o funcţie satisfăcând $c(x) \leq 0$ pe Ω şi fie $u \in C^2(\Omega)$ astfel încât $\Delta u + c(x)u \geq 0$ pe Ω. Dacă $\sup\limits_{\Omega} u > 0$ şi există $x_0 \in \Omega$ astfel ca $u(x_0) = \sup\limits_{\Omega} u$, atunci u este constantă pe Ω.

Indicaţie. Se arată că mulţimea $\mathcal{M} = \left\{x \in \Omega : u(x) = \sup\limits_{\Omega} u\right\}$ este simultan deschisă şi închisă în Ω. Pentru a demonstra că ea este deschisă, se consideră un punct oarecare $x \in \mathcal{M}$. Există atunci o vecinătate deschisă şi conexă $\Omega' \subset \Omega$ a lui x, astfel încât $u(y) \geq 0$ oricare ar fi $y \in \Omega'$. Deci $c(y)u(y) \leq 0$ pe Ω', de unde se deduce $\Delta u \geq 0$ pe Ω'. Teorema 3.4 implică atunci că u este constantă pe Ω'.

18) Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un domeniu mărginit şi $c \in C(\Omega)$. Să se demonstreze că dacă $c(x) \leq 0$ pe Ω, atunci pentru operatorul $\Delta u + c(x)u$ are loc principiul slab de maxim, adică: dacă $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $\Delta u + c(x)u \geq 0$ pe Ω şi $u \leq 0$ pe $\partial\Omega$, atunci $u \leq 0$ pe $\overline{\Omega}$.

Indicaţie. Se presupune contrarul. Atunci $\sup\limits_{\Omega} u = \max\limits_{\overline{\Omega}} u > 0$ şi se aplică rezultatul din problema anterioară.

19) Dacă pentru operatorul $\Delta u + c(x)u$ are loc principiul de maxim, atunci $\inf\limits_{\Omega} c < \lambda$, oricare ar fi numărul real λ pentru care există o funcţie $\phi \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfăcând $\Delta\phi + \lambda\phi = 0$, $\phi > 0$ pe Ω şi $\phi = 0$ pe $\partial\Omega$.

Indicaţie. In caz contrar, am avea $c(x) \geq \lambda$ pe Ω. Atunci $\Delta\phi + c(x)\phi \geq \Delta\phi + \lambda\phi = 0$ pe Ω şi cum $\phi \leq 0$ pe $\partial\Omega$, ar trebui ca $\phi \leq 0$ pe Ω; contradicţie.

20) Să se enunţe şi să se demonstreze o teoremă de unicitate pentru problema Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u + c(x)u = f(x) & \text{pe } \Omega \\ u = g & \text{pe } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.62}$$

unde $c(x) \leq 0$ pentru orice $x \in \Omega$.

21) Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un domeniu mărginit, $c \in C(\Omega)$ satisfăcând $c(x) \leq 0$ pe Ω, $f \in C(\overline{\Omega})$ şi $g \in C(\partial\Omega)$. Să se demonstreze că există o constantă $C > 0$ depinzând numai de Ω, astfel încât, dacă $u \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ este soluţia problemei (3.62), atunci

$$|u|_{C(\overline{\Omega})} \leq |g|_{C(\partial\Omega)} + C\,|f|_{C(\overline{\Omega})}\,.$$

Indicaţie. Se procedează ca în demonstraţia Teoremei 3.6, cu singura deosebire că în loc de principiul slab de maxim pentru laplacean se foloseşte principiul slab de maxim pentru operatorul $\Delta u + c(x)\,u$.

22) Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ un domeniu pentru care $\mathbf{R}^n \setminus \Omega$ este o mulţime mărginită. Fie $c \in C(\Omega)$ satisfăcând $c(x) \leq 0$ pe Ω, $f \in C(\Omega)$ şi $g \in C(\partial\Omega)$. Să se demonstreze că există cel mult o soluţie $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ a problemei Dirichlet exterioare

$$\begin{cases} \Delta u + c\,u = f & \text{pe } \Omega \\ u = g & \text{pe } \partial\Omega \\ u(x) \to 0 & \text{pentru } |x| \to \infty. \end{cases}$$

23) Fie $\Omega = \left\{x \in \mathbf{R}^2 : |x| < 1\right\}$. Dacă $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ este soluţia problemei

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & |x| < 1 \\ u = 2\ln(2 + \sin\varphi) - \sin\varphi, & |x| = 1, \end{cases}$$

să se determine valorile extreme ale lui u, precum şi punctele din $\overline{\Omega}$ pe care acestea sunt atinse.

Indicaţie. Conform Corolarului 3.5, valorile extreme ale lui u sunt atinse numai pe $\partial\Omega$. Aşadar problema se reduce la aflarea extremelor şi a punctelor de extrem pentru funcţia $2\ln(2+t) - t,\ t \in [-1, 1]$.

24) Considerăm problema Dirichlet neliniară

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(u(x))\,, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3.63}$$

într-un domeniu mărginit $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Să se arate că dacă $f \in C(\mathbf{R})$ şi $|f(t)| \leq M$ pentru orice $t \in \mathbf{R}$, atunci există o constantă $C > 0$ depinzând numai de Ω şi M, astfel încât $|u|_{C(\overline{\Omega})} \leq C$ oricare ar fi soluţia $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ (în general neunică) a problemei (3.63).

Rezolvare. Pentru o soluţie u se notează $v(x) = f(u(x))$. Este clar că u este soluţia problemei Dirichlet liniare $\Delta u = v$ în Ω, $u = 0$ pe $\partial\Omega$. Pe baza Teoremei 3.6, $|u|_{C(\overline{\Omega})} \le c\,|v|_{C(\overline{\Omega})} \le cM = C$.

25) Presupunem că în (3.63), $f \in C^1(\mathbf{R})$ şi este nedescrescătoare pe $\mathbf{R}$. Să se demonstreze că dacă $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ sunt două soluţii ale problemei (3.63) astfel încât $u \le v$ pe $\partial\Omega$, atunci $u \le v$ pe $\overline{\Omega}$.

Rezolvare. Avem

$$\Delta(u-v)(x) = f(u(x)) - f(v(x)) = -(u-v)(x)\,c(x),$$

unde

$$c(x) = \begin{cases} \frac{f(u(x))-f(v(x))}{v(x)-u(x)}, & \text{dacă } u(x) \ne v(x) \\ -f'(u(x)), & \text{dacă } u(x) = v(x). \end{cases}$$

Se constată imediat că $c \in C(\Omega)$ şi $c(x) \le 0$ oricare ar fi $x \in \Omega$. Aşadar

$$\Delta(u-v) + c(x)(u-v) = 0 \ \text{ pe } \Omega \ \text{ şi } \ u - v \le 0 \text{ pe } \partial\Omega.$$

Principiul de maxim pentru operatorul $\Delta w + c(x)\,w$ implică atunci că $u - v \le 0$ pe $\overline{\Omega}$.

Funcţia lui Green

26) Funcţia lui Green pentru problema Dirichlet relativă la operatorul lui Laplace satisface inegalităţile

$$0 < G(x,y) < -N(x-y), \qquad x, y \in \Omega,\ x \ne y.$$

Indicaţie. $G(x,.)$ este armonică pe $\Omega \setminus \{x\}$, se anulează pe $\partial\Omega$ şi $G(x,y) \to +\infty$ pentru $y \to x$. Rezultă, folosind principiul de maxim, că $G(x,y) > 0$. Pentru cea de-a doua inegalitate se aplică principiul de maxim funcţiei $\Phi(x,.) = G(x,.) + N(x - .)$.

27) Funcţia Φ este continuă pe $\Omega \times \overline{\Omega}$.

Indicaţie. Folosind continuitatea lui $\Phi(x_0,.)$ şi principiul de maxim pentru funcţia armonică $\Phi(x_0,.) - \Phi(x,.)$, deducem că

$$\begin{aligned} & |\Phi(x,y) - \Phi(x_0,y_0)| \\ \le\ & |\Phi(x_0,y_0) - \Phi(x_0,y)| + |\Phi(x_0,y) - \Phi(x,y)| \\ \le\ & |\Phi(x_0,y_0) - \Phi(x_0,y)| + \max_{y' \in \partial\Omega} \left| N\left(x_0 - y'\right) - N\left(x - y'\right) \right| \\ \to\ & 0 \ \text{ pentru } \ (x,y) \to (x_0,y_0). \end{aligned}$$

28)* Să se demonstreze că funcţia lui Green este simetrică în raport cu cele două variabile, adică $G(x,y) = G(y,x)$ oricare ar fi $x, y \in \Omega$, $x \neq y$.

Indicaţie. Fie $x_1, x_2 \in \Omega$, $x_1 \neq x_2$ şi $r > 0$ suficient de mic ca bilele închise de rază r, cu centrele x_1 şi x_2, să fie disjuncte şi incluse în Ω. A doua formulă a lui Green aplicată funcţiilor armonice $G(x_1,.)$ şi $G(x_2,.)$ pe deschisul $\Omega \setminus \left[\overline{B}_r(x_1) \cup \overline{B}_r(x_2)\right]$, ne dă

$$\begin{aligned} & -\int_{\partial B_r(x_1)} \left\{ G(x_1,y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x_2,y) - G(x_2,y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x_1,y) \right\} d\sigma \\ = & \int_{\partial B_r(x_2)} \left\{ G(x_1,y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x_2,y) - G(x_2,y) \frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x_1,y) \right\} d\sigma. \end{aligned}$$

Apoi se observă că limita pentru $r \to 0$ a primei şi a celei de a patra integrale este zero. De asemenea

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_r(x_1)} G(x_2,y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(x_1,y)\, d\sigma &\to 0, \\ \int_{\partial B_r(x_2)} G(x_1,y) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_y}(x_2,y)\, d\sigma &\to 0 \end{aligned}$$

pentru $r \to 0$. Se deduce atunci că

$$\begin{aligned} & \lim_{r\to 0} \int_{\partial B_r(x_1)} G(x_2,y) \frac{\partial N}{\partial \nu_y}(x_1 - y)\, d\sigma \\ = & \lim_{r\to 0} \int_{\partial B_r(x_2)} G(x_1,y) \frac{\partial N}{\partial \nu_y}(x_2 - y)\, d\sigma \end{aligned}$$

de unde $G(x_2,x_1) = G(x_1,x_2)$.

29) Să se determine pentru orice $x \in \Omega$, funcţia $\Phi(x,.) \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$ satisfăcând

$$\Delta_y \Phi(x,y) = 0 \text{ pentru } y \in \Omega, \ \Phi(x,y) = N(x-y) \text{ pentru } y \in \partial\Omega$$

în următoarele cazuri: a) $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : x_1 > 0\}$ (semispaţiu) b) $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : x_1 > 0 \text{ şi } |x| < R\}$ (semibilă).

Soluţii generalizate

30) Demonstraţi că în ipotezele (3.40) şi $a_0 \geq 0$, norma $a(u,u)^{1/2}$ dată de (3.42) este echivalentă pe spaţiul $C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$ cu norma $|u|_{0,1}$.

31) Se consideră problema Dirichlet unidimensională

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{pe } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Să se scrie funcţionala energie E, să se afle

$$E'(u;v) = \lim_{t \to 0+} t^{-1} \left(E(u+tv) - E(u) \right),$$

să se definească soluţia slabă şi să se dea caracterizări ale ei.

32) Să se scrie funcţionala energie şi să se dea caracterizări ale soluţiei slabe pentru problemele

a) $\begin{cases} -\Delta u + \left(1 + |x|^2\right) u = 1 & \text{pe } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega \end{cases}$ b) $\begin{cases} -\Delta u + u = |x| & \text{pe } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases}$

33) Să se scrie problema Dirichlet a cărei funcţională energie este

$$\begin{aligned} \text{a)} \ E(u) &= \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + u^2 + |x| u \right) dx \\ \text{b)} \ E(u) &= \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} u^2 + |x| u \right) dx. \end{aligned}$$

34)* Verificaţi că funcţia $u = x_1 x_2 (\ln |x|)^\alpha$, cu $0 < \alpha < 1$, satisface $\Delta u \in C(\mathbf{R}^2)$ şi $u \notin C^2(\mathbf{R}^2)$. Aşadar, câştigul în regularitate de două unităţi al soluţiei slabe a problemei Dirichlet pentru ecuaţia lui Poisson (se va lua $\Omega = B_1(0;\mathbf{R}^2)$), nu are loc în cazul spaţiilor C^m. El are însă loc în cazul spaţiilor Sobolev H^m (vezi Partea II, Corolarul 8.2). De asemenea, un astfel de câştig are loc în cazul spaţiilor Hölder (a se vedea Gilbarg–Trudinger [16, p. 52]).

Serii Fourier. Valori şi funcţii proprii

35) Să se demonstreze ortonormalitatea şi completitudinea sistemelor de funcţii ce intervin în teoria clasică a seriilor Fourier:

a) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, ...$ în $L^2(-\pi, \pi)$

b) $\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 2x, ...$ în $L^2(0, \pi)$

c) $\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx\right)_{k \geq 1}$ în $L^2(0, \pi)$.

Indicaţie. a) Completitudinea se deduce pe baza Teoremei lui Weierstrass de aproximare a funcţiilor continue pe $[-\pi, \pi]$ şi cu valori egale la capetele intervalului, prin polinoame trigonometrice; se foloseşte de asemenea densitatea acestui spaţiu de funcţii în $L^2(-\pi,\pi)$ şi propoziţia (iv) din Teorema 3.14.

b) Pentru completitudine, este suficient să se demonstreze că din $(u, \cos kx)_{L^2(0,\pi)} = 0$, $k = 0, 1, ...$, unde $u \in L^2(0,\pi)$, rezultă $u = 0$. Dacă $\widetilde{u}$ este prelungirea pară a lui u la $[-\pi,\pi]$, atunci

$$\begin{aligned} (\widetilde{u}, \cos kx)_{L^2(-\pi,\pi)} &= 0, \quad k = 0, 1, ... \\ (\widetilde{u}, \sin kx)_{L^2(-\pi,\pi)} &= 0, \quad k = 1, 2, ... \end{aligned}$$

Folosind rezultatul de la punctul a), deducem $\widetilde{u} = 0$ pe $[-\pi,\pi]$, adică $u = 0$ pe $[0,\pi]$.

36) Să se dezvolte în serie Fourier în raport cu sistemele de la problema anterioară, funcţiile:

$$1; \quad x; \quad \sin^2 x.$$

37) Să se rezolve problema de valori şi funcţii proprii

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{pe } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega \end{cases}$$

pentru: a) intervalul $\Omega = (0,a)$ b) domeniul dreptunghiular $\Omega = (0,a) \times (0,b)$ c) discul $\Omega = \left\{x \in \mathbf{R}^2 : |x| < R\right\}$.

Indicaţie. a) $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2$, $\phi_k = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{k\pi x}{a}$ $(k = 1, 2, ...)$ b) Se aplică metoda separării variabilelor căutându-se funcţii proprii de forma $u(x_1, x_2) = A(x_1) B(x_2)$. Se obţin valorile şi funcţiile proprii

$$\lambda_{kj} = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{j\pi}{b}\right)^2, \ \phi_{kj} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sin \frac{k\pi x_1}{a} \sin \frac{j\pi x_2}{b} \ \ (k, j = 1, 2, ...).$$

Ştiind că sistemele de funcţii $\left(\sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{k\pi x_1}{a}\right)$, $\left(\sqrt{\frac{2}{b}} \sin \frac{j\pi x_2}{b}\right)$ sunt ortonormate şi complete în $L^2(0,a)$, respectiv $L^2(0,b)$, se arată că sistemul de funcţii $\left(\phi_{kj}\right)$ este ortonormat şi complet în $L^2(\Omega)$ (a se vedea, de exemplu, Kalik [23, p. 125]), de unde se deduce că numerele λ_{kj} reprezintă toate valorile proprii ale problemei. c) In coordonate polare, problema devine

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \lambda u = 0 & \text{pentru } \rho < R \\ u = 0 & \text{pentru } \rho = R. \end{cases}$$

Se caută soluţii neidentic nule de forma $u(\rho,\varphi) = A(\rho)B(\varphi)$, cu $B(\varphi+2\pi) = B(\varphi)$. Se obţin problemele

$$B'' + \mu B = 0 \text{ pe } (0,2\pi), \quad B(\varphi+2\pi) = B(\varphi)$$

$$A'' + \frac{1}{\rho}A' + \left(\lambda - \frac{\mu}{\rho^2}\right)A = 0, \quad A(R) = 0, \ |A(0)| < \infty.$$

Prima problemă admite soluţii nebanale numai pentru $\mu = k^2$, $B_k(\varphi) = \alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi$. Notând $y(\rho) = A\left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}\right)$, obţinem

$$\rho^2 y'' + \rho y' + \left(\rho^2 - k^2\right) y = 0, \quad y\left(\sqrt{\lambda}R\right) = 0, \quad |y(0)| < \infty.$$

Aceasta este *ecuaţia lui Bessel*; o soluţie a ei, finită în origine, este *funcţia lui Bessel* de ordinul k, $J_k(\rho)$. Egalitatea $J_k\left(\sqrt{\lambda}R\right) = 0$ implică $\sqrt{\lambda}R = \sigma_j^k$, unde σ_j^k $(j = 1,2,...)$ sunt zerourile pozitive ale funcţiei J_k. Aşadar valorile şi funcţiile proprii găsite sunt

$$\lambda_{kj} = \left(\frac{\sigma_j^k}{R}\right)^2$$

$$u_{kj}^1(\rho,\varphi) = J_k\left(\frac{\sigma_j^k}{R}\rho\right)\cos k\varphi, \quad u_{kj}^2(\rho,\varphi) = J_k\left(\frac{\sigma_j^k}{R}\rho\right)\sin k\varphi.$$

Pentru detalii privind funcţiile Bessel indicăm Vladimirov [57, p. 361].

38) Folosind valorile şi funcţiile proprii ale problemei Dirichlet, să se rezolve problema $-\Delta u = f$ pe Ω, $u = 0$ pe $\partial\Omega$, dacă: a) $\Omega = (0,\pi)$ şi $f(x) = \sin x + 2\sin 2x$ b) $\Omega = (0,\pi)$ şi $f(x) = 1$ c) $\Omega = (0,\pi)\times(0,\pi)$ şi $f(x_1,x_2) = \sin x_1 \sin 3x_2$ d) $\Omega = (0,\pi)\times(0,\pi)$ şi $f(x_1,x_2) = x_1 x_2$.

Indicaţie. Se aplică formula (3.38).

39) Pentru orice $f \in L^2(\Omega)$ notăm cu $(-\Delta)^{-1} f$ soluţia slabă a problemei Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{pe } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega \end{cases}$$

Să se demonstreze inegalităţile:

$$\left|(-\Delta)^{-1} f\right|_{H_0^1} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} |f|_{L^2} \tag{3.64}$$

şi

$$\left|(-\Delta)^{-1} f\right|_{L^2} \leq \frac{1}{\lambda_1} |f|_{L^2} \tag{3.65}$$

şi să se arate că $1/\lambda_1$ şi $1/\sqrt{\lambda_1}$ sunt cele mai bune constante pentru inegalităţile (3.64) şi (3.65).

Rezolvare. In definiţia soluţiei slabe

$$(u, v)_{H_0^1} = (f, v)_{L^2}, \quad v \in H_0^1(\Omega)$$

se alege $v = u$ şi se ţine cont de expresia lui λ_1 dată de formula (3.35). Rezultă

$$|u|_{H_0^1}^2 = (f, u)_{L^2} \leq |f|_{L^2} |u|_{L^2} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} |f|_{L^2} |u|_{H_0^1},$$

de unde prin simplificare cu $|u|_{H_0^1}$ se obţine (3.64). Pentru cea de a doua inegalitate, conform egalităţii lui Parseval, avem

$$|u|_{L^2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (u, \phi_k)_{L^2}^2.$$

Dar $(u, \phi_k)_{H_0^1} = \lambda_k (u, \phi_k)_{L^2}$. Folosind şi $\lambda_1 \leq \lambda_k$ pentru orice $k \geq 1$ şi din nou egalitatea lui Parseval, deducem

$$\begin{aligned} |u|_{L^2}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} (u, \phi_k)_{H_0^1}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} (f, \phi_k)_{L^2}^2 \\ &\leq \frac{1}{\lambda_1^2} \sum_{k=1}^{\infty} (f, \phi_k)_{L^2}^2 = \frac{1}{\lambda_1^2} |f|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

de unde (3.65). Se constată că pentru $f = \phi_1$ are loc egalitatea în (3.64) şi (3.65).

Capitolul 4
Probleme mixte pentru ecuaţii de evoluţie

Următoarele două capitole vor fi consacrate ecuaţiei căldurii

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f$$

şi ecuaţiei undelor

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f.$$

Aici u şi f sunt funcţii de variabile x şi t, iar Δu este calculat numai în raport cu variabilele spaţiale x, adică $\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$.

Subliniem faptul că dacă f şi u sunt funcţii ce depind numai de x, nu şi de t, atunci cele două ecuaţii revin la ecuaţia lui Poisson, $-\Delta u = f$. Acesta este motivul pentru care se spune că ecuaţiile eliptice descriu procese staţionare (a căror desfăşurare este constantă în timp).

4.1 Principiul de maxim pentru ecuaţia căldurii

Considerăm problema la limită

$$\begin{cases} Lu := \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{pe } Q \\ u(x,0) = g_0(x) & \text{pe } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \Sigma \end{cases} \tag{4.1}$$

unde $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ este o mulţime deschisă şi mărginită, $0 < T \leq \infty$,

$$Q = \Omega \times (0,T), \quad \Sigma = \partial\Omega \times (0,T),$$

iar funcţiile f şi g_0 sunt date. Notăm cu B frontiera parabolică a cilindrului Q, adică

$$B = (\partial\Omega \times [0,T]) \cup (\Omega \times \{0\}) .$$

Din punct de vedere fizic, problema (4.1) modelează distribuţia în timp a temperaturii u într-un corp omogen Ω; condiţia Cauchy exprimă distribuţia temperaturii la momentul iniţial $t = 0$, iar condiţia Dirichlet exprimă faptul că frontiera $\partial\Omega$ a corpului este menţinută la temperatura zero.

Prin *soluţie clasică* a problemei (4.1) înţelegem o funcţie $u = u\,(x,t) \in C^{2,1}(\overline{Q})$ care satisface punctual cele trei egalităţi, unde

$$C^{2,1}(\overline{Q}) = \left\{ u : \overline{Q} \to \mathbf{R} : \;\; u,\, \frac{\partial u}{\partial t},\, \frac{\partial u}{\partial x_j},\, \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \in C(\overline{Q}) \right\}.$$

Unicitatea soluţiei clasice ca şi dependenţa ei continuă de datele f şi g_0 rezultă din următoarea teoremă.

Teorema 4.1 (principiul de maxim pentru ecuaţia căldurii) *Fie* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *o mulţime deschisă şi mărginită,* $0 < T \leq \infty$ *şi fie* $u \in C(\overline{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$*. Dacă*

$$Lu \leq 0 \;\; \textit{pe } Q \quad \textit{şi} \quad u \leq 0 \;\; \textit{pe } B,$$

atunci $u \leq 0$ *pe* $\overline{Q}$.

Demonstraţie. Presupunem pentru început că $T < \infty$. Fie $\varepsilon > 0$ şi fie $v\,(x,t) = u\,(x,t) - \varepsilon t$. Atunci

$$Lv = Lu - \varepsilon < 0 \quad \text{pe } \; Q.$$

Fie $(x_0, t_0) \in \overline{Q}$ un punct de maxim al lui v, adică $v\,(x_0,t_0) = \max_{\overline{Q}} v$. Dacă $(x_0, t_0) \in Q$, atunci derivatele parţiale de ordinul întâi ale lui v pe punctul (x_0, t_0) ar fi nule, iar cele de ordinul al doilea ar fi nepozitive. Atunci

$$\frac{\partial v}{\partial t}\,(x_0,t_0) = 0 \;\; \text{şi} \quad \Delta v\,(x_0,t_0) \leq 0.$$

Deci $Lv\,(x_0,t_0) \geq 0$, o contradicţie.

Dacă $t_0 = T$ şi $x_0 \in \Omega$ (deci x_0 este punct interior), atunci am avea

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x_0, t_0) \geq 0 \quad \text{şi} \quad \Delta v (x_0, t_0) \leq 0.$$

Deci şi în acest caz, $Lv (x_0, t_0) \geq 0$, o contradicţie. Aşadar,

$$\begin{aligned} \max_{\overline{Q}} u &\leq \max_{\overline{Q}} v + \varepsilon T = \max_{(\partial\Omega\times[0,T])\cup(\Omega\times\{0\})} v + \varepsilon T \\ &\leq \max_{(\partial\Omega\times[0,T])\cup(\Omega\times\{0\})} u + \varepsilon T \leq \varepsilon T. \end{aligned}$$

Trecând la limită cu $\varepsilon \to 0$, obţinem

$$\max_{\overline{Q}} u \leq 0.$$

Aşadar, $u \leq 0$ pe $\overline{Q}$.

In cazul $T = \infty$, se obţine ca mai sus că pentru orice $T' < \infty$, $u \leq 0$ pe $\overline{Q_{T'}}$, unde $Q_{T'} = \Omega \times (0, T')$. Este atunci clar că $u \leq 0$ pe $\overline{Q}$. ■

Observaţia 4.1 In caz că $T < \infty$, Teorema 4.1 se poate formula în mod echivalent sub forma: Dacă $u \in C(\overline{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$ şi $Lu \leq 0$ în Q, atunci

$$\max_{\overline{Q}} u = \max_{B} u. \tag{4.2}$$

In adevăr, se ajunge la această concluzie dacă se aplică Teorema 4.1 funcţiei $u - M$, unde $M = \max\limits_{B} u$.

O consecinţă a principiului de maxim este următorul rezultat privind unicitatea şi dependenţa continuă de date a soluţiei clasice a problemei (4.1), de tipul Teoremei 3.6.

Corolarul 4.1 (unicitate şi estimare) *Problema* (4.1) *admite cel mult o soluţie clasică* u. *In plus, dacă* $f \in L^\infty(Q)$, *atunci*

$$|u (x, t)| \leq |g_0|_{C(\overline{\Omega})} + c\,|f|_{L^\infty(Q)}\,, \quad (x, t) \in \overline{Q} \tag{4.3}$$

unde $c = c(\Omega)$.

Demonstraţie. a) Dacă u_1 şi u_2 sunt soluţii clasice, atunci funcţia $u = u_1 - u_2$ satisface $Lu = 0$ în Q şi $u = 0$ pe B. Teorema 4.1 implică atunci $u \leq 0$ pe $\overline{Q}$. Analog, $-u \leq 0$ pe $\overline{Q}$, de unde $u_1 = u_2$.

b) Se aplică Teorema 4.1 funcţiilor

$$v(x,t) = \pm\, u(x,t) - |g_0|_{C(\overline{\Omega})} - \left(e^{2\delta} - e^{x_1+\delta}\right) |f|_{L^\infty(Q)}\,,$$

unde $\delta > 0$ este astfel ales încât $|x_1| \leq \delta$ oricare ar fi $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Omega$. Avem $c = \max\limits_{\overline{\Omega}} \left(e^{2\delta} - e^{x_1+\delta}\right)$. ■

Teorema 4.1 reprezintă principiul slab de maxim pentru ecuaţia căldurii, analogul principiului slab de maxim pentru laplacean (Corolarul 3.6). Subliniem faptul că egalitatea (4.2) arată că funcţia u îşi atinge maximul **şi pe** frontiera B, dar nu este exclus ca ea să-şi atingă maximul şi în Q. De exemplu, u poate fi o funcţie constantă pe Q. Un principiu tare de maxim garantează că aceasta este unica posibilitate. Enunţul şi demonstraţia principiului tare de maxim pentru ecuaţia căldurii, mai general pentru ecuaţii de tip parabolic, pot fi găsite, de exemplu, în Barbu [3], Dautray–Lions [9, cap. V] şi Protter–Weinberger [41].

Ca şi în cazul problemelor eliptice, în loc de a trata în mod direct problema existenţei soluţiei clasice, este convenabil să se demonstreze existenţa şi unicitatea soluţiei într-un sens generalizat, urmând ca apoi să se revină la soluţii clasice via teoremele de regularitate. Vom proceda în acest fel în cele ce urmează.

4.2 Funcţii cu valori vectoriale

Prezenţa variabilei t cu semnificaţia timp justifică denumirea de ecuaţii de evoluţie dată unor astfel de ecuaţii. De altfel, în analiza acestor ecuaţii este adeseori util să se confere variabilei t un rol privilegiat; astfel, oricărei funcţii scalare $u(x,t)$ i se ataşează aplicaţia

$$t \longmapsto u(t) := u(.,t) \tag{4.4}$$

care pe punctul t are ca valoare **funcţia** $u(.,t)$ de variabilă x. Cu această precizare, avem $u(t)(x) = u(x,t)$. In cele ce urmează semnificaţia simbolului u, de funcţie reală de variabile x şi t, sau de funcţie de variabilă t şi cu valori funcţii de variabile x, va reieşi din context. Este clar că orice abordare matematică a unor probleme care fac să intervină o aplicaţie de acest tip necesită să se precizeze spaţiul de funcţii în care aplicaţia (4.4) ia valori, precum şi anumite proprietăţi ale ei (măsurabilitate, continuitate, derivabilitate, integrabilitate, etc.). In această secţiune ne referim la astfel de aplicaţii cu valori într-un spaţiu vectorial, mai exact, cu valori într-un spaţiu Banach.

Fie X un spaţiu Banach cu norma $|.|_X$ şi I un interval de numere reale. Vom nota cu $C(I;X)$ spaţiul funcţiilor continue $u : I \to X$. Dacă $I = [a,b]$, atunci $C([a,b];X)$ este un spaţiu Banach cu norma convergenţei uniforme

$$|u|_{C([a,b];X)} = \max\{|u(t)|_X : t \in [a,b]\}.$$

Fie $u : I \to X$ este o funcţie oarecare; se spune că funcţia u este derivabilă în punctul $t_0 \in I$, dacă limita

$$\frac{du}{dt}(t_0) = u'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{1}{t}[u(t) - u(t_0)]$$

există în X. Notăm cu $C^1(I;X)$ spaţiul funcţiilor de la I în X, derivabile pe I şi cu derivata $u' : I \to X$ continuă. Mai general, $C^k(I;X)$ este spaţiul funcţiilor u de la I în X care sunt de k ori derivabile pe I şi cu derivata de ordinul k continuă.

Dacă X este spaţiu Hilbert cu produsul scalar $(.,.)_X$ iar $u \in C^1(I;X)$, atunci (exerciţiu) funcţia scalară $|u(t)|_X^2$ aparţine spaţiului $C^1(I)$ şi

$$\frac{d}{dt}|u(t)|_X^2 = 2\left(u'(t), u(t)\right)_X, \quad t \in I. \tag{4.5}$$

O serie întreagă de alte noţiuni bine cunoscute pentru funcţii reale de o variabilă reală, pot fi extinse în mod natural la cazul funcţiilor cu valori în spaţiul X; pentru aceasta se înlocuieşte ori de câte ori este nevoie, valoarea absolută $|u(t)|$ cu norma $|u(t)|_X$. Aşa sunt, de exemplu, noţiunile de funcţie măsurabilă şi de funcţie absolut integrabilă (Riemann sau Lebesgue).

Pentru $1 \le p < \infty$ şi $-\infty \le a < b \le \infty$, vom considera spaţiul $L^p(a,b;X)$ al funcţiilor măsurabile $u : (a,b) \to X$ care satisfac condiţia

$$|u|_{L^p(a,b;X)} = \left(\int_a^b |u(t)|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

In cele ce urmează, X va fi unul din spaţiile $C^m\left(\overline{\Omega}\right)$, $L^2(\Omega)$ şi $H_0^1(\Omega)$, unde $\Omega \subset \mathbf{R}^n$.

Incheiem această secţiune cu menţionarea a două teoreme bine cunoscute referitoare la seriile de funcţii uniform convergente. Faţă de cadrul obişnuit al analizei clasice, seriile care ne intervin sunt, mai general, serii de funcţii vectoriale.

O serie de funcţii $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)$, unde $u_k \in C([a,b];X)$, este *uniform convergentă* la funcţia $u : [a,b] \to X$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N = N(\varepsilon)$ (independent de t) astfel încât $\left|\sum_{k=1}^{m} u_k(t) - u(t)\right|_X < \varepsilon$ oricare ar fi $m > N$ şi $t \in [a,b]$. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca seria să fie uniform convergentă, este ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe $N = N(\varepsilon)$ astfel încât $\left|\sum_{k=m+1}^{m+p} u_k(t)\right|_X < \varepsilon$ oricare ar fi $m > N$, $p \geq 1$ şi $t \in [a,b]$ (criteriul lui Cauchy). Au loc următoarele teoreme:

1) Dacă seria de funcţii $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)$, $u_k \in C([a,b];X)$, este uniform convergentă la u, atunci $u \in C([a,b];X)$.

2) Dacă seria (1) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)$, $u_k \in C^1([a,b];X)$, este convergentă pe un punct $t_0 \in [a,b]$, iar seria derivatelor (2) $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(t)$ este uniform convergentă pe $[a,b]$, atunci seria (1) este uniform convergentă pe $[a,b]$, suma ei u aparţine spaţiului $C^1([a,b];X)$ şi $u'(t)$ este suma seriei (2).

Pentru demonstraţii a se vedea, de exemplu, S.M. Nikolsky, *A Couse of Mathematical Analysis*, Mir, Moscow, 1981, Vol. 1, p. 435 şi Kalik [23, p. 177].

4.3 Problema Cauchy-Dirichlet pentru ecuaţia căldurii

Să observăm că dacă $u \in C^{1,2}\left(\overline{Q}\right)$ este soluţie clasică a problemei (4.1), $f \in C\left(\overline{Q}\right)$ şi $g_0 \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, atunci aplicaţiile

$$t \mapsto u(t) := u(.,t), \quad t \mapsto f(t) := f(.,t)$$

desemnate tot prin u şi f, aparţin spaţiilor $C^1\left([0,T];C^2\left(\overline{\Omega}\right)\right)$ şi respectiv $C\left([0,T];C\left(\overline{\Omega}\right)\right)$ (Menţionăm că pentru $T = \infty$, prin intervalul $[0,T]$ vom înţelege $[0,\infty)$). In plus avem

$$\begin{cases} u'(t) - \Delta u(t) = f(t), & t \in [0,T] \\ u(0) = g_0 & \\ u(t)(x) = 0 & x \in \partial\Omega,\ t \in [0,T]. \end{cases} \tag{4.6}$$

Aşadar, (4.6) poate fi considerată o altă formă de scriere a problemei (4.1). Din (4.6), avem că pentru orice $t \in [0,T]$, $u(t) \in C^2\left(\overline{\Omega}\right) \cap C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$ şi satisface:

$$\begin{cases} -\Delta u(t) = f(t) - u'(t) & \text{pe } \Omega \\ u(t) = 0 & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases}$$

Aceasta, conform principiului lui Dirichlet (dacă presupunem în plus că Ω este de clasă C^1) revine la

$$\int_\Omega \left(\nabla u\left(t\right)\cdot\nabla v - f\left(t\right)v + u'\left(t\right)v\right)dx = 0,\quad v\in C_0^1\left(\overline{\Omega}\right).$$

Deci

$$\begin{cases} \left(u'\left(t\right),v\right)_{L^2(\Omega)} + \left(u\left(t\right),v\right)_{H_0^1(\Omega)} = \left(f\left(t\right),v\right)_{L^2(\Omega)}, & t\in[0,T] \\ u\left(0\right) = g_0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Această problemă are însă sens mai general dacă $f\left(t\right),\ u'\left(t\right)\in L^2\left(\Omega\right)$ şi $g_0,\ u\left(t\right),v\in H_0^1\left(\Omega\right)$, fără nici o cerinţă de netezime pentru Ω.

Vom căuta soluţia lui (4.7) sub forma

$$u\left(t\right) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k\left(t\right)\phi_k \tag{4.8}$$

unde ϕ_k sunt funcţiile proprii ale problemei Dirichlet considerate în Secţiunea 3.11, iar u_k sunt funcţii reale ce urmează a fi determinate. Inlocuind formal în (4.7) obţinem

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty}\left\{u_k'\left(t\right)\left(\phi_k,v\right)_{L^2(\Omega)} + u_k\left(t\right)\left(\phi_k,v\right)_{H_0^1(\Omega)}\right\} &= \left(f\left(t\right),v\right)_{L^2(\Omega)} \\ \sum_{k=1}^{\infty} u_k\left(0\right)\phi_k &= g_0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Dar $\left(\phi_k,v\right)_{H_0^1(\Omega)} = \lambda_k\left(\phi_k,v\right)_{L^2(\Omega)}$. Rezultă că prima egalitate se poate scrie ca

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(u_k'\left(t\right)+\lambda_k u_k\left(t\right)\right)\left(\phi_k,v\right)_{L^2(\Omega)} = \left(f\left(t\right),v\right)_{L^2(\Omega)}.$$

De aici deducem

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(u_k'\left(t\right)+\lambda_k u_k\left(t\right)\right)\phi_k = f\left(t\right)$$

şi mai apoi

$$u_k'\left(t\right)+\lambda_k u_k\left(t\right) = f_k\left(t\right),$$

unde $f_k(t)$ este coeficientul Fourier al lui $f(t)$ în raport cu ϕ_k, adică

$$f_k(t) = (f(t), \phi_k)_{L^2(\Omega)}.$$

Pe de altă parte, din cea de a doua egalitate a lui (4.9) se obţine că $u_k(0) = g_0^k$, g_0^k fiind coeficientul Fourier $(g_0, \phi_k)_{L^2(\Omega)}$. Aşadar, funcţia u_k este soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases} u_k'(t) + \lambda_k u_k(t) = f_k(t), & t \in [0, T] \\ u_k(0) = g_0^k. \end{cases}$$

Soluţia acestei probleme este

$$u_k(t) = e^{-\lambda_k t} g_0^k + \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} f_k(s)\, ds, \quad t \in [0, T]. \tag{4.10}$$

Spunem că soluţia problemei Cauchy–Dirichlet (4.1) este determinată de formulele (4.8) şi (4.10). Totuşi, se impune ca formalismul de mai sus să fie completat printr-o analiză a rezultatului obţinut. Această analiză trebuie să ofere răspunsuri la următoarele întrebări:

1) Este seria (4.8) convergentă pentru orice t fixat? In ce spaţiu are loc convergenţa?

2) Care sunt proprietăţile funcţiei u definite de (4.8)?

3) In ce sens este funcţia u definită prin (4.8), soluţie a problemei Cauchy–Dirichlet?

Teorema 4.2 *Pentru orice $g_0 \in H_0^1(\Omega)$ şi $f \in C\left([0, T]; L^2(\Omega)\right)$, formulele (4.8) şi (4.10) definesc o funcţie $u \in C\left([0, T]; H_0^1(\Omega)\right)$. Mai mult, dacă $T < \infty$, avem*

$$|u|^2_{C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)} \le 2\,|g_0|^2_{H_0^1(\Omega)} + T\,|f|^2_{C([0,T];L^2(\Omega))}. \tag{4.11}$$

Demonstraţie. Presupunem $T < \infty$. Pentru cazul $T = \infty$, se aplică acelaşi raţionament oricărui subinterval $[0, T']$ al lui $[0, \infty)$.

a) Demonstrăm că $u \in C([0, T]; H_0^1(\Omega))$. Ne amintim că sistemul de funcţii $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\phi_k\right)$ este ortonormat şi complet în $H_0^1(\Omega)$. Conform relaţiei (4.8),

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\, \phi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\, u_k(t)\, \frac{\phi_k}{\sqrt{\lambda_k}}.$$

Notăm $v_k(t) = \sqrt{\lambda_k}\, u_k(t)$ şi $\psi_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\,\phi_k \in H_0^1(\Omega)$. Aşadar

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)\,\psi_k. \tag{4.12}$$

Este deci suficient ca seria (4.12) să fie uniform convergentă. Dar,

$$\left|\sum_{k=m+1}^{m+p} v_k(t)\,\psi_k\right|_{H_0^1}^2 = \sum_{k=m+1}^{m+p} v_k^2(t).$$

Problema se reduce astfel la convergenţa uniformă pe $[0,T]$ a seriei $\sum_{k=1}^{\infty} v_k^2(t)$. Folosind inegalitatea $(a+b)^2 \le 2\left(a^2+b^2\right)$ găsim

$$\begin{aligned} v_k^2(t) &= \lambda_k u_k^2(t) \qquad\qquad (4.13)\\ &\le 2\lambda_k\left[e^{-2\lambda_k t}\left(g_0^k\right)^2 + \left(\int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} f_k(s)\,ds\right)^2\right]\\ &\le 2\lambda_k\left[e^{-2\lambda_k t}\left(g_0^k\right)^2 + \int_0^t e^{-2\lambda_k(t-s)}ds \int_0^t (f_k(s))^2\,ds\right]\\ &\le 2\lambda_k\left(g_0^k\right)^2 + \int_0^T (f_k(s))^2\,ds. \end{aligned}$$

Problema se reduce astfel la a demonstra convergenţa seriilor numerice

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\left(g_0^k\right)^2 \quad \text{şi} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T (f_k(s))^2\,ds.$$

Cum

$$g_0^k = (g_0,\phi_k)_{L^2} = \frac{1}{\lambda_k}(g_0,\phi_k)_{H_0^1} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}(g_0,\psi_k)_{H_0^1},$$

pe baza egalităţii lui Parseval, prima serie este convergentă la $|g_0|_{H_0^1}^2$. De asemenea

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f_k(s))^2 = |f(s)|_{L^2}^2, \quad 0 \le s \le T,$$

convergenţa fiind uniformă fiindcă $f \in C\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$, după cum rezultă din teorema lui Dini (vezi, de exemplu, V. Smirnov, *Cours* *de mathématiques supérieures,* Mir, Moscou, 1975, Tome IV, p. 111). Rezultă că seria poate fi integrată termen cu termen şi deci

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T (f_k(s))^2\,ds = \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty}(f_k(s))^2\,ds = \int_0^T |f(s)|_{L^2}^2\,ds.$$

Inegalitatea (4.9) rezultă din estimările care urmează:

$$\begin{aligned}
|u(t)|_{H_0^1}^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} v_k^2(t) \le \sum_{k=1}^{\infty}\left(2\lambda_k\left(g_0^k\right)^2 + \int_0^T (f_k(s))^2\,ds\right) \\
&= 2\,|g_0|_{H_0^1}^2 + \int_0^T |f(s)|_{L^2}^2\,ds \\
&\le 2\,|g_0|_{H_0^1}^2 + T\,|f|_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 .
\end{aligned}$$

■

Teorema care urmează răspunde la cerinţa ca $u \in C^1\left([0,T]\,;L^2(\Omega)\right)$, condiţie naturală dacă avem în vedere (4.7).

Teorema 4.3 *Fie* $g_0 \in (-\Delta)^{-1}\left(L^2(\Omega)\right)$. *Dacă* $f \in C\left([0,T]\,;H_0^1(\Omega)\right)$ *sau* $f \in C^1\left([0,T]\,;L^2(\Omega)\right)$, *atunci formulele* (4.8) *şi* (4.10) *definesc o funcţie* $u \in C\left([0,T]\,;H_0^1(\Omega)\right)\cap C^1\left([0,T]\,;L^2(\Omega)\right)$, *soluţie a problemei* (4.7). *In plus, soluţia problemei* (4.7) *este unică în* $C\left([0,T]\,;H_0^1(\Omega)\right)\cap C^1\left([0,T]\,;L^2(\Omega)\right)$.

Demonstraţie. Presupunem că $T<\infty$. Avem de demonstrat că $u \in C^1\left([0,T]\,;L^2(\Omega)\right)$. Pentru aceasta este suficient să arătăm că seria derivată $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(t)\,\phi_k$ este uniform convergentă pe $[0,T]$. Aceasta revine la uniform convergenţa seriei $\sum_{k=1}^{\infty}\left(u_k'(t)\right)^2$.

Incepem prin a observa că dacă $g_0 \in (-\Delta)^{-1}\left(L^2(\Omega)\right)$, atunci există o funcţie $h \in L^2(\Omega)$ cu

$$(g_0, w)_{H_0^1} = (h, w)_{L^2}, \quad w \in H_0^1(\Omega).$$

Folosind aceasta şi definiţia valorilor şi funcţiilor proprii, găsim

$$\lambda_k g_0^k = \lambda_k\,(g_0,\phi_k)_{L^2} = (g_0,\phi_k)_{H_0^1} = (h,\phi_k)_{L^2}.$$

Aceasta ne permite să reprezentăm funcţia $u_k(t)$ după cum urmează:

$$\begin{aligned} u_k(t) &= e^{-\lambda_k t} g_0^k + \int_0^t e^{-\lambda_k (t-s)} f_k(s)\, ds \\ &= g_0^k + \int_0^t e^{-\lambda_k (t-s)} \left(f_k(s) - \lambda_k g_0^k \right) ds \\ &= g_0^k + \int_0^t e^{-\lambda_k (t-s)} f_k^h(s)\, ds, \end{aligned}$$

unde

$$f^h(t) = f(t) - h, \quad \text{iar} \quad f_k^h(t) = \left(f^h(t), \phi_k \right)_{L^2}.$$

Atunci

$$u_k'(t) = f_k^h(t) - \lambda_k \int_0^t e^{-\lambda_k (t-s)} f_k^h(s)\, ds.$$

(a) Presupunem că $f \in C\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right)$ şi $g_0 \in (-\Delta)^{-1}\left(H_0^1(\Omega)\right)$. Atunci $f^h \in C\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right)$. Avem

$$\begin{aligned} \left(u_k'(t)\right)^2 &= \left(f_k^h(t) - \lambda_k \int_0^t e^{-\lambda_k (t-s)} f_k^h(s)\, ds \right)^2 \qquad (4.14) \\ &\leq 2\left(\left(f_k^h(t)\right)^2 + \lambda_k^2 \int_0^t e^{-2\lambda_k (t-s)} ds \int_0^t \left(f_k^h(s)\right)^2 ds \right) \\ &\leq 2\left(f_k^h(t)\right)^2 + \lambda_k \int_0^T \left(f_k^h(s)\right)^2 ds. \end{aligned}$$

Astfel problema convergenţei în $L^2(\Omega)$, uniforme pe $[0,T]$ a seriei $\sum_{k=1}^{\infty} \left(u_k'(t)\right)^2$ s-a redus la convergenţa uniformă a seriei $\sum_{k=1}^{\infty} \left(f_k^h(t)\right)^2$ şi la convergenţa seriei numerice $\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \lambda_k \left(f_k^h(s)\right)^2 ds$. Prima are ca sumă pe $\left|f^h(t)\right|_{L^2}^2$, iar convergenţa este uniformă pe $[0,T]$ fiindcă $f^h \in C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right)$. Convergenţa celei de a doua serii rezultă din convergenţa

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(f_k^h(s)\right)^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(f^h(s), \phi_k\right)_{L^2}^2 \qquad (4.15) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(f^h(s), \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \phi_k \right)_{H_0^1}^2 \\ &= \left| f^h(s) \right|_{H_0^1}^2, \end{aligned}$$

uniformă pe $[0,T]$ fiindcă $f^h \in C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right).$

(b) Presupunem că $f \in C^1\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$ şi $g_0 \in (-\Delta)^{-1}\left(L^2(\Omega)\right).$ Cu schimbarea de variabilă $t-s=\tau$, avem

$$u_k(t) = g_0^k + \int_0^t e^{-\lambda_k \tau} f_k^h(t-\tau)\,d\tau,$$

de unde, ţinând seamă de faptul că $f^h \in C^1\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$ implică $f_k^h \in C^1[0,T]$, obţinem

$$\begin{aligned} u_k'(t) &= e^{-\lambda_k t} f_k^h(0) + \int_0^t e^{-\lambda_k \tau}\left(f_k^h\right)'(t-\tau)\,d\tau \\ &= e^{-\lambda_k t} f_k^h(0) + \int_0^t e^{-\lambda_k (t-s)}\left(f_k^h\right)'(s)\,ds. \end{aligned}$$

Atunci

$$\begin{aligned} u_k'(t)^2 &\le 2\left(\left(f_k^h(0)\right)^2 + \int_0^t e^{-2\lambda_k(t-s)}ds \int_0^t \left[\left(f_k^h\right)'(s)\right]^2 ds\right) \qquad (4.16) \\ &\le 2\left(f_k^h(0)\right)^2 + \frac{1}{\lambda_k}\int_0^t \left[\left(f_k^h\right)'(s)\right]^2 ds \\ &\le 2\left(f_k^h(0)\right)^2 + \frac{1}{\lambda_1}\int_0^T \left[\left(f_k^h\right)'(s)\right]^2 ds. \end{aligned}$$

Deci, convergenţa uniformă pe $[0,T]$ rezultă din convergenţa seriilor numerice

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(f_k^h(0)\right)^2 \quad \text{şi} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T \left[\left(f_k^h\right)'(s)\right]^2 ds.$$

Prima serie are ca sumă $\left|f^h(0)\right|_{L^2}^2$, iar convergenţa celei de a doua rezultă din convergenţa

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(f_k^h\right)'(s)\right]^2 = \left|\left(f^h\right)'(s)\right|_{L^2}^2,$$

uniformă pe $[0,T]$ fiindcă $f^h \in C^1\left([0,T];L^2(\Omega)\right).$

(c) Cazul $f \in C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)$ şi $g_0 \in (-\Delta)^{-1}\left(L^2(\Omega)\right)$ se reduce la cazurile (a) şi (b) dacă se reprezintă u sub forma $v+w$, unde v şi w sunt soluţiile problemei (4.7) corespunzătoare datelor $[f,0]$, respectiv $[0,g_0]$. ■

Rezultatele obţinute justifică definiţia:

Definiţia 4.1 Numim *soluţie slabă* a problemei Cauchy–Dirichlet (4.1), o funcţie $u \in C\left([0,T]\,;H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T]\,;L^2(\Omega)\right)$ care satisface (4.7).

Teorema 4.4 *Fie* $g_0 \in (-\Delta)^{-1}\left(L^2(\Omega)\right)$. *Dacă* $f \in C\left([0,T]\,;H_0^1(\Omega)\right)$ *sau* $f \in C^1\left([0,T]\,;L^2(\Omega)\right)$, *atunci problema Cauchy–Dirichlet* (4.1) *are o soluţie slabă unică.*

Demonstraţie. Existenţa a fost deja stabilită prin Teorema 4.3. Pentru unicitate, să presupunem că u_1 şi u_2 sunt două soluţii slabe ale problemei. Atunci funcţia $u = u_1 - u_2 \in C\left([0,T]\,;H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T]\,;L^2(\Omega)\right)$ şi pentru orice $v \in H_0^1(\Omega)$ satisface

$$\begin{cases} (u'(t)\,,v)_{L^2} + (u(t)\,,v)_{H_0^1} = 0, & t \in [0,T] \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

Alegând $v = u(t)$ şi folosind (4.5), obţinem

$$0 = \left(u'(t)\,,u(t)\right)_{L^2} + |u(t)|_{H_0^1}^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,|u(t)|_{L^2}^2 + |u(t)|_{H_0^1}^2\,, \quad t \in [0,T].$$

Rezultă că $\frac{d}{dt}\,|u(t)|_{L^2}^2 \leq 0$ pentru $t \in [0,T]$. Deci funcţia $t \longmapsto |u(t)|_{L^2}^2$ este descrescătoare pe $[0,T]$. Această funcţie este continuă pe $[0,T]$ fiindcă $u \in C([0,T];L^2(\Omega))$ şi se anulează pentru $t = 0$ căci $u(0) \equiv 0$. Rezultă că ea este identic nulă pe $[0,T]$. Aşadar, $u(t) = 0$ pentru $t \in [0,T]$, adică $u_1 = u_2$. ■

Regularitatea soluţiei slabe va fi studiată în Partea II.

Definiţia 4.2 Pentru $g_0 \in H_0^1(\Omega)$ şi $f \in C\left([0,T]\,;L^2(\Omega)\right)$, vom spune că funcţie $u \in C\left([0,T]\,;H_0^1(\Omega)\right)$ definită prin formulele (4.8) şi (4.10) este o *pre-soluţie* a problemei Cauchy-Dirichlet.

Condiţia la limită Dirichlet poate fi înlocuită cu alte condiţii la limită; de exemplu, se poate considera condiţia Neumann $\partial u/\partial \nu = 0$ pe Σ, obţinându-se astfel problema mixtă Cauchy-Neumann pentru ecuaţia căldurii, pentru care se poate dezvolta o teorie asemănătoare.

4.4 Problema Cauchy-Dirichlet pentru ecuaţia undelor

Ideile din secţiunea anterioară pot fi folosite şi pentru rezolvarea în sens generalizat a problemei mixte Cauchy–Dirichlet pentru ecuaţia undelor:

$$\begin{cases} Lu := \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{pe } Q \\ u(x,0) = g_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g_1(x) & \text{pe } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \Sigma. \end{cases} \tag{4.17}$$

Din punct de vedere fizic, problema (4.17) modelează micile vibraţii ale coardei (membranei) elastice; conform condiţiei la limită, capetele coardei (conturul membranei) sunt fixate; în fine, condiţiile Cauchy descriu starea iniţială a sistemului: g_0 reprezintă configuraţia iniţială, iar g_1 exprimă vitezele iniţiale.

Prin *soluţie clasică* vom înţelege orice funcţie $u \in C^2(\overline{Q})$ care satisface punctual cele patru egalităţi.

Definiţia 4.3 Fie $f \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, $g_0 \in H_0^1(\Omega)$ şi $g_1 \in L^2(\Omega)$. Numim *soluţie slabă* a problemei (4.17), o funcţie $u \in C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)$ $\cap C^1\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$ astfel încât pentru orice $v \in H_0^1(\Omega)$, aplicaţia $t \in [0,T] \longmapsto (u'(t),v)_{L^2}$ este absolut continuă şi satisface

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u'(t),v)_{L^2} + (u(t),v)_{H_0^1} = (f(t),v)_{L^2} & \text{a.p.t. pe } [0,T] \\ u(0) = g_0, \quad u'(0) = g_1. \end{cases} \tag{4.18}$$

Se constată că soluţia clasică este (presupunând că Ω este de clasă C^1) şi soluţie slabă. Are loc următorul rezultat de tipul celui stabilit pentru ecuaţia căldurii.

Teorema 4.5 (existenţă, unicitate, reprezentare) *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi mărginită şi $0 < T \leq \infty$. Fie de asemenea $f \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ $= L^2(Q)$, $g_0 \in H_0^1(\Omega)$ şi $g_1 \in L^2(\Omega)$. Atunci problema Cauchy–Dirichlet pentru ecuaţia undelor* (4.17) *admite o soluţie slabă unică. In plus are loc reprezentarea*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\,\phi_k \tag{4.19}$$

unde

$$\begin{aligned} u_k(t) &= g_0^k \cos\sqrt{\lambda_k}\, t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} g_1^k \sin\sqrt{\lambda_k}\, t \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t f_k(s) \sin\sqrt{\lambda_k}(t-s)\, ds, \end{aligned} \tag{4.20}$$

$(\lambda_k)_{k\geq 1}$ *şi* $(\phi_k)_{k\geq 1}$ *sunt valorile şi funcţiile proprii ale problemei Dirichlet pentru operatorul* $-\Delta$ $(|\phi_k|_{L^2(\Omega)} = 1)$, *iar*

$$g_0^k = (g_0, \phi_k)_{L^2(\Omega)}, \; g_1^k = (g_1, \phi_k)_{L^2(\Omega)}, \; f_k(t) = (f(t), \phi_k)_{L^2(\Omega)}.$$

Demonstraţie. *Existenţa.* Folosim metoda Fourier căutând soluţia sub forma (4.19). Inlocuind formal în ecuaţiile (4.18), obţinem următoarele condiţii asupra coeficienţilor $u_k(t)$

$$\begin{cases} u_k''(t) + \lambda_k u_k(t) = f_k(t), & t \in [0,T] \\ u_k(0) = g_0^k, \quad u_k'(0) = g_1^k. \end{cases} \tag{4.21}$$

Soluţia acestei probleme Cauchy este dată de formula (4.20). In continuare demonstrăm că seria (4.19) astfel obţinută defineşte într-adevăr o funcţie $u \in C\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T]; L^2(\Omega)\right)$, soluţia slabă a problemei.

a) Demonstrăm că $u \in C\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right)$. Pentru aceasta este suficient să arătăm că seria (4.19) este uniform convergentă pe $[0,T]$, dacă $T < \infty$ şi pe orice subinterval compact $[0,T']$ al lui $[0,\infty)$, dacă $T = \infty$. Presupunem $T < \infty$. Cum

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\,\phi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\, u_k(t) \frac{\phi_k}{\sqrt{\lambda_k}}$$

iar sistemul $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\phi_k\right)$ este ortonormat şi complet în $H_0^1(\Omega)$, avem de demonstrat uniform convergenţa seriei $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k^2(t)$. Din (4.20), avem

$$\begin{aligned} & u_k^2(t) \\ \leq\; & 3\left(\left(g_0^k\right)^2 + \frac{1}{\lambda_k}\left(g_1^k\right)^2 + \frac{1}{\lambda_k}\left(\int_0^t f_k(s)\sin\sqrt{\lambda_k}(t-s)\,ds\right)^2\right) \\ \leq\; & 3\left(\left(g_0^k\right)^2 + \frac{1}{\lambda_k}\left(g_1^k\right)^2 + \frac{t}{\lambda_k}\int_0^t f_k^2(s)\,ds\right). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Problema se reduce astfel la convergenţa seriilor numerice

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(g_0^k\right)^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(g_1^k\right)^2 \quad \text{şi} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T f_k^2(s)\, ds.$$

Prima serie converge la $|g_0|_{H_0^1}^2$ (a se vedea demonstaţia Teoremei 4.2), a doua serie converge la $|g_1|_{L^2}^2$, iar a treia serie converge la $\int_0^T |f(s)|_{L^2}^2 \, ds$.

b) Demonstrăm că $u \in C^1\left([0,T]; L^2(\Omega)\right)$. Pentru aceasta se va dovedi uniform convergenţa seriei derivate $\sum_{k=1}^{\infty} u_k'(t)\, \phi_k$, sau în mod echivalent, uniform convergenţa seriei $\sum_{k=1}^{\infty} \left(u_k'(t)\right)^2$. Avem

$$u_k'(t) = -\sqrt{\lambda_k} g_0^k \sin \sqrt{\lambda_k} t + g_1^k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \int_0^t f_k(s) \cos \sqrt{\lambda_k}(t-s)\, ds$$

de unde

$$\left(u_k'(t)\right)^2 \leq 3 \left(\lambda_k \left(g_0^k\right)^2 + \left(g_1^k\right)^2 + t \int_0^t f_k^2(s)\, ds\right). \tag{4.23}$$

Concluzia urmează acum pe baza argumentelor deja expuse.

c) Demonstrăm că pentru orice $v \in H_0^1(\Omega)$, funcţia $(u'(t), v)_{L^2}$ este absolut continuă pe intervalul $[0,T]$ şi satisface (4.18). Aceasta rezultă din proprietatea similară pe care o are funcţia $u_k'(t)$. Intr-adevăr, din $u_k'' + \lambda_k u_k = f_k$, rezultă

$$u_k'(t) = u_k'(0) + \int_0^t \left[f_k(\tau) - \lambda_k u_k(\tau)\right] d\tau.$$

De aici, mai departe, obţinem

$$\begin{aligned} & \left(u_k'(t)\, \phi_k, v\right)_{L^2} \\ = \; & \left(u_k'(0)\, \phi_k, v\right)_{L^2} + \int_0^t \left[\left(f_k(\tau)\, \phi_k, v\right)_{L^2} - \lambda_k \left(u_k(\tau)\, \phi_k, v\right)_{L^2}\right] d\tau \\ = \; & \left(u_k'(0)\, \phi_k, v\right)_{L^2} + \int_0^t \left[\left(f_k(\tau)\, \phi_k, v\right)_{L^2} - \left(u_k(\tau)\, \phi_k, v\right)_{H_0^1}\right] d\tau. \end{aligned}$$

Dacă notăm cu $s_m(t)$ şi $S_m(t)$ sumele parţiale de ordinul m ale seriilor $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\, \phi_k$ şi $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\, \phi_k$, atunci prin însumare obţinem

$$\left(S_m'(t), v\right)_{L^2} = \left(S_m'(0), v\right)_{L^2} + \int_0^t \left[\left(s_m(\tau), v\right)_{L^2} - \left(S_m(\tau), v\right)_{H_0^1}\right] d\tau. \tag{4.24}$$

Din $S_m(\tau) \to u(\tau)$ în $H_0^1(\Omega)$, uniform în $\tau \in [0,T]$, rezultă că

$$\int_0^t (S_m(\tau), v)_{H_0^1} \, d\tau \to \int_0^t (u(\tau), v)_{H_0^1} \, d\tau.$$

De asemenea, din $S_m'(t) \to u'(t)$ în $L^2(\Omega)$, rezultă că $(S_m'(t), v)_{L^2} \to (u'(t), v)_{L^2}$ pentru orice $t \in [0,T]$. In fine, din $s_m(\tau) - f(\tau) \to 0$ in $L^2(\Omega)$, pentru orice $\tau \in [0,T]$, rezultă că $(s_m(\tau) - f(\tau), v)_{L^2} \to 0$ punctual; însă, folosind inegalitatea lui Bessel, avem

$$|(s_m(\tau) - f(\tau), v)_{L^2}| \leq |s_m(\tau) - f(\tau)|_{L^2} |v|_{L^2} \leq |f(\tau)|_{L^2} |v|_{L^2}$$

unde funcţia $\tau \in [0,T] \longmapsto |f(\tau)|_{L^2}$ aparţine spaţiului $L^1(0,T)$, după cum se constată uşor folosind ipoteza $f \in L^2\left(0,T; L^2(\Omega)\right)$. Teorema convergenţei dominate a lui Lebesgue implică acum că

$(s_m(\tau) - f(\tau), v)_{L^2} \to 0$ în $L^1(0,T)$. In consecinţă

$$\int_0^t (s_m(\tau), v)_{L^2} \, d\tau \to \int_0^t (f(\tau), v)_{L^2} \, d\tau.$$

Trecând la limită în (4.24), obţinem

$$\left(u'(t), v\right)_{L^2} = \left(u'(0), v\right)_{L^2} + \int_0^t \left[(f(\tau), v)_{L^2} - (u(\tau), v)_{H_0^1}\right] d\tau,$$

formulă care arată că funcţia $(u'(t), v)_{L^2}$ este absolut continuă pe $[0,T]$ şi care, prin derivare, conduce la relaţia (4.18).

Unicitatea. Din (4.22) şi (4.23) se deduc inegalităţile

$$\begin{aligned} |u(t)|_{H_0^1}^2 &\leq 3\left(|g_0|_{H_0^1}^2 + |g_1|_{L^2}^2 + t\int_0^t |f(s)|_{L^2}^2 \, ds\right) \qquad (4.25) \\ \left|u'(t)\right|_{L^2}^2 &\leq 3\left(|g_0|_{H_0^1}^2 + |g_1|_{L^2}^2 + t\int_0^t |f(s)|_{L^2}^2 \, ds\right). \end{aligned}$$

Dacă u_1, u_2 sunt două soluţii, atunci funcţia u este soluţia problemei pentru $g_0 = 0$, $g_1 = 0$ şi $f = 0$. Prima inegalitate de mai sus implică atunci că $u(t) = 0$ pentru orice $t \in [0,T]$, deci $u_1 = u_2$. ∎

4.5 Probleme

Principiul de maxim pentru ecuaţia căldurii

1) Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi mărginită şi $0 < T < \infty$. Fie $u \in C(\overline{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$ o soluţie a ecuaţiei căldurii $Lu = 0$. Dacă $m = \inf\limits_B u$ şi $M = \sup\limits_B u$, atunci $m \leq u(x,t) \leq M$ pentru orice $(x,t) \in \overline{Q}$.

Indicaţie. Se aplică Teorema 4.1 funcţiilor $v = m - u$ şi $w = u - M$.

2) Suprafaţa unui corp sferic omogen de rază R este menţinută la temperatura zero. La momentul iniţial temperatura în fiecare punct x al corpului este $|x|^\alpha (R - |x|)$, unde $\alpha \geq 1$. Să se determine o margine superioară a temperaturii corpului sferic la orice moment ulterior.

Indicaţie. $M = \max\limits_{0 \leq r \leq R} r^\alpha (R - r)$.

3) Dacă u şi $\widehat{u}$ sunt soluţiile clasice ale problemei mixte (4.1) corespunzătoare datelor $g_0 \in C(\overline{\Omega})$, $f \in L^\infty(Q)$, respectiv $\widehat{g}_0 \in C(\overline{\Omega})$, $\widehat{f} \in L^\infty(Q)$, atunci

$$|u - \widehat{u}|_{L^\infty(Q)} \leq |g_0 - \widehat{g}_0|_{C(\overline{\Omega})} + c\left|f - \widehat{f}\right|_{L^\infty(Q)}.$$

Indicaţie. Se aplică Teorema 4.2 funcţiei $v = u - \widehat{u}$.

4) Dacă $u \in C^{2,1}\left(\overline{Q}\right)$ este soluţie a problemei (4.1), unde $T = \infty$, atunci pentru orice $T' < \infty$, avem

$$|u(x,t)| \leq |g_0|_{C(\overline{\Omega})} + t\,|f|_{C(\overline{Q}_{T'})}, \quad (x,t) \in \overline{Q}_{T'}.$$

Indicaţie. Se aplică Teorema 4.2 cilindrului $Q_{T'}$ şi funcţiilor $\pm\, u - |g_0|_{C(\overline{\Omega})} - t\,|f|_{C(\overline{Q}_{T'})}$. Se va compara această estimare cu estimarea a priori globală (4.3) valabilă numai dacă f este mărginit pe $\overline{\Omega} \times [0,\infty)$.

Ca şi în cazul eliptic, principiul de maxim reprezintă un instrument puternic de analiză calitativă a soluţiilor problemelor la limită liniare sau neliniare. Următoarele exemple vin să ilustreze acest fapt.

5)* Fie $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < 1\}$ şi $h \in C[0,\infty)$. Considerăm problema Cauchy–Dirichlet

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = h(t)\left(u - \frac{|x|^2}{2n}\right) - 1 & \text{pe } \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,t) = \frac{1}{2n} & \text{pe } (\partial\Omega \times [0,\infty)) \cup (\Omega \times \{0\}). \end{cases}$$

Să se arate că problema are cel mult o soluţie clasică şi că soluţia satisface inegalităţile

$$0 \le u(x,t) \le \frac{1}{2n} e^{\int_0^t h(s)ds} + \frac{|x|^2}{2n}.$$

Indicaţie. Se consideră funcţia $v = \left(u - |x|^2/(2n)\right) e^{-H(t)}$ unde $H(t) = \int_0^t h(s)\,ds$. Se constată că $Lv = 0$ pe $Q = \Omega \times (0,\infty)$, $\min\limits_B v = 0$ şi $\max\limits_B v = 1/(2n)$.

6)* Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi mărginită, $Q = \Omega \times (0,\infty)$, $h \in C(\overline{Q}) \cap L^\infty(Q)$ şi $\alpha \in (0,1)$. Să se demonstreze că oricare ar fi $u \in C(\overline{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$ o soluţie nenegativă şi mărginită pe B a ecuaţiei neliniare (cu neliniaritate subliniară)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = h(x,t)\,u^\alpha \quad \text{pe } Q,$$

avem

$$|u|_{L^\infty(Q)} \le \frac{1}{1-\alpha} \sup_B u + \left(c\,|h|_{L^\infty(Q)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

unde c este o constantă care depinde numai de Ω (mărginirea pe B implică mărginitea pe Q).

Rezolvare. Fie $\delta > 0$ astfel încât $|x_1| \le \delta$ pentru orice $x \in \Omega$. Pentru orice $T > 0$ finit, se consideră funcţia

$$v = u - \sup_B u - \left(e^{2\delta} - e^{x_1+\delta}\right) |hu^\alpha|_{C(\overline{Q}_T)}$$

unde $Q_T = \Omega \times (0,T)$. Aplicând Teorema 4.2, obţinem $v \le 0$ pe $\overline{Q}_T$. Rezultă

$$u(x,t) \le \sup_B u + c\,|hu^\alpha|_{C(\overline{Q}_T)}, \quad (x,t) \in Q_T.$$

Inegalitatea lui Young implică $|ch|\,u^\alpha \le \alpha u + (1-\alpha)\,|ch|^{\frac{1}{1-\alpha}}$, de unde

$$u(x,t) \le \sup_B u + \alpha\,|u|_{C(\overline{Q}_T)} + (1-\alpha)\left(c\,|h|_{L^\infty(Q)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (x,t) \in Q_T.$$

Deci

$$u(x,t) \le \frac{1}{1-\alpha} \sup_B u + \left(c\,|h|_{L^\infty(Q)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (x,t) \in Q_T.$$

Cum $T < \infty$ a fost ales arbitrar, inegalitatea se extinde la întregul Q.

7) Să se arate că orice soluţie $u \in C(\overline{Q}) \cap C^{2,1}(Q)$, mărginită pe B, a ecuaţiei

$$Lu := \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = au \quad \text{pe } Q = \Omega \times (0, \infty),$$

unde $a > 0$, satisface inegalitatea $|u(x,t)| \le e^{at} \sup_B |u|$ pentru orice $(x,t) \in Q$.

O majorantă independentă de t nu este posibilă, după cum arată exemplul: $u_t - u_{xx} = 2u$, pentru $0 < x < \pi$, pentru care funcţia $u = e^t \sin x$ este o soluţie.

Indicaţie. Fie $v = e^{-at}u$. Se constată că $Lv = 0$ şi se aplică rezultatul de la Problema 1.

Probleme mixte pentru ecuaţia căldurii

8) Să se rezolve problema

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x,t), & 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u(x,0) = g_0(x), & 0 < x < \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t > 0 \end{cases}$$

în următoarele cazuri: a) $f = 0$, $g_0 = A \sin 3x$ b) $f = 0$, $g_0 = x(\pi - x)$ c) $f = t \sin x$, $g_0 = 0$ d) $f = \sin 2x$, $g_0 = \sin^3 x$.

Indicaţie. Se aplică Teorema 4.3.

9) Distribuţia iniţială a temperaturii unei bare omogene de lungime l este $g_0(x)$, densitatea surselor interne de căldură este $f(x,t)$, iar suprafaţa laterală a barei este termoizolată. Să se determine distribuţia temperaturii la momentul t, în următoarele cazuri:

a) Capetele barei sunt menţinute la temperatura zero; aplicaţie: $f = 0$, $g_0(x) = A \sin(\pi x / l)$;

b) Temperaturile la capetele barei sunt $\alpha_1(t)$ şi $\alpha_2(t)$; aplicaţie: $f = 0$, $g_0(x) = Bx/l$, $\alpha_1(t) = At$, $\alpha_2(t) = B$;

c) Capetele barei schimbă căldură cu mediul ambiant aflat la temperatura constantă u_0; aplicaţie: $f = 0$, $g_0 = A$ (constant), $u_0 = 0$.

Indicaţie. a), b) Problema se reduce la a rezolva

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = f, & 0 < x < l,\ t > 0 \\ u(x,0) = g_0, & 0 < x < l \\ u(0,t) = \alpha_1(t), \ u(l,t) = \alpha_2(t), & t > 0. \end{cases}$$

La punctul a) $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. La punctul b), soluţia se caută sub forma $u = v + w$, unde $w = \alpha_1(t) + (\alpha_2(t) - \alpha_1(t))\, x/l$. Funcţia v va fi soluţie a unei probleme de acelaşi tip cu condiţii nule pe frontieră, care se va rezolva cu metoda Fourier.

c) Schimbul de căldură cu mediul la capetele barei, se exprimă prin condiţiile la frontieră

$$\begin{aligned} u_x(0,t) - h_1 [u(0,t) - u_0] &= 0 \\ u_x(l,t) + h_2 [u(l,t) - u_0] &= 0 \end{aligned} \tag{4.26}$$

unde h_1, h_2 sunt constante pozitive ce depind de proprietăţile celor două medii. Cazul $h_1 = h_2 = 0$ corespunde situaţiei când capetele barei sunt termoizolate. Soluţia se caută sub forma $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$, unde w este soluţia ecuaţiei $w'' = 0$ care satisface condiţiile (4.26).

10) Distribuţia iniţială a temperaturii pe o placă subţire pătrată $\Omega = (0,l) \times (0,l)$ este $g_0(x_1, x_2)$. Muchiile plăcii sunt menţinute la temperatura zero. Să se afle distribuţia temperaturii pe placă la momentul $t > 0$. Aplicaţie: $g_0 = A \sin \frac{\pi x_1}{l} \sin \frac{3\pi x_2}{l}$.

Indicaţie. Se aplică Teorema 4.3 şi se foloseşte Problema 3.37. Găsim

$$u(x,t) = \sum_{j,k=1}^{\infty} a_{jk}\, e^{-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 (j^2+k^2)t} \sin \frac{j\pi x_1}{l} \sin \frac{k\pi x_2}{l}$$

unde

$$a_{jk} = \frac{4}{l^2} \int_0^l \int_0^l g_0(x_1, x_2) \sin \frac{j\pi x_1}{l} \sin \frac{k\pi x_2}{l}.$$

11) Fie u soluţia slabă a problemei (4.1) pentru $T = \infty$ şi $f = 0$. Să se demonstreze următoarea comportare asimptotică: $u(t) \to 0$ în $H_0^1(\Omega)$, pentru $t \to \infty$.

Indicaţie. Cu notaţiile din demonstraţia Teoremei 4.2, conform formulei (4.13), avem

$$v_k^2(t) \leq 2\lambda_k e^{-2\lambda_k t} \left(g_0^k\right)^2.$$

Cum $te^{-t} \le e^{-1}$ pentru orice $t \ge 0$, avem că $2\lambda_k e^{-2\lambda_k t} \le (et)^{-1}$ pentru $t > 0$. Atunci

$$|u(t)|^2_{H_0^1} = \sum_{k=1}^{\infty} v_k^2(t) \le \frac{1}{et} |g_0|^2_{L^2}, \quad t > 0.$$

12) Fie u soluţia slabă a problemei mixte (4.1) pentru $T = \infty$ şi $f(t) \equiv f(0) = f_0 \in L^2(\Omega)$. Să se demonstreze că $u(t) \to v$ în $H_0^1(\Omega)$, pentru $t \to \infty$, unde v este soluţia slabă a problemei Dirichlet $-\Delta v = f_0$ pe Ω, $v = 0$ pe $\partial\Omega$ (Dacă densitatea surselor interne de căldură este constantă în timp, atunci, pentru t foarte mare, efectul distribuţiei iniţiale de temperatură este neglijabil iar regimul termic poate fi considerat staţionar).

Indicaţie. Funcţia $w = u - v$ este soluţia slabă a problemei mixte

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = 0 & \text{pe } Q \\ w(.,0) = g_0 - v & \text{pe } \Omega \\ w = 0 & \text{pe } \Sigma \end{cases}$$

Conform problemei anterioare, $w(t) = u(t) - v \to 0$ în $H_0^1(\Omega)$, pentru $t \to \infty$.

13) Să se demonstreze că soluţia slabă u a problemei (4.1) pentru $f = 0$, satisface *legea de conservare*

$$\frac{1}{2} |u(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \int_0^t |u(s)|^2_{H_0^1(\Omega)} ds = \frac{1}{2} |g_0|^2_{L^2(\Omega)}, \quad t \in [0, T].$$

Indicaţie. Se integrează de la 0 la t în egalitatea $(u'(s), u(s))_{L^2} + |u(s)|^2_{H_0^1} = 0$.

Probleme mixte pentru ecuaţia undelor

14) Să se rezolve problema (oscilaţiilor libere ale coardei elastice fixate la capete):

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \ t > 0 \\ u(x,0) = g_0(x), \ u_t(x,0) = g_1(x), \quad 0 < x < l \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad t > 0 \end{cases}$$

în următoarele cazuri: a) $g_0 = A \sin(\pi x / l)$ (configuraţia iniţială a coardei), $g_1 = 0$ (vitezele iniţiale) b) $g_0 = x(l - x)$, $g_1 = 0$ c) $g_0 = 0$, $g_1 = A$.

Indicaţie. Se aplică metoda Fourier prezentată în demonstraţia Teoremei 4.5. Se obţine

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi at}{l}+b_k\sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

unde

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l g_0(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\quad b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l g_1(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

15) Să se rezolve problema (oscilaţiilor forţate ale coardei elastice fixate la capete):

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t), & 0<x<l,\ t>0\\ u(x,0)=g_0(x),\ u_t(x,0)=g_1(x), & 0<x<l\\ u(0,t)=u(l,t)=0, & t>0\end{cases}$$

dacă: a) $f=A\sin(\pi x/l)$, $g_0(x)=B\sin(2\pi x/l)$, $g_1=0$ b) $f=A$, $g_0=g_1=0$.

16) Să se rezolve problema oscilaţiilor libere ale unei membrane dreptunghiulare $(0,a)\times(0,b)$ fixate de-a lungul conturului. Aplicaţie: $u\,|_{t=0}=A\sin(\pi x_1/a)\sin(2\pi x_2/b)$, $u_t\,|_{t=0}=0$.

Indicaţie. Se rezolvă problema

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u=0, \quad 0<x_1<a,\ 0<x_2<b\\ u\,|_{t=0}=g_0(x),\ u_t\,|_{t=0}=g_1(x)\\ u\,|_{x_1=0}=u\,|_{x_1=a}=0,\ u\,|_{x_2=0}=u\,|_{x_2=b}=0.\end{cases}$$

17) Să se demonstreze că soluţia slabă a problemei (4.17) pentru $f=0$, satisface *legea de conservare* a energiei

$$\left|u'(t)\right|^2_{L^2(\Omega)}+|u(t)|^2_{H_0^1(\Omega)}=|g_1|^2_{L^2(\Omega)}+|g_0|^2_{H_0^1(\Omega)},\quad t\in[0,T].$$

Indicaţie. Din $u_k''(t)+\lambda_k u_k(t)=0$, rezultă că funcţia $(u_k'(t))^2+\lambda_k u_k^2(t)$ este constantă pe $[0,T]$. Deci

$$(u_k'(t))^2+\lambda_k u_k^2(t)=\left(g_1^k\right)^2+\lambda_k\left(g_0^k\right)^2,$$

de unde, prin însumare, se obţine egalitatea dorită.

Capitolul 5
Problema Cauchy pentru ecuaţii de evoluţie

In acest capitol vom considera ecuaţiile căldurii şi a undelor în întreg spaţiul $\mathbf{R}^n$ impunând doar condiţii iniţiale, la momentul $t = 0$. Rezolvarea problemelor Cauchy corespunzătoare ca şi analiza soluţiilor lor o vom face cu ajutorul transformării Fourier. Esenţa metodei constă în faptul că prin transformare Fourier, o ecuaţie cu derivate parţiale liniară cu coeficienţi constanţi se reduce la o ecuaţie diferenţială ordinară liniară cu coeficienţi constanţi, deci la o ecuaţie rezolvabilă explicit; prin transformarea Fourier inversă se obţine apoi soluţia explicită a ecuaţiei cu derivate parţiale. De altfel, metoda seriilor Fourier folosită în capitolul anterior se bazează şi ea pe această idee a trecerii la ecuaţii diferenţiale ordinare.

5.1 Transformarea Fourier

In această secţiune vom lucra mai general cu funcţii cu valori complexe. In consecinţă, toate spaţiile de funcţii vor fi presupuse spaţii liniare complexe.

1. Transformarea Fourier a funcţiilor din $L^1(\mathbf{R}^n)$

Definiţia 5.1 Fie $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$. *Transformata Fourier* a lui f este funcţia notată cu $T[f]$ şi definită prin

$$T[f](y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, e^{-ix \cdot y} dx, \quad y \in \mathbf{R}^n$$

unde $x \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$.

Funcţia $T[f]$ este continuă şi mărginită. Intr-adevăr, dacă $y_k \to y_0$ în $\mathbf{R}^n$, atunci funcţiile $f(x)\,e^{-ix\cdot y_k}$ converg în fiecare punct $x \in \mathbf{R}^n$ către $f(x)\,e^{-ix\cdot y_0}$ şi sunt majorate în modul de către funcţia integrabilă $|f(x)|$. Continuitatea în y_0 a funcţiei $T[f]$ rezultă acum pe baza teoremei convergenţei dominate a lui Lebesgue.

Pe de altă parte,

$$|T[f](y)| \le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|\,dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} |f|_{L^1} ,$$

de unde rezultă mărginirea lui $T[f]$ şi în plus faptul că transformarea Fourier defineşte un operator liniar şi continuu $T : L^1(\mathbf{R}^n) \to L^\infty(\mathbf{R}^n)$, cu

$$|T[f]|_{L^\infty} \le \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} |f|_{L^1} .$$

2. Transformarea Fourier şi convoluţia funcţiilor

Definiţia 5.2 *Produsul de convoluţie* $f * g$ al funcţiilor $f,\ g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$ este funcţia definită (atunci când există) prin

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy = \int_{\mathbf{R}^n} g(x-y)\,f(y)\,dy \quad (x \in \mathbf{R}^n).$$

Teorema de bază privind existenţa convoluţiei a două funcţii este următoarea.

Teorema 5.1 *Dacă* $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ *şi* $g \in L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1 \le p \le \infty)$, *atunci* $f * g \in L^p(\mathbf{R}^n)$ *şi*

$$|f*g|_{L^p} \le |f|_{L^1} |g|_{L^p} .$$

Demonstraţie. Cazul $p = \infty$ este trivial. Fie deci $p < \infty$ şi fie q exponentul conjugat al lui p, adică $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Folosind inegalitatea lui Hölder, găsim

$$\begin{aligned} &\left|\int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy\right| \\ \le\ &\left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x-y)|\,dy\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x-y)|\,|g(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}} . \end{aligned}$$

Concluzia rezultă acum dacă se ridică la puterea p şi se integrează pe $\mathbf{R}^n$. ■

Teorema care urmează este un instrument eficient pentru utilizarea convoluţiei.

Propoziţia 5.1 *Fie* $g \in L^1(\mathbf{R}^n)$ *şi* $a = \int_{\mathbf{R}^n} g(x)\,dx$. *Pentru orice* $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, *definim* $g_k(x) = k^n g(kx)$. *Fie* $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$.

a) *Dacă* $1 \le p < \infty$, *atunci* $f * g_k \to af$ *în* $L^p(\mathbf{R}^n)$, *pentru* $k \to \infty$.

b) *Dacă* $p = \infty$ *şi funcţia* f *este uniform continuă pe o mulţime* $V \subset \mathbf{R}^n$, *atunci* $f * g_k \to af$ *uniform pe* V, *pentru* $k \to \infty$.

Pentru demonstraţie avem nevoie de rezultatul următor.

Lema 5.1 *Dacă* $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, *unde* $1 \le p < \infty$, *atunci*

$$|\tau_h f - f|_{L^p} \to 0 \quad \textit{pentru } h \to 0,$$

unde pentru un $h \in \mathbf{R}^n$, $(\tau_h f)(x) = f(x-h)$.

Demonstraţie. Pentru $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\tau_h f \to f$ chiar uniform. Dacă $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ şi $\varepsilon > 0$, alegem $g \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ astfel încât $|f-g|_{L^p} < \varepsilon/3$. Rezultă $|\tau_h f - \tau_h g|_{L^p} < \varepsilon/3$ şi

$$|\tau_h f - f|_{L^p} \le |\tau_h f - \tau_h g|_{L^p} + |\tau_h g - g|_{L^p} + |g - f|_{L^p} < \varepsilon$$

pentru $|h| < \delta_\varepsilon$. ■

Demonstraţia Propoziţiei 5.1. Prin schimbarea de variabile $kx = y$, se constată că

$$\begin{aligned}(f * g_k)(x) - af(x) &= \int_{\mathbf{R}^n} [f(x-y) - f(x)]\, g_k(y)\,dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \left[f\left(x - k^{-1}y\right) - f(x)\right] g(y)\,dy.\end{aligned}$$

a) Atunci avem

$$|(f * g_k)(x) - af(x)|^p \le |g|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbf{R}^n} \left|f\left(x-k^{-1}y\right) - f(x)\right|^p |g(y)|\,dy.$$

Rezultă că

$$|f * g_k - af|_{L^p}^p \le |g|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbf{R}^n} \left|\tau_{-k^{-1}y} f - f\right|_{L^p}^p |g(y)|\,dy.$$

Şirul funcţiilor $y \longmapsto \left|\tau_{-k^{-1}y}f - f\right|_{L^p}^p |g(y)|\,,\ k \geq 1,$ este dominat de funcţia $(2|f|_{L^p})^p |g(y)| \in L^1(\mathbf{R}^n)$ şi, pe baza Lemei 5.1, tinde punctual la zero, pentru $k \to \infty$. Teorema convergenţei dominate a lui Lebesgue implică atunci că el tinde la zero în $L^1(\mathbf{R}^n)$.

b) Pentru orice $\delta > 0$, există un compact W astfel încât

$$\int_{\mathbf{R}^n \setminus W} |g(y)|\, dy < \delta.$$

Atunci

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in V} |(f * g_k)(x) - af(x)| \\ \leq \quad & \sup_{x \in V, y \in W} \left|f\left(x - k^{-1}y\right) - f(x)\right| \int_{\mathbf{R}^n} |g(y)|\, dy + 2|f|_{L^\infty}\delta \end{aligned}$$

de unde concluzia. ■

Transformarea Fourier are proprietatea esenţială de a transforma produsul de convoluţie a două funcţii într-un produs obişnuit de funcţii. Mai exact, un calcul elementar ne conduce la rezultatul următor:

Teorema 5.2 *Dacă* $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$, *atunci*

$$T[f * g] = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\, T[f]\, T[g]\,.$$

3. Transformarea Fourier pe spaţiul Schwartz $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$

Proprietăţi interesante ale transformării Fourier au loc pe un subspaţiu al lui $L^1(\mathbf{R}^n)$, anume pe *spaţiul Schwartz* $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ al funcţiilor netede care împreună cu toate derivatele lor descresc rapid la zero pentru $|x| \to \infty$. Mai exact,

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbf{R}^n) : \ \sup_{\mathbf{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta f(x) \right| < \infty \text{ oricare ar fi } \alpha, \beta \in \mathbf{N}^n \right\},$$

unde cu x^α am notat monomul $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} ... x_n^{\alpha_n}$.

De exemplu, pentru orice $a > 0$, funcţia $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ definită prin

$$f(x) = e^{-a|x|^2}$$

aparţine lui $\mathcal{S}$. Să mai reţinem şi faptul că dacă o funcţie f aparţine lui $\mathcal{S}$, atunci toate derivatele ei $D^\alpha f$ aparţin de asemenea lui $\mathcal{S}$.

$\mathcal{S}$ este un spaţiu liniar complex. Funcţiile din $\mathcal{S}$ şi toate derivatele lor tind la zero pentru $|x| \to \infty$, mai repede decât orice putere $x^{-\alpha}$. Pe spaţiul $\mathcal{S}$ se defineşte o *convergenţă* în felul următor:

$$f_k \to f \ \text{ în } \mathcal{S} \quad \text{dacă} \quad x^\alpha D^\beta f_k(x) \to x^\alpha D^\beta f(x) \ \text{ uniform pe } \mathbf{R}^n, \text{ oricare ar fi } \alpha, \beta \in \mathbf{N}^n.$$

Această convergenţă provine din înzestrarea spaţiului $\mathcal{S}$ cu familia de seminorme $\{p_m : \ m \in \mathbf{N}\}$, unde

$$p_m(f) = \sum_{|\alpha|,|\beta| \le m} \sup_{\mathbf{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta f(x) \right|, \qquad f \in \mathcal{S}.$$

Să observăm că pentru $1 \le p \le \infty$, avem $\mathcal{S} \subset L^p(\mathbf{R}^n)$ algebric şi topologic. Intr-adevăr, dacă $f \in \mathcal{S}$, atunci

$$|f(x)|^p \le C \prod_{j=1}^n \frac{1}{1+x_j^2}$$

de unde

$$|f|^p_{L^p(\mathbf{R}^n)} \le C \prod_{j=1}^n \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{1+x_j^2}\, dx_j = C\pi^n < \infty.$$

In plus, dacă $f_k \to f$ în $\mathcal{S}$, atunci $f_k \to f$ uniform pe $\mathbf{R}^n$, de unde rezultă că $f_k \to f$ în $L^p(\mathbf{R}^n)$.

Propoziţia 5.2 *Dacă $f \in \mathcal{S}$ şi $\beta \in \mathbf{N}^n$, atunci $T[f] \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ şi au loc formulele*

$$D^\beta T[f](y) = T\left[(-ix)^\beta f(x)\right](y) \quad (y \in \mathbf{R}^n) \tag{5.1}$$

$$T\left[D^\beta f\right](y) = (iy)^\beta T[f](y) \quad (y \in \mathbf{R}^n). \tag{5.2}$$

Demonstraţie. Calculăm $D^\beta T[f]$ şi $T\left[D^\beta f\right]$ derivând sub semnul integralei, respectiv integrând prin părţi, de $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n$ ori. ■

Propoziţia 5.3 a) *Dacă* $f,\, g \in \mathcal{S}$, *atunci*

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, T[g](x)\, dx = \int_{\mathbf{R}^n} g(x)\, T[f](x)\, dx \tag{5.3}$$

$$\int_{\mathbf{R}^n} f\, \overline{g}\, dx = \int_{\mathbf{R}^n} T[f]\, \overline{T[g]}\, dx. \tag{5.4}$$

b) *Dacă*

$$h(x) = e^{-\frac{1}{2}|x|^2}, \tag{5.5}$$

atunci $T[h] = h$, *adică* h *este un punct fix al operatorului* T.

Demonstraţie. a) Se aplică Teorema lui Fubini (vezi Brezis [5], Théorème IV.5). Formula (5.4) se deduce din (5.3) înlocuind g cu $\overline{T[g]}$ şi ţinând seamă de $T^{-1}[\overline{g}] = \overline{T[g]}$.

b) Avem

$$\begin{aligned} T[h](y) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{1}{2}|x|^2 - ix\cdot y}\, dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{1}{2}\sum (x_j+iy_j)^2 - \frac{1}{2}|y|^2} dx \\ &= h(y)\, \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{1}{2}(x_j+iy_j)^2} dx_j \\ &= h(y)\, \frac{1}{\pi^{n/2}} \prod_{j=1}^{n} \int_{\mathrm{Im}\ z = y_j/\sqrt{2}} e^{-z^2} dz. \end{aligned}$$

Cum $\int_{\mathbf{R}} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$, concluzia va rezulta dacă arătăm că

$$\int_{\mathrm{Im}\ z=a} e^{-z^2} dz = \int_{\mathrm{Im}\ z=0} e^{-z^2} dz. \tag{5.6}$$

Pentru aceasta, fie $R > 0$ şi conturul dreptunghiular C_R determinat de punctele $A(-R,0),\, B(R,0),\, C(R,a)$ şi $D(-R,a)$. Conform teoremei lui Cauchy,

$$\int_{C_R} e^{-z^2} dz = 0.$$

Deci

$$\int_{DC} e^{-z^2} dz = \int_{AB} e^{-z^2} dz.$$

Formula (5.6) rezultă acum dacă se trece la limită cu $R \to \infty$. ■

Teorema 5.3 *Dacă $f \in \mathcal{S}$, atunci $T[f] \in \mathcal{S}$ iar operatorul $T : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ este liniar, continuu şi inversabil, cu inversa*

$$\begin{aligned} T^{-1}[f](y) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x) e^{ix\cdot y} dx \\ &= T[f](-y) = T[f(-x)](y). \end{aligned}$$

(*Transformarea Fourier este un automorfism al spaţiului $\mathcal{S}$*)

Demonstraţie. a) Arătăm că $T[f] \in \mathcal{S}$. Pentru aceasta, folosind formulele (5.1)-(5.2), deducem

$$\begin{aligned} y^\alpha D^\beta T[f](y) &= y^\alpha T\left[(-ix)^\beta f(x)\right](y) \\ &= (-i)^{|\beta|} y^\alpha T\left[x^\beta f(x)\right](y) \\ &= (-i)^{|\alpha|+|\beta|} (iy)^\alpha T\left[x^\beta f(x)\right](y) \\ &= (-i)^{|\alpha|+|\beta|} T\left[D^\alpha \left(x^\beta f(x)\right)\right](y). \end{aligned}$$

Apoi ţinem seamă de faptul că $T\left[D^\alpha\left(x^\beta f(x)\right)\right] \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$.

b) Demonstrăm că $T^{-1}[T[f]] = T\left[T^{-1}[f]\right] = f$ oricare ar fi $f \in \mathcal{S}$. Pentru $k \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$, fie

$$g(\xi) = e^{ix\cdot\xi - k^{-2}|\xi|^2}, \quad \xi \in \mathbf{R}^n.$$

Atunci, pe baza Propoziţiei 5.3 b),

$$\begin{aligned} T[g](y) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-k^{-2}|\xi|^2} e^{-i(y-x)\cdot\xi}\, d\xi \\ &= k^n h(k(x-y)) = h_k(x-y), \end{aligned}$$

unde h este funcţia dată de (5.5). Folosind (5.3), obţinem

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-k^{-2}|\xi|^2} e^{ix\cdot\xi} T[f](\xi)\, d\xi &= \int_{\mathbf{R}^n} g(\xi) T[f](\xi)\, d\xi \qquad (5.7) \\ &= \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(y) T[g](y)\, dy = (f * h_k)(x). \end{aligned}$$

Cum

$$\int_{\mathbf{R}^n} h(x)\, dx = (2\pi)^{n/2} T[h](0) = (2\pi)^{n/2} h(0) = (2\pi)^{n/2},$$

Propoziţia 5.1 implică $f*h_k \to (2\pi)^{n/2} f$ pentru $k \to \infty$, uniform pe $\mathbf{R}^n$. Pe de altă parte, este clar că pentru orice x, integrala din membrul întâi al relaţiei (5.7) tinde la $(2\pi)^{n/2} T^{-1}[T[f]](x)$. Aşadar, $T^{-1}[T[f]] = f$. ∎

Propunem cititorului ca folosind simple schimbări de variabile, să demonstreze următoarele formule de calcul al transformatelor Fourier ale translaţiei şi dilataţiei:

$$T[f(x-x_0)](y) = e^{-iy\cdot x_0} T[f(x)](y) \tag{5.8}$$

$$T[f(\lambda x)](y) = |\lambda|^{-n} T[f(x)]\left(\lambda^{-1} y\right) \tag{5.9}$$

$(x_0 \in \mathbf{R}^n, \lambda \in \mathbf{R}\setminus\{0\})$.

O consecinţă imediată a Teoremei 5.2 este următoarea:

Teorema 5.4 *Dacă* $f,\ g \in \mathcal{S}$, *atunci* $f*g \in \mathcal{S}$ *şi*

$$D^\alpha(f*g) = f*D^\alpha g = D^\alpha f * g \quad (\alpha \in \mathbf{N}^n).$$

Demonstraţie. Faptul că $f*g$ aparţine lui $\mathcal{S}$ rezultă din $T^{-1}[\mathcal{S}] = \mathcal{S}$,

$$f*g = (2\pi)^{\frac{n}{2}} T^{-1}[T[f]\,T[g]]$$

şi din proprietatea aproape evidentă că produsul obişnuit a două funcţii din $\mathcal{S}$ este tot în $\mathcal{S}$.

Avem

$$T[D^\alpha(f*g)](y) = (iy)^\alpha T[f*g](y) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} (iy)^\alpha T[f](y)\,T[g](y)$$

şi

$$\begin{aligned} T[f*D^\alpha g](y) &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} T[f](y)\,T[D^\alpha g](y) \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} (iy)^\alpha T[f](y)\,T[g](y). \end{aligned}$$

Deci $T[D^\alpha(f*g)] = T[f*D^\alpha g]$, de unde $D^\alpha(f*g) = f*D^\alpha g$. ∎

Pentru a justifica afirmaţia făcută la începutul acestui capitol, conform căreia prin transformare Fourier o ecuaţie cu derivate parţiale se reduce la o ecuaţie diferenţială ordinară, să considerăm ecuaţia liniară cu coeficienţi constanţi

$$\sum_{|\alpha|+\beta\le m} a_{\alpha\beta} D_x^\alpha D_t^\beta u(x,t) = f(x,t), \quad x\in\mathbf{R}^n,\ t\in I\subset\mathbf{R}$$

unde $D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}$ şi $D_t^\beta = \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}$. Aplicând transformarea Fourier parţială, numai în raport cu variabilele spaţiale x (considerându-l pe t fixat) şi folosind formula (5.2), se obţine pentru orice $y \in \mathbf{R}^n$ ecuaţia

$$\sum_{\beta=0}^{m}\left(\sum_{|\alpha|\le m-\beta} a_{\alpha\beta}\,(iy)^\alpha\right) D_t^\beta\left(T\left[u\left(t\right)\right]\left(y\right)\right) = T\left[f\left(t\right)\right]\left(y\right).$$

Pentru y fixat, aceasta este o ecuaţie diferenţială ordinară liniară cu coeficienţi constanţi, în variabila independentă t, cu necunoscuta $v(t) = T[u(t)](y)$.

5.2 Problema Cauchy pentru ecuaţia căldurii

In această secţiune ne vom ocupa de problema Cauchy pentru ecuaţia omogenă a căldurii

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 & \text{pe } Q = \mathbf{R}^n \times (0,\infty) \\ u(x,0) = g_0(x) & \text{pe } \mathbf{R}^n. \end{cases} \tag{5.10}$$

Din punct de vedere fizic, problema descrie procesul de propagare a căldurii în întreg spaţiul $\mathbf{R}^n$ cunoscându-se distribuţia iniţială g_0 a temperaturii.

Prin *soluţie clasică* a problemei (5.10) înţelegem o funcţie $u \in C^{2,1}(\overline{Q})$ care satisface punctual egalităţile (5.10). Lema care urmează este utilă pentru demonstrarea existenţei soluţiei clasice.

Lema 5.2 *Fie I un interval de numere reale. Presupunem $u \in C(I;\mathcal{S})$. Atunci $u \in C^1(I;\mathcal{S})$ dacă şi numai dacă există derivata $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ în orice punct din $\mathbf{R}^n \times I$, $\frac{\partial u}{\partial t}(.,t) \in \mathcal{S}$ pentru orice $t \in I$ şi aplicaţia $t \longmapsto \frac{\partial u}{\partial t}(.,t)$ este continuă de la I în $\mathcal{S}$..In acest caz,*

$$u'(t) = \frac{\partial u}{\partial t}(.,t), \quad t \in I.$$

Demonstraţie. *Necesitatea.* Dacă $u \in C^1(I;\mathcal{S})$, atunci

$$\frac{1}{\tau}\left[u(t+\tau) - u(t)\right] - u'(t) \to 0 \ \text{ în } \mathcal{S}, \text{ pentru } \tau \to 0. \tag{5.11}$$

In particular, pentru orice $x \in \mathbf{R}^n$,

$$\frac{1}{\tau}\left[u(t+\tau)(x) - u(t)(x)\right] - u'(t)(x) \to 0 \quad \text{pentru } \tau \to 0.$$

Deci derivata $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ există şi este egală cu $u'(t)(x)$.

Suficienţa. Avem de demonstrat (5.11). Avem

$$\frac{1}{\tau}\left[u(t+\tau)(x)-u(t)(x)\right]=\frac{\partial u}{\partial t}(x,t^*),$$

unde $|t^*-t|<|\tau|$. Acum (5.11) rezultă folosind continuitatea lui $\frac{\partial u}{\partial t}(.,t)$ ca funcţie de la I la $\mathcal{S}$. ■

Teorema 5.5 $\Big($existenţă, unicitate şi reprezentare în $\mathcal{S}\Big)$. *Fie $g_0\in\mathcal{S}$. Atunci problema* (5.10) *are o soluţie u unică în $C^1([0,\infty);\mathcal{S})$. In plus, $u\in C^\infty([0,\infty);\mathcal{S})$ şi pentru $t>0$ are loc reprezentarea*

$$u(x,t)=\int_{\mathbf{R}^n}N(x-y,t)\,g_0(y)\,dy, \tag{5.12}$$

unde

$$N(t)(x)=N(x,t)=\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}},\quad x\in\mathbf{R}^n,\ t>0. \tag{5.13}$$

Demonstraţie. *Unicitatea şi reprezentarea.* Să presupunem că $u\in C^1([0,\infty);\mathcal{S})$ este o soluţie a problemei Cauchy. Atunci, pentru orice $t\geq 0$,

$$\begin{cases} u'(t)-\Delta u(t)=0 & \text{în } \mathbf{R}^n \\ u(0)=g_0 \end{cases} \tag{5.14}$$

toate funcţiile fiind din $\mathcal{S}$. Cum din $u\in C^1([0,\infty);\mathcal{S})$ rezultă $\Delta u\in C^1([0,\infty);\mathcal{S})$, deducem $u'\in C^1([0,\infty);\mathcal{S})$, adică $u\in C^2([0,\infty);\mathcal{S})$. Din aproape în aproape se obţine în final că $u\in C^\infty([0,\infty);\mathcal{S})$.

Via transformarea Fourier, egalităţile (5.14) sunt echivalente cu

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}T[u(t)](y)+|y|^2\,T[u(t)](y)=0, & y\in\mathbf{R}^n \\ T[u(t)](y)|_{t=0}=T[g_0](y), & y\in\mathbf{R}^n \end{cases} \tag{5.15}$$

Ne-am folosit de următoarea propoziţie a cărei demonstraţie se bazează exclusiv pe proprietatea operatorului $T:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ de a fi liniar şi continuu:

$$w\in C^1([0,\infty);\mathcal{S})\Longleftrightarrow T[w]\in C^1([0,\infty);\mathcal{S})$$
şi
$$\frac{d}{dt}T[w(t)]=T\left[\frac{d}{dt}w(t)\right].$$

Rezolvând problema Cauchy (5.15) relativă la o ecuaţie diferenţială ordinară liniară cu coeficienţi constanţi (y se consideră acum fixat, ca parametru), găsim

$$T[u(t)](y) = T[g_0](y)\, e^{-|y|^2 t}. \tag{5.16}$$

Aplicând transformarea Fourier inversă, obţinem reprezentarea

$$u(t)(x) = T^{-1}\left[T[g_0](y)\, e^{-|y|^2 t}\right](x), \quad x \in \mathbf{R}^n,\ t \geq 0. \tag{5.17}$$

Existenţa. Este suficient să arătăm că în ipoteza $g_0 \in \mathcal{S}$, funcţia w definită prin

$$w(t)(x) = T[g_0](x)\, e^{-|x|^2 t}$$

aparţine spaţiului $C^1([0,\infty);\mathcal{S})$ şi satisface (5.15). Mai întâi observăm că pentru orice $t > 0$, $w(t) \in \mathcal{S}$ ca produs de două funcţii din $\mathcal{S}$ (subliniem faptul că $w(t) \notin \mathcal{S}$ pentru $t < 0$). Pentru a demonstra continuitatea funcţiei w într-un punct $t_0 \in [0,\infty)$, va trebui să ne convingem de faptul că pentru $t \to t_0$,

$$x^\alpha D^\beta w(t)(x) \to x^\alpha D^\beta w(t_0)(x) \quad \text{uniform pe } \mathbf{R}^n.$$

Este evident că $x^\alpha D^\beta w(t)(x)$ este de forma

$$\sum_{|\gamma| \leq |\beta|} p_\gamma(x,t)\, e^{-|x|^2 t} D^\gamma T[g_0](x)$$

unde $p_\gamma(x,t)$ sunt polinoame în variabilele x şi t. Aplicând teorema creşterilor finite în raport cu t obţinem

$$\begin{aligned} & \left| x^\alpha D^\beta w(t)(x) - x^\alpha D^\beta w(t_0)(x) \right| \\ = \ & |t - t_0| \left| \sum \left[\frac{\partial}{\partial t} p_\gamma(x,\tau) - |x|^2 p_\gamma(x,\tau) \right] D^\gamma T[g_0](x) \right| e^{-|x|^2 \tau} \end{aligned}$$

unde τ este cuprins între t şi t_0. Dacă presupunem că $|t - t_0| \leq 1$, atunci modulul lui $\partial p_\gamma / \partial t - |x|^2 p_\gamma$ se majorează cu un polinom $q_\gamma(x)$ ce depinde numai de t_0. Cum însă $T[g_0] \in \mathcal{S}$, funcţia $\sum q_\gamma(x) D^\gamma T[g_0](x)$ este mărginită pe $\mathbf{R}^n$. Aşadar

$$\left| x^\alpha D^\beta w(t)(x) - x^\beta D^\beta w(t_0)(x) \right| \leq C|t - t_0| \quad \text{pe } \mathbf{R}^n.$$

In mod analog se arată că funcţia

$$\frac{\partial w}{\partial t} = - \left| x \right|^2 T \left[g_0 \right] (x)\, e^{-|x|^2 t}$$

aparţine spaţiului $C([0,\infty);\mathcal{S})$. Concluzia $w \in C^1([0,\infty);\mathcal{S})$ rezultă acum pe baza Lemei 5.2.

Formula (5.12). Prin calcul direct, pentru $t > 0$, avem

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} g_0(z)\, e^{-iy\cdot z} e^{-|y|^2 t} e^{iy\cdot x} dz dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbf{R}^n} g_0(z) \int_{\mathbf{R}^n} e^{-|y|^2 t + iy(x-z)} dy dz. \end{aligned}$$

Cu schimbarea de variabile $y = (2t)^{-1/2}\xi$, obţinem mai departe

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} g_0(z) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\frac{1}{2}|\xi|^2} e^{i\xi\cdot(x-z)/\sqrt{2t}} d\xi dz \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbf{R}^n} g_0(z)\, e^{-\frac{|x-z|^2}{4t}} dz. \end{aligned}$$

■

Menţionăm că formula (5.12) defineşte soluţia clasică a problemei Cauchy şi în condiţii mai generale asupra funcţiei g_0.

Funcţia $N(x,t)$ definită de (5.13) pentru $t > 0$ şi prelungită cu zero pentru $t \leq 0$, se numeşte *soluţia fundamentală a ecuaţiei căldurii.* Menţionăm proprietăţile: $N \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times (0,\infty))$ şi $|N(t)|_{L^1(\mathbf{R}^n)} = 1$ pentru orice $t > 0$. Se observă că formula (5.12) se poate scrie sub forma produsului de convoluţie a două funcţii din $\mathcal{S}$, anume

$$u(x,t) = (g_0 * N(t))(x), \quad x \in \mathbf{R}^n,\ t > 0.$$

5.3 Problema Cauchy pentru ecuaţia undelor

In această secţiune vom aplica metoda transformării Fourier pentru rezolvarea problemei Cauchy pentru ecuaţia undelor

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 & \text{pe } \mathbf{R}^{n+1} \\ u(x,0) = g_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g_1(x) & \text{pe } \mathbf{R}^n. \end{cases} \tag{5.18}$$

Pentru $n = 3$, problema modelează fenomenul propagării oscilaţiilor libere (mecanice, electromagnetice, etc.) în întregul spaţiu izotrop $\mathbf{R}^3$, cu viteza de propagare $a = 1$. Este presupus cunoscut regimul undelor la momentul $t = 0$.

Vom numi *soluţie clasică,* orice funcţie $u \in C^2\left(\mathbf{R}^{n+1}\right)$ care satisface punctual cele trei egalităţi.

Teorema 5.6 $\Big($existenţă, unicitate şi reprezentare în $\mathcal{S}\Big)$ *Dacă* $g_0,\ g_1 \in \mathcal{S}$, *atunci problema* (5.18) *are soluţie unică în* $C^2(\mathbf{R};\mathcal{S})$. *In plus* $u \in C^\infty(\mathbf{R};\mathcal{S})$ *şi are loc reprezentarea*

$$u(t)(x) = T^{-1}\left[T[g_0](y)\cos(|y|\,t) + T[g_1](y)\,\frac{\sin(|y|\,t)}{|y|}\right](x). \tag{5.19}$$

In particular, pentru orice $x \in \mathbf{R}^n$ *şi* $t > 0$ *avem:*

(i) *pentru* $n = 1$ (*formula lui D′Alembert*):

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g_0(x+t) + g_0(x-t)\right] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g_1(y)\,dy \tag{5.20}$$

(ii) *pentru* $n = 2$ (*formula lui Poisson*):

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_{B_t(x)} \frac{g_0(y)\,dy}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} + \frac{1}{2\pi}\int_{B_t(x)} \frac{g_1(y)\,dy}{\sqrt{t^2 - |x-y|^2}} \tag{5.21}$$

(iii) *pentru* $n = 3$ (*formula lui Kirchoff*):

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\int_{\partial B_t(x)} g_0(y)\,d\sigma\right) + \frac{1}{4\pi t}\int_{\partial B_t(x)} g_1(y)\,d\sigma. \tag{5.22}$$

Demonstraţie. Să presupunem că $u \in C^2(\mathbf{R};\mathcal{S})$ este o soluţie a problemei. Atunci, pentru orice $t \in \mathbf{R}$ avem

$$\begin{cases} u''(t) - \Delta u(t) = 0 \quad \text{pe } \mathbf{R}^n \\ u(0) = g_0, \quad u'(0) = g_1 \end{cases}$$

toate funcţiile care intervin fiind în $\mathcal{S}$. Aceste egalităţi sunt echivalente, via transformarea Fourier, cu

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}T[u(t)](y) + |y|^2\,T[u(t)](y) = 0 \\ T[u(t)](y)\big|_{t=0} = T[g_0](y) \\ \frac{d}{dt}T[u(t)](y)\Big|_{t=0} = T[g_1](y) \end{cases} \tag{5.23}$$

pentru $y \in \mathbf{R}^n$. Rezolvând obţinem

$$w(t)(y) := T[u(t)](y) = T[g_0](y)\cos(|y|\,t) + T[g_1](y)\,\frac{\sin(|y|\,t)}{|y|} \tag{5.24}$$

de unde se deduce reprezentarea (5.19).

De remarcat că pentru orice $t \in \mathbf{R}$ şi nu doar pentru $t \geq 0$, cum se întâmpla la ecuaţia căldurii, funcţiile $\cos(|y|\,t)$ şi $\sin(|y|\,t)/|y|$ împreună cu toate derivatele lor parţiale în raport cu y sunt netede şi mărginite. Derivatele lor în raport cu t cresc cel mult polinomial în y. Menţionăm că pe punctul $y = 0$ nu intervine nici o singularitate fiindcă pentru $|y| \to 0$, avem $\sin(|y|\,t)/|y| \to t$.

Cu aceasta s-a demonstrat şi existenţa, dacă se arată că funcţia w dată de (5.24) aparţine spaţiului $C^2(\mathbf{R};\mathcal{S})$ şi satisface (5.23). Raţionamentul este asemănător celui descris pentru ecuaţia căldurii şi de aceea omitem să-l reproducem.

Pentru a obţine reprezentarea (5.20), folosind formula (5.8), deducem

$$\begin{aligned} & T\left[\frac{1}{2}\left[g_0(x+t) + g_0(x-t)\right]\right](y) \qquad (5.25)\\ = {} & \frac{1}{2}\left(T[g_0(x+t)](y) + T[g_0(x-t)](y)\right)\\ = {} & \frac{1}{2}\left(e^{iyt} + e^{-iyt}\right)T[g_0](y) = T[g_0](y)\cos(yt). \end{aligned}$$

Pe de altă parte, dacă notăm $v(x) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g_1(y)\,dy$, atunci $v'(x) = \frac{1}{2}\left(g_1(x+t) - g_1(x-t)\right)$ şi ca mai sus avem

$$T\left[v'\right](y) = \frac{1}{2}\left(e^{iyt} - e^{-iyt}\right)T[g_1](y) = iT[g_1](y)\sin(yt).$$

Dar, $T[v'](y) = iyT[v](y)$. Rezultă

$$T[v](y) = T[g_1](y)\,\frac{\sin(yt)}{y}. \tag{5.26}$$

Din (5.25) şi (5.26) rezultă (5.20).

Pentru deducerea lui (5.22) calculăm

$$\begin{aligned}
T\left[\int_{\partial B_t(x)} g_1(z)\, d\sigma_z\right](y) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbf{R}^3} e^{-ix\cdot y}\int_{\partial B_t(x)} g_1(z)\, d\sigma_z dx \\
&= \frac{t^2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbf{R}^3} e^{-ix\cdot y}\int_{\partial B_1(0)} g_1(x+tz)\, d\sigma_z dx \\
&= \frac{t^2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\partial B_1(0)}\int_{\mathbf{R}^3} e^{-ix\cdot y} g_1(x+tz)\, dx d\sigma_z \\
&= t^2\int_{\partial B_1(0)} T\left[g_1(.+tz)\right](y)\, d\sigma_z \\
&= t^2\int_{\partial B_1(0)} e^{itz\cdot y}\, T\left[g_1\right](y)\, d\sigma_z \\
&= t^2 T\left[g_1\right](y)\int_{\partial B_1(0)} e^{itz\cdot y}\, d\sigma_z.
\end{aligned}$$

Folosind coordonatele sferice, obţinem

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B_1(0)} e^{itz\cdot y}\, d\sigma_z &= \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\pi} e^{it|y|\cos\theta}\sin\theta\ d\theta \\
&= -2\pi\frac{1}{it\,|y|}\, e^{it|y|\cos\theta}\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi} \\
&= \frac{2\pi}{it\,|y|}\left(e^{it|y|}-e^{-it|y|}\right) = \frac{4\pi}{t}\,\frac{\sin(|y|\,t)}{|y|}.
\end{aligned}$$

Aşadar

$$T\left[\int_{\partial B_t(x)} g_1(z)\, d\sigma_z\right](y) = 4\pi t\, T\left[g_1\right](y)\,\frac{\sin(|y|\,t)}{|y|}. \tag{5.27}$$

Aceasta implică

$$\begin{aligned}
&T\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\int_{\partial B_t(x)} g_0(y)\, d\sigma\right)\right](y) \qquad (5.28)\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t}\,T\left[\int_{\partial B_t(x)} g_0(z)\, d\sigma_z\right](y)\right) \\
&= 4\pi T\left[g_0\right](y)\cos(|y|\,t)\,.
\end{aligned}$$

Este acum clar că (5.27) şi (5.28) implică (5.22).

Formula (5.21) se poate deduce din (5.22) folosind aşa numita *metodă a coborârii* a lui Hadamard, ce constă în a privi soluţia problemei Cauchy pentru $n = 2$ ca pe o soluţie independentă de variabila x_3 a problemei Cauchy pentru $n = 3$ (a se vedea de exemplu, Vladimirov [57, p. 212] şi DiBenedetto [10, p. 308]). ■

Observaţia 5.1 Soluţia problemei Cauchy pentru ecuaţia omogenă a undelor se reprezintă folosind produsul de convoluţie, sub forma

$$u(t)(x) = \big(g_0 * N'(t)\big)(x) + \left(g_1 * N(t)\right)(x), \tag{5.29}$$

unde

$$N(t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} T^{-1}\left[\frac{\sin(|y|\,t)}{|y|}\right].$$

Un simplu exerciţiu bazat numai pe definiţia transformatei Fourier, arată că:

(i) *pentru* $n = 1$, $x \in \mathbf{R}$ şi $t > 0$, avem

$$N(t)(x) = \frac{1}{2} H(t - |x|)$$

unde H este funcţia lui Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

(ii) *pentru* $n = 2$, $x \in \mathbf{R}^2$ şi $t > 0$, avem

$$N(t)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\sqrt{t^2 - |x|^2}}, & |x| < t \\ 0, & |x| \geq t. \end{cases}$$

A se observa că $N(t) \in L^1(\mathbf{R}^n)$ pentru orice $t > 0$, atât pentru $n = 1$ cât şi pentru $n = 2$.

In cazul $n = 3$, o reprezentare a soluţiei sub forma (5.29) nu este posibilă în $L^1\left(\mathbf{R}^3\right)$, dar are totuşi loc dacă se extind produsul de convoluţie şi transformarea Fourier la spaţiul mai larg al distribuţiilor temperate (a se vedea Partea II).

De menţionat că formula (5.19) defineşte soluţia clasică a problemei Cauchy şi în condiţii mai generale asupra datelor g_0 şi g_1.

5.4 Ecuaţii neomogene. Principiul lui Duhamel

Amintim că ecuaţiile cu derivate parţiale neomogene de tipul

$$Lu = f$$

intervin în modelarea matematică a unor procese reale care fac să intervină surse externe sau anumiţi stimuli. Astfel, în cazul ecuaţiei neomogene a căldurii $u_t - \Delta u = f(x,t)$, termenul f reprezintă densitatea surselor de căldură, adică cantitatea de căldură produsă de surse pe unitatea de volum şi pe unitatea de timp. In cazul ecuaţiei neomogene $u_{tt} - \Delta u = f(x,t)$ ce modelează micile vibraţii ale unei membrane, termenul $f(x,t)$ reprezintă mărimea forţei exterioare pe unitatea de masă şi pe unitatea de timp.

In această secţiune discutăm pe scurt problema lui Cauchy pentru ecuaţia neomogenă a căldurii şi pentru ecuaţia neomogenă a undelor. Să considerăm pentru început cazul ecuaţiei căldurii:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, & x \in \mathbf{R}^n,\ t > 0 \\ u(x,0) = g_0(x), & x \in \mathbf{R}^n. \end{cases} \tag{5.30}$$

Soluţia se poate căuta sub forma $u = u_1 + u_2$, unde u_1 satisface ecuaţia neomogenă şi condiţia iniţială omogenă $u_1(x,0) = 0$, iar u_2 satisface ecuaţia omogenă şi condiţia iniţială neomogenă, adică u_2 este soluţia problemei (5.10). Cum funcţia u_2 a fost deja determinată, rămâne să se rezolve problema (5.30) pentru $g_0 = 0$, adică

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, & x \in \mathbf{R}^n,\ t > 0 \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbf{R}^n. \end{cases} \tag{5.31}$$

Ideea *principiului lui Duhamel* constă în a căuta soluţia problemei (5.31) sub forma

$$u(x,t) = \int_0^t v(x, t-s, s)\, ds, \tag{5.32}$$

unde funcţia $v = v(x,t,s)$ ce depinde de o variabilă suplimentară $s \in \mathbf{R}$, urmează a fi determinată. Pentru aceasta înlocuim formal în (5.31) şi obţinem

$$v(x,0,t) + \int_0^t (v_t(x, t-s, s)\, ds - \Delta v(x, t-s, s))\, ds = f(x,t)\,.$$

Această egalitate are loc dacă v satisface condiţiile

$$\begin{cases} v_t(x,t,s)\,ds - \Delta v(x,t,s) = 0 & (x \in \mathbf{R}^n;\ t,s \geq 0) \\ v(x,0,s) = f(x,s) & (x \in \mathbf{R}^n,\ s \geq 0)\,. \end{cases}$$

A se remarca modul în care termenul sursă f devine prin acest procedeu, stare iniţială. Conform rezultatului din Secţiunea 5.2,

$$v(x,t,s) = \int_{\mathbf{R}^n} N(x-y,t)\, f(y,s)\,dy.$$

Aici N este soluţia fundamentală a ecuaţiei căldurii. Aşadar, soluţia problemei (5.31) este

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} N(x-y,t-s)\, f(y,s)\,dyds. \tag{5.33}$$

In concluzie, soluţia problemei (5.30) este

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} g_0(y)\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\,dy \qquad (5.34) \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} \frac{f(y,s)}{(4\pi(t-s))^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}}\,dyds. \end{aligned}$$

Ea poate fi scrisă şi cu ajutorul produsului de convoluţie sub forma

$$u(x,t) = (g_0 * N(t))(x) + (\widetilde{f} * N)(x,t) \quad (t > 0)$$

unde prima convoluţie este în $\mathbf{R}^n$, iar cea de a doua în $\mathbf{R}^{n+1}$ şi unde $\widetilde{f}$ este prelungirea cu 0 a lui f pentru $t \leq 0$. Se poate constata că dacă $g_0 \in \mathcal{S}$ şi $f \in C^\infty([0,\infty);\mathcal{S})$, atunci această formulă defineşte o funcţie $u \in C^\infty([0,\infty);\mathcal{S})$ ce reprezintă soluţia clasică a problemei Cauchy. De reţinut că şi în acest caz, (5.34) este soluţie clasică şi în condiţii mai generale asupra datelor g_0 şi f.

In mod asemănător, folosind principiul lui Duhamel, se poate rezolva problema Cauchy pentru ecuaţia neomogenă a undelor

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{în } \mathbf{R}^{n+1} \\ u(x,0) = g_0(x)\,,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g_1(x) & \text{în } \mathbf{R}^n. \end{cases}$$

Soluţia se caută sub forma $u = u_1 + u_2$, unde u_1 este dată de (5.19) iar u_2 rezolvă problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{în } \mathbf{R}^{n+1} \\ u(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 & \text{în } \mathbf{R}^n. \end{cases} \tag{5.35}$$

Soluţia problemei (5.35) se caută sub forma (5.32). Inlocuind formal în (5.35), impunem pentru determinarea lui $v(x,t,\tau)$, următoarele condiţii:

$$\begin{cases} v_{tt}(x,t,s) - \Delta v(x,t,s) = 0 \\ v(x,0,s) = 0, \quad v_t(x,0,s) = f(x,s). \end{cases}$$

Dar această problemă (parametrizată în raport cu s) este rezolvabilă conform Teoremei 5.6.

5.5 Probleme

1) Arătaţi că a) $e^{-a|x|^2} \in \mathcal{S}$ pentru $a > 0$ b) $\left(1 + |x|^2\right)^{-m} \notin \mathcal{S}$ pentru $m \in \mathbf{N}$.

2) Calculaţi $T[H(R - |x|)]$, unde H este funcţia lui Heaviside şi $R > 0$.

Indicaţie.

$$\begin{aligned} T[H(R-|x|)](y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^{R} e^{-i\,x\,y}\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left.\frac{e^{-i\,x\,y}}{-i\,y}\right|_{-R}^{R} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin Ry}{y}. \end{aligned}$$

3) Fie $u(x) = H(x)\,e^{-x}$, $x \in \mathbf{R}$. Determinaţi transformata Fourier a funcţiei: a) u b) $u(-x)$ c) $u(x - x_0)$ d) $e^{i\,x\,x_0}u(x)$ e) $u(x)\sin x$.

4)* Să se arate că dacă $u \in C^k([0,T];\mathcal{S})$, atunci $u \in C^{\infty,k}(\mathbf{R}^n \times [0,T])$.

Indicaţie. Fie $k = 1$. Din $u \in C^1([0,T];\mathcal{S})$ rezultă că $\frac{\partial u}{\partial t}(.,t) = u'(t) \in \mathcal{S}$. Deci derivatele parţiale $D_x^\alpha D_t^1 u$ există şi sunt continue pentru orice $\alpha \in \mathbf{N}^n$. Problema se reduce la a demonstra că $D_x^\alpha u \in C^1([0,T];\mathcal{S})$. Avem

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}(x,t)\right) &= \lim_{\tau\to 0} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{u(x,t+\tau) - u(t)}{\tau}\right] \\ &= \lim_{\tau\to 0} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t^*)\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right), \end{aligned}$$

fiindcă u' este o funcţie continuă de la $[0,T]$ în $\mathcal{S}$. Deci există funcţia $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}(.,t)\right)$, aparţine lui $\mathcal{S}$ şi depinde continuu de t. Lema 5.2 implică $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in C^1([0,T];\mathcal{S})$. In general, $D_x^\alpha u \in C^1([0,T];\mathcal{S})$.

5) Să se rezolve problema Cauchy (5.10) pentru $n=1$ şi a) $g_0 = e^{-ax^2}$ b) $g_0 = H(1-|x|)$.

Indicaţie. Se aplică formula (5.12).

6) Să se rezolve problema Cauchy (5.30) pentru $n=1$ şi a) $g_0 = e^{-ax^2}$, $f = e^t + t$ b) $g_0 = \sin x$, $f = e^t \sin x$.

Indicaţie. a) Funcţia $v = u + e^t + t^2/2$ satisface ecuaţia omogenă a căldurii.

7) Să se scrie formula de reprezentare a soluţiei problemei Cauchy pentru ecuaţia

$$u_t - a^2\Delta u = f(x,t), \quad x \in \mathbf{R}^n,\ t > 0.$$

Indicaţie. Funcţia $v(x,t) = u(ax,t)$ satisface ecuaţia $v_t - \Delta v = f(ax,t)$ şi $v(x,0) = g_0(ax)$. Obţinem

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{(4a^2\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} g_0(y)\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2 t}} dy \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} \frac{f(y,s)}{(4a^2\pi(t-s))^{n/2}} e^{-\frac{|x-y|^2}{4a^2(t-s)}} dy ds \end{aligned}$$

sau

$$u(x,t) = (g_0 * N(t))(x) + (\widetilde{f} * N)(x,t) \quad (t>0),$$

unde soluţia fundamentală a ecuaţiei $u_t - a^2\Delta u = 0$ este

$$N(x,t) = \frac{1}{(4a^2\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4a^2 t}} \quad (t>0).$$

8) Să se rezolve problema

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = \sin x, & x \in \mathbf{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

9) Să se rezolve problema Cauchy (5.18) pentru $n=1$ şi a) $g_0 = 1/\left(1+x^2\right)$, $g_1 = 0$ b) $g_0 = 0$, $g_1 = 1/\left(1+x^2\right)$ c) $g_0 = g_1 = 1/\left(1+x^2\right)$ d) $g_0 = |x|^2$, $g_1 = 0$.

Indicaţie. Se foloseşte formula lui D'Alembert.

10) Să se rezolve problema Cauchy pentru ecuaţia neomogenă a undelor dacă $n = 1$ şi a) $g_0 = g_1 = 0,\ f = H(t) \sin t$ b) $g_0 = 0,\ g_1 = e^x$, $f = H(t)(x + t)$.

11) Să se rezolve problema

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = \sin x, & x \in \mathbf{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0, & x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Partea II

CAPITOLE SPECIALE DE ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE

Capitolul 6
Elemente de teoria distribuţiilor

Pe parcursul Părţii I, au fost definite mai multe noţiuni de soluţie slabă sau generalizată pentru diferite probleme la limită relative la ecuaţii cu derivate parţiale. Aceasta ne-a permis să vorbim de soluţie chiar şi atunci când datele problemei sunt mai puţin netede, aşa cum se întâmplă de cele mai multe ori în fizica matematică şi de asemenea, să aplicăm rezultate abstracte de analiză funcţională pentru a demonstra existenţa soluţiilor. Rămân întrebările: în ce sens soluţia slabă satisface ecuaţia cu derivate parţiale şi în ce caz soluţia slabă este soluţie clasică. Răspunsul la prima întrebare este că soluţia slabă satisface ecuaţia cu derivate parţiale în sens distribuţional (adică în sensul teoriei distribuţiilor). Pentru a răspunde la cea de a doua întrebare, vom avea nevoie de rezultate de regularitate a soluţiilor slabe, rezultate care se bazează pe teoremele de scufundare a spaţiilor Sobolev.

După cum vom vedea, teoria distribuţiilor şi, în particular, teoria spaţiilor Sobolev, oferă cadrul funcţional cel mai natural pentru studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale.

6.1 Spaţiile fundamentale ale teoriei distribuţiilor

Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă. Pentru o funcţie $\varphi : \Omega \to \mathbf{R}$ se defineşte *suportul* ca fiind aderenţa în Ω a mulţimii punctelor pe care φ ia valori nenule, adică

$$\operatorname{supp} \varphi = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}} \quad \text{(aderenţa în } \Omega\text{)}.$$

Aşadar, prin definiţie, supp φ este o submulţime a lui Ω, închisă în Ω, dar nu neapărat închisă în $\mathbf{R}^n$.

Folosind notaţiile consacrate introduse de L. Schwartz, creatorul teoriei distribuţiilor, vom desemna prin $\mathcal{D}(\Omega)$ şi $\mathcal{E}(\Omega)$ spaţiile liniare $C_0^\infty(\Omega)$, respectiv $C^\infty(\Omega)$, unde

$$C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) : \text{ supp } \varphi \text{ este un compact din } \mathbf{R}^n\}.$$

Deci, o funcţie $\varphi \in C^\infty(\Omega)$ aparţine spaţiului $C_0^\infty(\Omega)$ dacă şi numai dacă există un compact K al lui $\mathbf{R}^n$, astfel încât $K \subset \Omega$ şi $\varphi = 0$ pe $\Omega \setminus K$.

Spaţiul $\mathcal{E}(\Omega)$ se înzestrează cu o *convergenţă* în felul următor: $\varphi_k \to \varphi$ în $\mathcal{E}(\Omega)$ dacă şi numai dacă, pentru orice multi-indice α şi orice compact $K \subset \Omega$, şirul $D^\alpha \varphi_k$ converge la $D^\alpha \varphi$ uniform pe K. Se observă că această convergenţă provine din înzestrarea spaţiului $\mathcal{E}(\Omega)$ cu familia de seminorme $\{p_{m,K} : \ K \text{ compact}, K \subset \Omega, \ m \in \mathbf{N}\}$, unde

$$p_{m,K}(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi(x)|, \quad \varphi \in \mathcal{E}(\Omega).$$

Pe spaţiul $\mathcal{D}(\Omega)$ definim *convergenţa* astfel: $\varphi_k \to \varphi$ în $\mathcal{D}(\Omega)$ dacă şi numai dacă există un compact $K \subset \Omega$ astfel încât pentru orice k, supp $\varphi_k \subset K$, supp $\varphi \subset K$ şi pentru orice $\alpha \in \mathbf{N}^n$, şirul $D^\alpha \varphi_k$ converge la $D^\alpha \varphi$ uniform pe K.

Este clar că are loc incluziunea

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$$

atât în sens algebric, ca spaţii liniare, cât şi topologic, în sensul că dacă $\varphi_k \to \varphi$ în $\mathcal{D}(\Omega)$, atunci, de asemenea, $\varphi_k \to \varphi$ în $\mathcal{E}(\Omega)$.

Un rol important în teoria distribuţiilor, ca de altfel şi în teoria spaţiilor L^p, îl are funcţia

$$\rho \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n), \quad \rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2 - 1}}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Este clar că supp $\rho = \overline{B}_1(0)$. Vom nota cu ρ_1, funcţia $c\rho$ în care constanta de normare c este astfel ca

$$c \int_{|x| \leq 1} \rho(x)\, dx = 1.$$

De asemenea, sunt utile funcţiile care se obţin din ρ_1 printr-o schimbare de variabile care face ca suportul să devină bila închisă de rază $1/k$,

$$\rho_k(x) = k^n \rho_1(kx).$$

Avem $\rho_k \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, supp $\rho_k = \overline{B}_{1/k}(0)$ şi $\int_{|x|\leq 1/k} \rho_k(x)\,dx = 1$. Şirul funcţiilor ρ_k, $k \in \mathbf{N}\setminus\{0\}$, se numeşte, din motive pe care le vom vedea de îndată, *şir regularizant.*

Spaţiile $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{E}(\Omega)$ şi $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ sunt *spaţiile fundamentale* ale teoriei distribuţiilor. Elementele lor se mai numesc şi *funcţii test.*

6.2 Distribuţii. Exemple. Operaţii cu distribuţii

Definiţia 6.1 O *distribuţie* pe Ω este o funcţională $u : D(\Omega) \to R$ liniară şi continuă în sensul că

$$\varphi_k \to \varphi \text{ în } \mathcal{D}(\Omega) \text{ implică } u(\varphi_k) \to u(\varphi) \text{ în } \mathbf{R}. \tag{6.1}$$

Mulţimea tuturor distribuţiilor pe Ω se notează cu $\mathcal{D}'(\Omega)$ şi se organizează în mod natural ca un spaţiu liniar.

In continuare, valoarea (sau acţiunea) $u(\varphi)$ a unei distribuţii $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ pe o funcţie test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ va fi notată prin (u,φ).

Spaţiul distribuţiilor $\mathcal{D}'(\Omega)$ se înzestrează de asemenea cu o *convergenţă*; spunem că $u_k \to u$ în $\mathcal{D}'(\Omega)$ dacă $(u_k,\varphi) \to (u,\varphi)$ oricare ar fi $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Această convergenţă provine din înzestrarea spaţiului $\mathcal{D}'(\Omega)$ cu familia de seminorme $\{p_\varphi : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$, unde

$$p_\varphi(u) = |(u,\varphi)|, \quad u \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

1. Distribuţii regulare

Fie $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Funcţiei f i se asociază în mod natural distribuţia u_f definită prin

$$(u_f,\varphi) = \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Deoarece, dacă $f,\ g \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ şi $u_f = u_g$, atunci $f = g$ a.p.t. pe Ω (a se vedea Brezis [5, Lemme IV.2]), este permisă identificarea distribuţiei u_f cu funcţia f. Astfel, $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ poate fi privit ca un subspaţiu liniar al lui $\mathcal{D}'(\Omega)$. O distribuţie u se numeşte *regulară* sau *de tip funcţie* dacă există o funcţie f local integrabilă pe Ω (adică $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$), astfel încât $u = u_f$. In mod analog, distribuţia u este de *clasă* C^m dacă $u = u_f$ pentru o anumită funcţie $f \in C^m(\Omega)$. In acest fel avem următoarele incluziuni de spaţii liniare

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset C^m(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega), \quad m \in \mathbf{N}.$$

De asemenea

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega), \quad 1 \le p \le \infty.$$

Spre exemplu, funcţia lui Heaviside

$$H : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \quad H(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

este o distribuţie regulară pe $\mathbf{R}$, numită distribuţia lui Heaviside. Acţiunea ei pe o funcţie test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ este următoarea:

$$(H, \varphi) = \int_0^\infty \varphi(x)\, dx = \int_{[0,\infty) \cap \operatorname{supp} \varphi} \varphi(x)\, dx.$$

Distribuţiile care nu sunt regulare se numesc distribuţii *singulare.*

2. Distribuţia lui Dirac

Unui punct $x_0 \in \Omega$ i se asociază distribuţia $\delta_{x_0} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definită prin

$$(\delta_{x_0}, \varphi) = \varphi(x_0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

numită *distribuţia lui Dirac* în x_0. Atunci când $x_0 = 0$, ea se notează simplu cu δ.

Este uşor să se arate că funcţionala δ_{x_0} astfel definită, este o distribuţie pe Ω. Se poate demonstra (vezi secţiunea de Probleme) că distribuţia lui Dirac este singulară.

Distribuţia lui Dirac este limita în spaţiul distribuţiilor, a unui şir de funcţii test. Mai precis, putem demonstra că $\rho_k \to \delta$ în $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ pentru $k \to \infty$. Intr-adevăr, dacă $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, atunci pentru $k \to \infty$, avem

$$\begin{aligned}(\rho_k, \varphi) &= \int_{|x| \le \frac{1}{k}} \rho_k(x)\, \varphi(x)\, dx = \varphi(\xi_k) \int_{|x| \le \frac{1}{k}} \rho_k(x)\, dx \\ &= \varphi(\xi_k) \to \varphi(0).\end{aligned}$$

Vom arăta ulterior că orice distribuţie pe Ω este limita în $\mathcal{D}'(\Omega)$ a unui şir de funcţii din $\mathcal{D}(\Omega)$, adică $\mathcal{D}(\Omega)$ este secvenţial dens în $\mathcal{D}'(\Omega)$.

3. Derivarea distribuţiilor

Mai mulţi operatori care acţionează în mod curent pe $\mathcal{D}(\Omega)$ pot fi extinşi la spaţiul $\mathcal{D}'(\Omega)$. Aşa sunt, de exemplu, operatorii de translaţie şi de derivare parţială. Reţeta acestor extinderi este simplă şi constă în trecerea operatorului de pe distribuţie pe funcţia test.

De exemplu, dacă $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ şi $y \in \mathbf{R}^n$, atunci *translaţia* lui u cu y, notată prin $\tau_y u$, se defineşte în modul următor: dacă u este o distribuţie de tip funcţie, adică $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$, atunci

$$(\tau_y u, \varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} u(x-y)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}^n} u(x)\varphi(x+y)\,dx = (u, \tau_{-y}\varphi)$$

unde $(\tau_{-y}\varphi)(x) = \varphi(x+y)$. Aceasta sugerează ca în general, pentru o distribuţie oarecare, să definim translaţia cu y prin formula

$$(\tau_y u, \varphi) = (u, \tau_{-y}\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n). \tag{6.2}$$

Pentru a defini derivata $\partial u/\partial x_j$ a distribuţiei $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, pornim de la egalitatea

$$\left(\frac{1}{h}\left[\tau_{he_j}u - u\right], \varphi\right) = \left(u, \frac{1}{h}\left[\tau_{-he_j}\varphi - \varphi\right]\right)$$

în care s-a notat cu e_j vectorul din $\mathbf{R}^n$ cu toate componentele nule exceptând-o pe a j-a care este egală cu 1. Deoarece pentru $h \to 0$, funcţia test din membrul drept tinde la $-\partial\varphi/\partial x_j$, este natural ca să definim distribuţia $\partial u/\partial x_j$ prin formula

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \varphi\right) = -\left(u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n).$$

In general, putem da următoarea definiţie.

Definiţia 6.2 Pentru orice distribuţie $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ şi orice multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^n$, *derivata* $D^\alpha u$ este distribuţia definită prin

$$(D^\alpha u, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(u, D^\alpha\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Propoziţia care urmează ne arată că derivata distribuţională este o generalizare a derivatei clasice.

Propoziţia 6.1 *Dacă* $f \in C^m(\Omega)$, *atunci pentru orice* $\alpha \in \mathbf{N}^n$ *cu* $|\alpha| \le m$, *avem*

$$u_{D^\alpha f} = D^\alpha u_f.$$

Demonstraţie. Este suficient să se demonstreze formula pentru $D^\alpha = \partial/\partial x_j$. Propunem această demonstraţie ca pe un exerciţiu. ■

De exemplu, derivata distribuţiei H a lui Heaviside este distribuţia lui Dirac. Intr-adevăr, pentru orice funcţie test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, avem

$$\begin{aligned} (H', \varphi) &= -(H, \varphi') = -\int_0^\infty \varphi'(x)\,dx \\ &= \varphi(0) - \varphi(\infty) = \varphi(0) = (\delta, \varphi). \end{aligned}$$

Aşadar, chiar dacă funcţia H nu este derivabilă pe $\mathbf{R}$ în sens obişnuit, ea este derivabilă în sens distribuţional.

4. **Produsul unei distribuţii cu o funcţie de clasă** C^∞

Fie $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ o distribuţie şi fie $a \in C^\infty(\Omega)$ o funcţie oarecare. Produsul au este o distribuţie pe Ω, definită astfel:

$$(au, \varphi) = (u, a\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Se constată imediat că este adevărată formula de derivare a produsului

$$\frac{\partial(au)}{\partial x_j} = \frac{\partial a}{\partial x_j} u + a \frac{\partial u}{\partial x_j}. \tag{6.3}$$

Proprietatea esenţială a distribuţiilor este calitatea lor de a fi indefinit derivabile parţial. Această proprietate, împreună cu operaţia produs definită mai sus, permite extinderea operatorilor diferenţiali clasici la spaţiul distribuţiilor. Astfel, putem defini operatorul

$$\begin{aligned} L &= L(D) : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega), \\ Lu &= \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha u \end{aligned}$$

unde $a_\alpha \in C^\infty(\Omega)$. Acţiunea distribuţiei Lu asupra unei funcţii test φ este aceaşi cu acţiunea lui u asupra funcţiei test $L(-D)\varphi$, unde $L(-D)$ este *transpusul* operatorului L, adică

$$L(-D) = \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha(x) D^\alpha.$$

Aşadar, oricare ar fi $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ şi $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, avem

$$(L(D)u, \varphi) = (u, L(-D)\varphi).$$

In particular, este adevărată formula

$$(\Delta u, \varphi) = (u, \Delta\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

5. Formula schimbării de variabile

Fie $\eta : \Omega \to \Omega_1$ un difeomorfism de clasă C^∞. Dacă $u \in \mathcal{D}(\Omega_1)$, atunci $u \circ \eta \in \mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ şi pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, avem

$$\begin{aligned}(u \circ \eta, \varphi) &= \int_\Omega u(\eta(y))\varphi(y)\,dy \\ &= \int_{\Omega_1} u(x)\varphi\left(\eta^{-1}(x)\right)\left|\det D\eta^{-1}(x)\right| dx\end{aligned}$$

unde $D\eta^{-1}(x)$ este matricea Jacobian a transformării $y = \eta^{-1}(x)$. Aceasta sugerează ca, în general, pentru orice $u \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$, să definim distribuţia $u \circ \eta \in \mathcal{D}'(\Omega)$ prin formula

$$(u \circ \eta, \varphi) = (u, \left|\det D\eta^{-1}\right| \varphi \circ \eta^{-1}), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{6.4}$$

Spre exemplu, dacă $\Omega = \Omega_1 = \mathbf{R}^n$ şi $\eta(x) = x - y$, unde y este un punct fixat, atunci $u \circ \eta$ este *translaţia* $\tau_y u$ de vector y, iar formula (6.4) devine (6.2). Dacă $\eta(x) = \lambda x$, unde $\lambda \neq 0$, atunci $u \circ \eta$ este *dilataţia* lui u cu λ şi pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$,

$$(u(\lambda x), \varphi(x)) = |\lambda|^{-n}\left(u(x), \varphi\left(\lambda^{-1}x\right)\right).$$

In această formulă, ca şi în altele care vor urma, notaţia $u(x)$ are doar rolul de a indica faptul că distribuţia u acţionează asupra unei funcţii test considerate ca funcţie de variabilă x.

In continuare, vom nota cu $\mathcal{R}u$ dilataţia lui u cu $\lambda = -1$, şi o vom numi *reflexia* lui u. Aşadar

$$(\mathcal{R}u, \varphi) = (u, \varphi(-x)), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n).$$

6. Convoluţia

In Capitolul 5 s-a definit produsul de convoluţie a două funcţii definite pe $\mathbf{R}^n$, prin

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy = \int_{\mathbf{R}^n} f(y)\,g(x-y)\,dy \tag{6.5}$$

şi s-a demonstrat teorema de bază (Teorema 5.1) privind existenţa convoluţiei a două funcţii.

Din această teoremă rezultă în particular, că există convoluţia oricăror două funcţii test $f, g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ şi $f * g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$; privită ca o distribuţie pe $\mathbf{R}^n$, funcţia $f * g$ acţionează asupra unei funcţii test φ în felul următor: $(f * g, \varphi) = (g, (\mathcal{R}f) * \varphi)$. Aceasta ne permite să extindem definiţia convoluţiei la cazul când g este o distribuţie oarecare pe $\mathbf{R}^n$. Aşadar, *produsul de convoluţie* dintre o funcţie $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ şi o distribuţie $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ este distribuţia $f * u$, definită prin

$$(f * u, \varphi) = (u, (\mathcal{R}f) * \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n).$$

Ca exemplu, să determinăm $f * \delta$. Avem

$$\begin{aligned}
(f * \delta, \varphi) &= (\delta, (\mathcal{R}f) * \varphi) = ((\mathcal{R}f) * \varphi)(0) \\
&= \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, \varphi(x)\, dx = (f, \varphi).
\end{aligned}$$

Deci $f * \delta = f$.

Un simplu exerciţiu arată că are loc formula de derivare a convoluţiei:

$$D^\alpha (f * u) = f * D^\alpha u = (D^\alpha f) * u.$$

Propoziţia următoare arată că produsul de convoluţie dintre o funcţie din $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ şi o distribuţie, este o distribuţie regulară, de clasă C^∞.

Propoziţia 6.2 *Dacă* $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ *şi* $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, *atunci* $f * u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ *şi*

$$(f * u)(x) = (u, \tau_x(\mathcal{R}f)), \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Demonstraţie. Fie $g(x) = (u, \tau_x(\mathcal{R}f))$. Dacă $x_k \to x$, atunci $\tau_{x_k}(\mathcal{R}f) \to \tau_x(\mathcal{R}f)$ în $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Rezultă că g este o funcţie continuă. Pentru un număr $h > 0$, notăm cu Δ_j^h operatorul diferenţă divizată $\left(\tau_{-he_j} - I\right)/h$ care aproximează operatorul $\partial/\partial x_j$. Atunci

$$\Delta_j^h g = \left(u, \tau_x \Delta_j^h(\mathcal{R}f)\right)$$

şi

$$\tau_x \Delta_j^h(\mathcal{R}f) \to \tau_x \frac{\partial(\mathcal{R}f)}{\partial x_j} \quad \text{pentru } h \to 0.$$

Rezultă că $g \in C^1(\mathbf{R}^n)$ şi

$$\frac{\partial g}{\partial x_j} = \left(u,\, \tau_x \frac{\partial (\mathcal{R}f)}{\partial x_j}\right).$$

Din aproape în aproape se arată că $g \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ şi

$$D^\alpha g = (u, \tau_x D^\alpha (\mathcal{R}f)), \quad \alpha \in \mathbf{N}^n.$$

Mai departe, să arătăm că distribuţia ataşată funcţiei g coincide cu $f * u$. Pentru aceasta, se scrie (g, φ) ca limita unor sume Riemann, după cum urmează:

$$\begin{aligned}(g,\varphi) &= \lim_{k\to\infty} \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^n} \varphi\left(\frac{\alpha}{k}\right)\left(u, \tau_{\alpha/k}(\mathcal{R}f)\right) k^{-n} \\ &= \lim_{k\to\infty} \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^n} \left(u, \varphi\left(\frac{\alpha}{k}\right)\tau_{\alpha/k}(\mathcal{R}f)\right) k^{-n}.\end{aligned}$$

Se arată apoi că

$$k^{-n} \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^n} \varphi\left(\frac{\alpha}{k}\right)\tau_{\alpha/k}(\mathcal{R}f) \to (\mathcal{R}f) * \varphi \quad \text{în } \mathcal{D}(\mathbf{R}^n),$$

de unde în final se deduce egalitatea

$$(g,\varphi) = (u, (\mathcal{R}f) * \varphi) = (f * u, \varphi).$$

■

Propoziţia 6.3 *Fie $\zeta \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ astfel încât $0 \le \zeta \le 1$, $\zeta(x) = 1$ pentru $|x| \le 1$ şi $\zeta(x) = 0$ pentru $|x| \ge 2$. Pentru orice $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, fie $\zeta_k(x) = \zeta(k^{-1}x)$. Atunci, oricare ar fi distribuţia $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, avem*

$$\rho_k * u \to u \quad \text{şi} \quad \zeta_k(\rho_k * u) \to u \quad \text{în } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$$

pentru $k \to \infty$. In consecinţă, orice distribuţie pe $\mathbf{R}^n$ este limita în $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ a unui şir de funcţii din $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ (adică, $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ este secvenţial dens în $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$).

Demonstraţie. Pentru $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ avem

$$(\rho_k * u, \varphi) = (u, (\mathcal{R}\rho_k) * \varphi).$$

Mai departe, pe baza unui exerciţiu de analiză clasică, se constată că $(\mathcal{R}\rho_k) * \varphi \to \varphi$ în $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Cea de a doua convergenţă se demonstrează în mod analog. Ultima afirmaţie rezultă din faptul că $\zeta_k(\rho_k * u) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. ∎

7. Distribuţii cu suport compact

Fie $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ şi ω o submulţime deschisă a lui Ω. Spunem că distribuţia u este *egală cu zero* pe ω, dacă $(u, \varphi) = 0$ pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$.

Se numeşte *suport* al distribuţiei $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, mulţimea

$$\operatorname{supp} u = \Omega \setminus \left\{ x \in \Omega : \ u \text{ este egală cu zero într-o vecinătate a lui } x \right\}.$$

Este clar că $\operatorname{supp} u$ este o mulţime închisă în Ω.

Se constată imediat că $\operatorname{supp} \delta_{x_0} = \{x_0\}$, $\operatorname{supp}(D^\alpha u) \subset \operatorname{supp} u$, iar dacă $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, atunci

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}} \quad (\text{aderenţa în } \Omega).$$

Propoziţia 6.4 *Dacă $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ şi $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ au suporturi disjuncte, atunci $(u, \varphi) = 0$.*

Demonstraţie. Pentru fiecare $y \in \operatorname{supp} \varphi$ se alege un deschis $\omega_y \subset \Omega$ astfel încât $y \in \omega_y$ şi u este egală cu zero pe ω_y. Alegem apoi o funcţie nenegativă $h_y \in \mathcal{D}(\Omega)$ cu supp $h_y \subset \omega_y$ şi $h_y(y) > 0$. Mulţimile deschise $(h_y > 0) := \{x \in \Omega : h_y(x) > 0\}$ formează o acoperire a compactului $\operatorname{supp} \varphi$. Fie $h_1, \ h_2, \ ..., \ h_m$ funcţiile corespunzătoare unei subacoperiri finite. Pentru orice $j \in \{1, 2, ..., m\}$, definim funcţia $\varphi_j = \varphi h_j / (h_1 + h_2 + ... + h_m)$ pe $\bigcup (h_j > 0)$, $\varphi_j = 0$ în rest. Avem $\varphi_j \in \mathcal{D}(\Omega)$ şi $\operatorname{supp} \varphi_j \subset \operatorname{supp} h_j \subset \omega_j$. Deci $(u, \varphi_j) = 0$, iar cum $\varphi = \sum \varphi_j$, deducem că $(u, \varphi) = 0$. ∎

Propoziţia următoare ne permite să identificăm mulţimea distribuţiilor pe Ω cu suport compact, cu mulţimea $\mathcal{E}'(\Omega)$ a tuturor funcţionalelor liniare şi continue pe spaţiul $\mathcal{E}(\Omega)$.

Propoziţia 6.5 (i) *Restricţia la $\mathcal{D}(\Omega)$ a oricărei funcţionale liniare şi continue pe $\mathcal{E}(\Omega)$, este o distribuţie pe Ω cu suport compact.*

(ii) *Orice distribuţie pe Ω cu suport compact se prelungeşte în mod unic la o funcţională liniară şi continuă pe $\mathcal{E}(\Omega)$.*

Demonstraţie. (i) Faptul că restricţia la $\mathcal{D}(\Omega)$ a oricărei funcţionale liniare şi continue pe $\mathcal{E}(\Omega)$ este o distribuţie pe Ω, rezultă pe baza incluziunii algebrico-topologice $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{E}(\Omega)$. Pentru a arătă că suportul unei astfel de distribuţii este compact, este suficient să observăm că o funcţională liniară $u : \mathcal{E}(\Omega) \to \mathbf{R}$ este continuă dacă şi numai dacă există $m = m(u) \in \mathbf{N}$ şi $c = c(u) \geq 0$ astfel încât, pentru orice $\varphi \in \mathcal{E}(\Omega)$,

$$|(u, \varphi)| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \max_{K_m} |D^\alpha \varphi|$$

unde $K_1 \subset K_2 \subset ...$ sunt submulţimi compacte ale lui Ω astfel încât $\Omega = \bigcup K_j$ (atunci supp $u \subset K_m$). Suficienţa condiţiei este imediată. Pentru necesitate, să presupunem contrarul. Atunci, oricare ar fi $m = c \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, ar exista $\varphi_m \in \mathcal{E}(\Omega)$ astfel ca

$$|(u, \varphi_m)| > m \sum_{|\alpha| \leq m} \max_{K_m} |D^\alpha \varphi_m|.$$

Putem presupune că membrul drept al inegalitătii anterioare este egal cu unu. Atunci se constată că $\varphi_m \to 0$ în $\mathcal{E}(\Omega)$, în timp ce $|(u, \varphi_m)| > 1$, fapt care contrazice continuitatea lui u.

(ii) Se alege o funcţie $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ astfel încât $\psi = 1$ într-o vecinătate a suportului distribuţiei u. Atunci, pe baza Propoziţiei 6.4, pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, avem $(u, \varphi) = (u, \psi\varphi)$. Este clar că aplicaţia $\widetilde{u} : \mathcal{E}(\Omega) \to \mathbf{R}$, $(\widetilde{u}, \varphi) = (u, \psi\varphi)$, este o prelungire a lui u la $\mathcal{E}(\Omega)$. Unicitatea prelungirii este o consecinţă a densitătii lui $\mathcal{D}(\Omega)$ în $\mathcal{E}(\Omega)$. ■

Propoziţia următoare arată că distribuţiile cu suport compact se pot prelungi la distribuţii pe $\mathbf{R}^n$. In plus, prelungirea cu zero în afara lui Ω este unică.

Propoziţia 6.6 *Fie $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$. Există o unică distribuţie $\widetilde{u} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ astfel încât $u = \widetilde{u}$ pe $\mathcal{D}(\Omega)$ şi* supp $\widetilde{u} \subset \Omega$.

Demonstraţie. Fie $\widetilde{u}$ o astfel de prelungire. Considerăm o funcţie $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ cu supp $\psi \subset \Omega$ şi $\psi = 1$ într-o vecinătate a compactului supp u. Atunci, pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, $(\widetilde{u}, \varphi) = (\widetilde{u}, \psi\varphi) = (u, \psi\varphi)$, de unde rezultă unicitatea prelungirii precum şi expresia acesteia. ■

Propoziţia 6.7 *Spaţiul $\mathcal{D}(\Omega)$ este secvenţial dens în $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demonstraţie. Se aleg deschişii mărginiţi $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset ... \subset \Omega$ cu $\overline{\Omega}_j \subset \Omega_{j+1}$ şi funcţiile $\psi_k \in \mathcal{D}(\Omega_{k+1})$ astfel încât $\psi_k = 1$ pe Ω_k.

Fie $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Atunci, se arată că $\psi_k u \to u$ în $\mathcal{D}'(\Omega)$. Notăm cu $u_k \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ unica prelungire cu zero a lui $\psi_k u$. Fie acum $j_k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ cu $1/j_k <$ dist (Ω_k, Ω_{k+1}). Se constată că $\rho_{j_k} * u_k \in \mathcal{D}(\Omega_{k+1})$ şi că $\rho_{j_k} * u_k \to u$ în $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ şi deci, în $\mathcal{D}'(\Omega)$. ■

Pentru $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ şi $v \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ se poate defini produsul de convoluţie $u * v = v * u$ prin formula

$$(u * v, \varphi) = (u, \varphi * (\mathcal{R}v)), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n).$$

8. Lema lui Weyl

*D*emonstrăm următorul rezultat de regularitate pentru funcţiile care satisfac ecuaţia lui Laplace în sens distribuţional.

Propoziţia 6.8 *Dacă $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ satisface ecuaţia $\Delta u = 0$ în $\mathcal{D}'(\Omega)$, atunci $u \in C^2(\Omega)$.*

Demonstraţie. Pentru orice $k \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, considerăm mulţimea $\Omega_k = \left\{x : \overline{B}_{1/k}(x) \subset \Omega\right\}$. Atunci, pentru orice $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_k)$, $\rho_k * \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ şi $\rho_k * u \in C^\infty(\Omega_k)$. Avem

$$\begin{aligned}(\Delta(\rho_k * u), \varphi) &= (\rho_k * u, \Delta\varphi) = (u, (\mathcal{R}\rho_k) * \Delta\varphi) \\ &= (u, \Delta((\mathcal{R}\rho_k) * \varphi)) = (\Delta u, (\mathcal{R}\rho_k) * \varphi) = 0.\end{aligned}$$

Rezultă că $\Delta(\rho_k * u) = 0$ pe Ω_k. Atunci, pe baza teoremei de medie a funcţiilor armonice, avem

$$(\rho_k * u)(x) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B_r(0)} (\rho_k * u)(x + y)\, dy$$

pentru orice $x \in \Omega_k$ şi r suficient de mic. Cum, pe baza Propoziţiei 5.1, $\rho_k * u \to u$ în $L^1(\Omega')$, pentru $k \to \infty$, oricare ar fi Ω' cu $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, deducem că $\rho_k * u \to u$ uniform pe orice compact inclus în Ω. Corolarul 3.11 garantează că u este o funcţie armonică pe Ω. ■

6.3 Transformarea Fourier a distribuţiilor temperate

In Capitolul 5 am definit transformarea Fourier pe spaţiul de funcţii complexe $L^1(\mathbf{R}^n)$ prin

$$T[f](y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\, e^{-ix\cdot y} dx, \quad y \in \mathbf{R}^n$$

unde, reamintim, $x \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$. De asemenea, s-a demonstrat că T este un automorfism al spaţiului $\mathcal{S}$. Reamintim formulele:

$$T[f * g] = (2\pi)^{n/2}\, T[f]\, T[g] \tag{6.6}$$

$$D^{\beta} T[f] = T\left[(-ix)^{\beta} f(x)\right] \tag{6.7}$$

$$T\left[D^{\beta} f\right](y) = (iy)^{\beta}\, T[f](y) \tag{6.8}$$

$$T[f(x - x_0)](y) = e^{-iy\cdot x_0} T[f(x)](y) \tag{6.9}$$

$$T[f(\lambda x)](y) = |\lambda|^{-n}\, T[f(x)]\left(\lambda^{-1} y\right) \tag{6.10}$$

$$T^{-1}[f](y) = T[f(-x)](y) = T[f](-y) \tag{6.11}$$

In cele ce urmează vom extinde transformarea Fourier la spaţiul mai larg al distribuţiilor temperate. In particular, vom analiza transformarea Fourier a funcţiilor din $L^2(\mathbf{R}^n)$.

1. Transformarea Fourier pe spaţiul $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ al distribuţiilor temperate

Definiţia 6.3 Numim *distribuţie temperată* pe $\mathbf{R}^n$, orice funcţională $u : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{C}$ liniară şi continuă.

Notăm cu $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ spaţiul tuturor distribuţiilor temperate pe $\mathbf{R}^n$. Spunem că $u_k \to u$ în $\mathcal{S}'$, pentru $k \to \infty$, dacă $(u_k, \varphi) \to (u, \varphi)$ pentru orice $\varphi \in \mathcal{S}$. Cum $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$ algebric şi topologic, rezultă că au loc şi incluziunule

$$\mathcal{E}'(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$$

algebric şi topologic. De asemenea, pentru $1 \leq q \leq \infty$, din $\mathcal{S} \subset L^q(\mathbf{R}^n)$ algebric şi topologic, deducem că $L^p(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ algebric şi topologic, unde $1/p + 1/q = 1$.

De exemplu, orice funcţie constantă c este în $\mathcal{S}'$, dar $c \notin \mathcal{S}$ dacă $c \neq 0$.

Operatorul T se prelungeşte la $\mathcal{S}'$ ca operator liniar, continuu şi inversabil (automorfism al lui $\mathcal{S}'$), astfel:

$$T : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}',$$
$$(T[u], \varphi) = (u, T[\varphi]), \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

La fel, avem

$$T^{-1} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}',$$
$$\left(T^{-1}[u], \varphi\right) = \left(u, T^{-1}[\varphi]\right), \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Spre exemplu, să calculăm transformata Fourier a distribuţiei δ a lui Dirac. Pentru orice $\varphi \in \mathcal{S}$, avem

$$\begin{aligned}(T[\delta], \varphi) &= (\delta, T[\varphi]) = T[\varphi](0) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) e^{-ix\cdot 0}\, dx = \left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}, \varphi\right).\end{aligned}$$

Deci

$$T[\delta] = (2\pi)^{-n/2} \quad \text{şi} \quad T^{-1}[1] = (2\pi)^{n/2}\,\delta.$$

Propunem cititorului să arate că formulele (6.7)-(6.11) sunt valabile şi în $\mathcal{S}'$. De asemenea, (3.29) are loc pentru $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ şi $g \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$.

2. Transformarea Fourier pe spaţiul $L^2(\mathbf{R}^n)$

Am văzut că $\mathcal{S} \subset L^2(\mathbf{R}^n) \subset \mathcal{S}'$ şi că transformarea Fourier T este un automorfism al lui $\mathcal{S}$ şi de asemenea, al lui $\mathcal{S}'$. Se pune în mod natural întrebarea: ce se poate spune despre transformatele Fourier ale funcţiilor din $L^2(\mathbf{R}^n)$? Răspunsul este dat de teorema care urmează.

Propoziţia 6.9 (Plancherel) *Transformarea Fourier este un automorfism al spaţiului $L^2(\mathbf{R}^n)$. In plus*

$$|u|_{L^2} = |T[u]|_{L^2}, \qquad u \in L^2(\mathbf{R}^n)$$

(*adică, T este o izometrie pe $L^2(\mathbf{R}^n)$*).

Demonstraţie. Fie $u \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Avem $T[u] \in \mathcal{S}'$ şi folosind (5.4),

$$\begin{aligned}|(T[u], \varphi)| &= |(u, T[\varphi])| = |(u, T[\varphi])_{L^2}| \\ &\leq |u|_{L^2} |T[\varphi]|_{L^2} = |u|_{L^2} |\varphi|_{L^2}, \quad \varphi \in \mathcal{S}.\end{aligned}$$

Inegalitatea se extinde prin densitate la toate funcţiile $\varphi \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Rezultă că $T[u]$ defineşte o funcţională liniară şi continuă pe spaţiul Hilbert $L^2(\mathbf{R}^n)$. In consecinţă, $T[u] \in L^2(\mathbf{R}^n)$ şi $|T[u]|_{L^2} \leq |u|_{L^2}$. Inegalitatea contrară se obţine înlocuind u cu $T^{-1}[u]$. ■

3. Convoluţia în $\mathcal{S}'$

In Secţiunea 5.1 s-a văzut că dacă $f, g \in \mathcal{S}$, atunci $f * g \in \mathcal{S}$ şi

$$f * g = T^{-1}\left[(2\pi)^{n/2} T[f]\, T[g]\right]. \tag{6.12}$$

De asemenea, în secţiunea anterioară s-a vorbit despre convoluţia dintre o funcţie test şi o distribuţie pe $\mathbf{R}^n$. Folosind aceaşi formulă putem defini convoluţia dintre o funcţie din $\mathcal{S}$ şi o distribuţie temperată după cum urmează:

Dacă $f \in \mathcal{S}$ şi $g \in \mathcal{S}'$, atunci prin $f * g$ se înţelege distribuţia temperată definită prin formula

$$(f * g, \varphi) = (g, (\mathcal{R}f) * \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

Formula (6.12) rămâne valabilă şi pentru acest caz mai general (Exerciţiu).

Cititorul interesat să îşi completeze cunoştinţele de teoria distribuţiilor şi transformare Fourier este îndemnat să consulte lucrările Bony [4], Gelfand–Şilov [15], Schwartz [47] şi Vladimirov [57].

6.4 Probleme

1) Mai multe afirmaţii referitoare la distribuţii au fost făcute fără nici un fel de explicaţii; demonstraţiile lor sunt simple şi în general necesită doar manipularea definiţiilor. Ele reprezintă o primă categorie de exerciţii de teoria distribuţiilor. Spre exemplu, demonstraţi că funcţionalele a) $D^\alpha u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbf{R}$, $(D^\alpha u, \varphi) = (-1)^{|\alpha|}(u, D^\alpha \varphi)$ b) $\delta : \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \to \mathbf{R}$, $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$, sunt distribuţii (adică, sunt liniare şi continue).

2) Demonstraţi că distribuţia lui Dirac δ nu este regulară.

Indicaţie. Dacă am presupune contrarul, ar exista o funcţie $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)$ astfel încât

$$(\delta, \varphi) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n).$$

Alegând $\varphi(x) = \varphi_k(x) = \rho(kx)$, unde $\rho(x) = e^{\frac{1}{|x|^2-1}}$ pentru $|x| < 1$ şi $\rho(x) = 0$ pentru $|x| \geq 1$, am obţine

$$(\delta, \varphi_k) = \int_{|x|<1/k} f(x)\, e^{\frac{1}{k^2|x|^2-1}} dx = \varphi_k(0) = e^{-1}.$$

La limită, pentru $k \to \infty$, se obţine contradicţia $0 = e^{-1}$.

3) Demonstraţi că incluziunea $L^p(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, este şi topologică.

Indicaţie. Avem de arătat că $f_k \to f$ în $L^p(\Omega)$ implică $u_{f_k} \to u_f$ în $\mathcal{D}'(\Omega)$. Aceasta rezultă din

$$|(u_{f_k} - u_f, \varphi)| = \left| \int_\Omega (f_k - f)\, \varphi\, dx \right| \leq |f_k - f|_{L^p} |\varphi|_{L^q}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

unde $1/p + 1/q = 1$.

4) Calculaţi derivata distribuţională f' a următoarelor funcţii pe $\mathbf{R}$ a) $f(x) = |x|$ b) $f(x) = \text{sign } x$ c) $f(x) = |\sin x|$.

Indicaţie. a)

$$\begin{aligned}
(f', \varphi) &= -(f, \varphi') = -\int_{\mathbf{R}} f(x)\, \varphi'(x)\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} x\varphi'(x)\, dx - \int_0^\infty x\varphi'(x)\, dx \\
&= x\varphi(x)\, |_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\, dx - x\varphi(x)\, |_0^\infty + \int_0^\infty \varphi(x)\, dx \\
&= -\int_{-\infty}^{0} \varphi(x)\, dx + \int_0^\infty \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbf{R}} \text{sign } x\ \varphi(x)\, dx \\
&= (\text{sign } x, \varphi).
\end{aligned}$$

Deci $f'(x) = \text{sign } x$. b) $f' = 2\delta$.

5) Calculaţi derivatele distribuţionale $\partial f/\partial x_1$ şi $\partial^2 f/\partial x_1^2$ ale funcţiei caracteristice f a primului cadran $\{x \in \mathbf{R}^2 :\ x_1 > 0,\ x_2 > 0\}$.

6) Arătaţi că a) $a\delta = a(0)\,\delta$ pentru orice $a \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ b) $x^k \delta^{(m)} = 0$ pentru $m = 0, 1, ..., k-1$.

7) Fie $u, v \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$. Dacă $\varphi * (\mathcal{R}v) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, atunci funcţionala

$$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \longmapsto (u, \varphi * (\mathcal{R}v))$$

este o distribuţie pe $\mathbf{R}^n$, numită *convoluţia distribuţiilor* u şi v şi notată cu $u * v$.

Să se demonstreze că dacă există convoluţia $u * v$, atunci există de asemenea $D^\alpha u * v$, $u * D^\alpha v$ şi au loc egalităţile

$$D^\alpha (u * v) = D^\alpha u * v = u * D^\alpha v.$$

8) Fie $L(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ un operator diferenţial cu coeficienţi constanţi. Se numeşte *soluţie fundamentală* a ecuaţiei $L(D) u = 0$, orice distribuţie $N \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ pentru care $L(D) N = \delta$.

Demonstraţi că dacă N este soluţie fundamentală a ecuaţiei $L(D) = 0$, $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ şi există convoluţia $N * f$, atunci $L(D)(N * f) = f$ (adică $u = N * f$ este o soluţie a ecuaţiei neomogene $L(D) u = f$).

9) Să se arate că ecuaţia diferenţială ordinară cu coeficienţi constanţi

$$Lu := u^{(m)} + \sum_{k=0}^{m-1} a_k u^{(k)} = 0 \tag{6.13}$$

admite soluţia fundamentală $N(x) = z(x) H(x)$, unde H este funcţia lui Heaviside iar z este soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases} Lz = 0 \\ z(0) = z'(0) = ... = z^{(m-2)} = 0, \ z^{(m-1)} = 1. \end{cases}$$

Indicaţie. $(zH)' = z'H + zH' = z'H + z\delta = z'H + z(0)\delta = z'H$. In mod analog, $(zH)'' = z''H, ..., (zH)^{(m-1)} = z^{(m-1)}H$ iar $(zH)^{(m)} = z^{(m)}H + \delta$. Rezultă că $L(zH) = L(z) H + \delta = \delta$.

10) Să se demonstreze că soluţiile din $\mathcal{D}'(a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq \infty$, ale ecuaţiei omogene (6.13) coincid cu soluţiile clasice.

Indicaţie. Este suficient să se discute cazul $Lu := u'$; cazul general rezultă scriind ecuaţia sub forma unui sistem diferenţial de forma $v' + Av = 0$, sau încă $\left(ve^{xA}\right)' = 0$.

Egalitatea $u' = 0$ este echivalentă cu $(u, \varphi') = 0$ pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$. Rezultă că $(u, \psi) = 0$ oricare ar fi $\psi \in \mathcal{D}(a, b)$ satisfăcând $\int_a^b \psi dx = 0$. Fixând o funcţie $\chi \in \mathcal{D}(a, b)$ cu $\int_a^b \chi dx = 1$, obţinem

$$(u, \varphi) = \left(u, \chi \int_a^b \varphi dx + \varphi - \chi \int_a^b \varphi dx\right) = (u, \chi) \int_a^b \varphi dx = (c, \varphi)$$

adică $u = c$.

11) Să se rezolve în $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ ecuaţia $u'' - a^2 u = \delta_{x_0}$.

Indicaţie. Se folosesc Problemele 8, 9 şi 10. Rezultă $u = C_1 \text{sh}\, ax + C_2 \text{ch}\, ax + N * \delta_{x_0} = C_1 \text{sh}\, ax + C_2 \text{ch}\, ax + N(x - x_0)$, unde $N(x) = a^{-1} H(x) \,\text{sh}\, ax$.

12)* Să se demonstreze că funcţia N dată de (3.1) este soluţie fundamentală a ecuaţiei lui Laplace.

13)* Funcţia

$$N(x,t) = \frac{H(t)}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$$

este soluţie fundamentală a ecuaţiei căldurii $Lu := u_t - \Delta u = 0$, adică $LN = \delta$ în $\mathcal{D}'\left(\mathbf{R}^{n+1}\right)$.

14)* Să se arate că o soluţie fundamentală a ecuaţiei undelor $Lu := u_{tt} - \Delta u$ este

$$N(x,t) = \frac{H(t)}{(2\pi)^{n/2}} T^{-1} \left[\frac{\sin |y|\, t}{|y|}\right](x).$$

Pentru $n = 1$, $N(x,t) = \frac{1}{2} H(t - |x|)$; pentru $n = 2$, $N(x,t) = \frac{H(t-|x|)}{2\pi\sqrt{t^2 - |x|^2}}$; pentru $n = 3$, $N(x,t) = \frac{H(t)}{4\pi t} \delta_{\Sigma_t}(x)$, unde Σ_R este sfera cu centru în origine şi de rază R, iar δ_{Σ_R} este distribuţia pe $\mathbf{R}^3$, definită prin $(\delta_{\Sigma_R}, \varphi) = \int_{\Sigma_R} \varphi(x)\, dx$, $\varphi \in \mathcal{D}\left(\mathbf{R}^3\right)$.

*Indica*ţie. Pentru rezolvarea problemelor 12-14, a se vedea Trif [56] şi Vladimirov [57].

15) Calculaţi transformata Fourier a distribuţiei $u \in \mathcal{S}'$ unde a) $u = \delta_{x_0}$ b) $u = x^\alpha$ c) $u = D^\alpha \delta$.

16) Să se demonstreze că pentru orice $f \in \mathcal{S}'$ există o soluţie unică $u \in \mathcal{S}'$ a ecuaţiei $u - \Delta u = f$, dată de formula

$$u = T^{-1}\left[\left(1 + |x|^2\right)^{-1} T[f]\right].$$

In particular, dacă $f \in \mathcal{S}$, atunci $u \in \mathcal{S}$.

Capitolul 7
Spaţii Sobolev

In Partea I am făcut deja cunoştinţă cu spaţiile Sobolev $H_0^1(\Omega)$ şi $H^1(\Omega)$, ataşate normelor energetice ale problemelor Dirichlet şi Neumann cu condiţiile la linită omogene. Mai exact, pentru o submulţime deschisă şi mărginită Ω a lui $\mathbf{R}^n$, s-a definit $H_0^1(\Omega)$ ca fiind completatul spaţiului $C_0^1(\overline{\Omega})$ in raport cu norma energetică corespunzătoare problemei Dirichlet, iar $H^1(\Omega)$ ca fiind completatul lui $\{C^1(\Omega) : u,\ \partial u/\partial x_j \in L^2(\Omega),\ j = 1, 2, ..., n\}$ în raport cu norma energetică a problemei Neumann. Aşadar, în ambele cazuri, spaţiul Sobolev s-a definit pornind de la un subspaţiu al său, prin completare.

In aceast capitol, vom prezenta un alt mod de a introduce spaţiile Sobolev, pornind de această dată de la un supraspaţiu al lor şi utilizând derivatele distribuţionale. Astfel, $H^1(\Omega)$ este spaţiul tuturor funcţiilor u din $L^2(\Omega)$ ale căror derivate distribuţionale $\partial u/\partial x_j,\ j = 1, 2, ..., n$ aparţin de asemenea lui $L^2(\Omega)$, adică sunt distribuţii regulare, funcţii din $L^2(\Omega)$.

7.1 Spaţiile Sobolev $H^m(\Omega)$

Definiţia 7.1 Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi fie $m \in \mathbf{N}$. Se defineşte *spaţiul Sobolev* $H^m(\Omega)$ prin

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ pentru orice } \alpha \text{ cu } |\alpha| \leq m \right\}.$$

Subliniem faptul că în definiţia de mai sus derivata $D^\alpha u$ este în sens distribuţional. Aşadar elementele spaţiului $H^m(\Omega)$ sunt funcţii din $L^2(\Omega)$ ale căror derivate distribuţionale până la ordinul m sunt distribuţii de tip funcţie, asociate unor funcţii de asemenea din $L^2(\Omega)$.

Dacă $u \in H^m(\Omega)$ şi α este un multi-indice cu $|\alpha| \leq m$, atunci pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, avem

$$(D^\alpha u, \varphi) = \int_\Omega (D^\alpha u)(x)\,\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x)\,(D^\alpha \varphi)(x)\,dx. \tag{7.1}$$

Spaţiul $H^m(\Omega)$ este un subspaţiu liniar al lui $L^2(\Omega)$. El se înzestrează cu produsul scalar

$$(u,v)_{H^m} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2} \tag{7.2}$$

şi cu norma corespunzătoare

$$|u|_{H^m} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha u|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Este important cazul particular $m = 1$, în care

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \ \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(\Omega), \ j = 1, 2, ..., n \right\}$$

şi când produsul scalar şi norma au expresiile:

$$(u,v)_{H^1} = (u,v)_{L^2} + \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial v}{\partial x_k} \right)_{L^2} = \int_\Omega (uv + \nabla u \cdot \nabla v)\,dx$$

$$|u|_{H^1}^2 = \int_\Omega \left(u^2 + |\nabla u|^2 \right) dx.$$

Propoziţia 7.1 *Spaţiul $H^m(\Omega)$ înzestrat cu produsul scalar* (7.2) *este un spaţiu Hilbert.*

Demonstraţie. Proprietatea este o consecinţă directă a completitudinii lui $L^2(\Omega)$. Intr-adevăr, fie (u_k) un şir fundamental în $H^m(\Omega)$. Deci $u_k \in H^m(\Omega)$ şi $|u_k - u_j|_{H^m} \to 0$ pentru $k, \ j \to \infty$. Ţinând cont de expresia normei pe $H^m(\Omega)$, deducem că şirurile (u_k), $(D^\alpha u_k)$, $|\alpha| \leq m$, sunt fundamentale în $L^2(\Omega)$. Rezultă că există funcţiile u, $u_\alpha \in L^2(\Omega)$, $|\alpha| \leq m$, astfel încât $u_k \to u$ şi $D^\alpha u_k \to u_\alpha$ în $L^2(\Omega)$ ($|\alpha| \leq m$). Rămâne să arătăm că pentru orice α, $u_\alpha = D^\alpha u$. Intr-adevăr, pe baza lui (7.1), avem

$$(D^\alpha u_k, \varphi)_{L^2} = (-1)^{|\alpha|} (u_k, D^\alpha \varphi)_{L^2}$$

de unde, folosind faptul că incluziunea $L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ este topologică, deducem

$$(u_\alpha, \varphi)_{L^2} = (-1)^{|\alpha|} (u, D^\alpha \varphi)_{L^2}$$

adică

$$(u_\alpha, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (u, D^\alpha \varphi).$$

Aşadar $u_\alpha = D^\alpha u$ şi deci, $u_k \to u$ în $H^m(\Omega)$. ■

Au loc incluziunile:

$$C_0^\infty(\Omega) \subset H^m(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

Are loc următoarea teoremă de caracterizare a spaţiului $H^m(\Omega)$.

Teorema 7.1 *Fie $u \in L^2(\Omega)$. Condiţia necesară şi suficientă ca u să aparţină spaţiului $H^m(\Omega)$ este ca să existe o constantă C astfel încât*

$$\left| \int_\Omega u\, D^\alpha \varphi \, dx \right| \le C\, |\varphi|_{L^2}, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega),\ \alpha \in \mathbf{N}^n,\ |\alpha| \le m. \qquad (7.3)$$

Demonstraţie. *Necesitatea.* Dacă $u \in H^m(\Omega)$, atunci pe baza inegalitătii lui Hölder, avem

$$\left| \int_\Omega u\, D^\alpha \varphi \, dx \right| = \left| (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \varphi\, D^\alpha u \, dx \right| \le |u|_{H^m} |\varphi|_{L^2}.$$

Suficienţa. Fie $\alpha \in \mathbf{N}^n$. Inegalitatea (7.3) arată că funcţionala $\varphi \longmapsto \int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx$ este liniară şi continuă pe subspaţiul dens $C_0^\infty(\Omega)$ al lui $L^2(\Omega)$. Conform teoremei lui Hahn–Banach, ea admite o prelungire până la o funcţională liniară şi continuă F pe $L^2(\Omega)$. Teorema de reprezentare a lui Riesz implică atunci că există $v_\alpha \in L^2(\Omega)$ astfel încât $(F, \varphi)_{L^2} = (v_\alpha, \varphi)_{L^2}$ pentru orice $\varphi \in L^2(\Omega)$. In particular,

$$\int_\Omega u\, D^\alpha \varphi \, dx = \int_\Omega v_\alpha \varphi \, dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

de unde $D^\alpha u = (-1)^{|\alpha|} v_\alpha \in L^2(\Omega)$. Aşadar, $u \in H^m(\Omega)$. ■

Observaţia 7.1 Conform Teoremei 7.1, o funcţie u din $L^2(\Omega)$ aparţine spaţiului $H^1(\Omega)$ dacă şi numai dacă există o constantă $C > 0$ cu

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \right| \leq C |\varphi|_{L^2}, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \; j = 1, 2, ..., n.$$

Menţionăm că, mai general, dacă $1 \leq p \leq \infty$, se defineşte *spaţiul Sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$ prin

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \; D^\alpha u \in L^p(\Omega), \; |\alpha| \leq m\}.$$

Acest spaţiu se înzestrează cu norma

$$|u|_{W^{m,p}} = \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|_{L^p}$$

sau cu norma echivalentă $\left(\sum_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha u|_{L^p}^p\right)^{1/p}$. Spaţiul $W^{m,p}(\Omega)$ este un spaţiu Banach. Este clar că $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

Observaţia 7.2 Un rezultat datorat lui Meyers şi Serrin (vezi Adams [1, p. 52]) stabileşte că pentru $1 \leq p < \infty$, spaţiul $W^{m,p}(\Omega)$ coincide cu completatul lui $\{u \in C^m(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$ în raport cu norma $|u|_{m,p} = \sum_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha u|_{L^p}$. Aşadar, pentru $m = 1$, Definiţia 7.1 este echivalentă cu definiţia dată spaţiului $H^1(\Omega)$ în Secţiunea 3.13.

7.2 Operatorul de prelungire

Este adeseori util ca anumite proprietăti ale funcţiilor din $H^m(\Omega)$ să fie stabilite mai întâi pentru $H^m(\mathbf{R}^n)$, iar apoi să se obţină prin intermediul unui operator de prelungire care unei funcţii $u \in H^m(\Omega)$ îi asociază o funcţie $\widetilde{u} \in H^m(\mathbf{R}^n)$. Un astfel de operator de prelungire există dacă Ω este suficient de neted.

In continuare vom folosi notaţiile:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{R}_+^n = \left\{x \in \mathbf{R}^n : \; x = (x', x_n), \; x' \in \mathbf{R}^{n-1}, \; x_n > 0\right\} \\
&Q = \left\{x \in \mathbf{R}^n : \; x = (x', x_n), \; x' \in \mathbf{R}^{n-1}, \; |x'| < 1, \; |x_n| < 1\right\} \\
&Q_+ = Q \cap \mathbf{R}_+^n \\
&Q_0 = \left\{x \in \mathbf{R}^n : \; x = (x', 0), \; x' \in \mathbf{R}^{n-1}, \; |x'| < 1\right\}.
\end{aligned}$$

Teorema 7.2 *Fie* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *o mulţime deschisă, de clasă* C^1 *şi cu frontiera* $\partial\Omega$ *mărginită, sau* $\Omega = \mathbf{R}^n_+$. *Atunci există un operator liniar* $P : H^1(\Omega) \to H^1(\mathbf{R}^n)$ *şi o constantă* $C > 0$ *depinzând numai de* Ω, *astfel încât pentru orice* $u \in H^1(\Omega)$ *să avem:*

(i) $(Pu)(x) = u(x), \quad x \in \Omega$

(ii) $|Pu|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq C\,|u|_{L^2(\Omega)}$

(iii) $|Pu|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \leq C\,|u|_{H^1(\Omega)}$.

Observaţia 7.3 Inegalitatea (iii) exprimă continuitatea operatorului P. La fel, (ii) exprimă continuitatea lui P în raport cu norma L^2.

Pentru demonstraţie avem nevoie de următoarea lemă.

Lema 7.1 *Dacă* $u \in H^1(Q_+)$, *atunci prelungirea sa prin reflexie*

$$u^*(x', x_n) = \begin{cases} u(x', x_n) & \textit{dacă } x_n > 0 \\ u(x', -x_n) & \textit{dacă } x_n < 0 \end{cases}$$

aparţine spaţiului $H^1(Q)$ *şi*

$$|u^*|_{L^2(Q)} = \sqrt{2}\,|u|_{L^2(Q_+)}, \quad |u^*|_{H^1(Q)} = \sqrt{2}\,|u|_{H^1(Q_+)}. \tag{7.4}$$

Demonstraţie. Este clar că $u^* \in L^2(Q)$ şi că are loc prima relaţie din (7.4). Demonstraţia va fi completă dacă arătăm că au loc formulele:

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial u}{\partial xj}\right)^*, \quad j = 1,\ 2,\ ...,\ n-1 \tag{7.5}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_n} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^\diamond \tag{7.6}$$

unde $(\partial u/\partial x_j)^*$ este prelungirea prin reflexie a lui $\partial u/\partial x_j$, iar pentru o funcţie f definită pe Q_+,

$$f^\diamond(x', x_n) = \begin{cases} f(x', x_n) & \text{dacă } x_n > 0 \\ -f(x', -x_n) & \text{dacă } x_n < 0. \end{cases}$$

Pentru demonstrarea lor să consideră o funcţie $\eta \in C^\infty(\mathbf{R})$ astfel încât $\eta(t) = 0$ pentru $t < 1/2$ şi $\eta(t) = 1$ pentru $t > 1$. Vom folosi şirul (η_k) de funcţii din $C^\infty(\mathbf{R})$, unde $\eta_k(t) = \eta(kt)$. Fie acum $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$. Se constată imediat că pentru $1 \leq j \leq n-1$, avem

$$\int_Q u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx$$

unde $\psi(x', x_n) = \varphi(x', x_n) + \varphi(x', -x_n)$. Deşi în general $\psi \notin \mathcal{D}(Q_+)$, totuşi $\eta_k \psi := \eta_k(x_n)\psi(x', x_n) \in \mathcal{D}(Q_+)$. Deci

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial(\eta_k \psi)}{\partial x_j} dx = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_j} \eta_k \psi \, dx.$$

Cum însă $\partial(\eta_k \psi)/\partial x_j = \eta_k \partial\psi/\partial x_j$, avem

$$\int_{Q_+} u\eta_k \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_j} \eta_k \psi \, dx.$$

Trecând la limită cu $k \to \infty$ şi folosind teorema convergenţei dominate a lui Lebesgue, găsim

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial \psi}{\partial x_j} dx = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_j} \psi \, dx.$$

Aşadar

$$\int_{Q} u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_j} \psi \, dx = -\int_{Q} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^* \varphi \, dx$$

de unde rezultă (7.5).

Pentru a demonstra (7.6), fie $\varphi \in \mathcal{D}(Q)$. Avem

$$\int_{Q} u^* \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} dx = \int_{Q_+} u \frac{\partial \chi}{\partial x_n} dx$$

unde $\chi(x', x_n) = \varphi(x', x_n) - \varphi(x', -x_n)$. La fel ca mai sus, $\eta_k \chi \in \mathcal{D}(Q_+)$ şi

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial(\eta_k \chi)}{\partial x_n} dx = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_n} \eta_k \chi \, dx.$$

Dar $\partial(\eta_k \chi)/\partial x_n = \eta_k \partial\chi/\partial x_n + k\eta'(kx_n)\chi$. Să arătăm că

$$\int_{Q_+} uk\eta'(kx_n)\chi \, dx \to 0 \quad \text{pentru } k \to \infty.$$

Pentru aceasta, observăm că $\chi(x', 0) = 0$. Rezultă că există o constantă M astfel încât $|\chi(x', x_n)| \leq M|x_n|$ pe Q. Mai departe, dacă notăm $C = \sup\limits_{t\in[0,1]} |\eta'(t)|$, obţinem

$$\left|\int_{Q_+} uk\eta'(kx_n)\chi \, dx\right| \leq kMC \int_{x_n \in \left(0, \frac{1}{k}\right)} |u| \, x_n \, dx \leq MC \int_{x_n \in \left(0, \frac{1}{k}\right)} |u| \, dx.$$

Aşadar, pentru $k \to \infty$,

$$\int_{Q_+} u \frac{\partial \chi}{\partial x_n} dx = -\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_n} \chi \, dx.$$

In final se observă că

$$\int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_n} \chi \, dx = \int_Q \left(\frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^{\diamond} \varphi \, dx.$$

■

Demonstraţia Teoremei 7.2. Concluzia Lemei 7.1 rămâne valabilă, cu aceaşi demonstraţie, dacă în locul lui Q şi Q_+ se consideră $\mathbf{R}^n$, respectiv $\mathbf{R}^n_+$, ceea ce demonstrează Teorema 7.2 pentru $\Omega = \mathbf{R}^n_+$.

Dacă Ω este de clasă C^1 şi cu $\partial\Omega$ compactă, atunci există o acoperire finită $(U_k)_{1 \le k \le m}$ a lui $\partial\Omega$ cu mulţimi deschise şi aplicaţiile inversabile $\eta_k : Q \to U_k$ satisfăcând: $\eta_k \in C^1(\overline{Q}),\ \eta_k^{-1} \in C^1(\overline{U}_k),\ \eta_k (Q_+) = U_k \cap \Omega$ şi $\eta_k (Q_0) = U_k \cap \partial\Omega$. Considerăm partiţia unităţii subordonată familiei $\{U_0,\ U_1,\ ...,\ U_m\}$, unde $U_0 = \Omega \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{m} \overline{U}_k$, adică funcţiile $\theta_0,\ \theta_1,\ ...,\ \theta_m$ având următoarele proprietăţi:

$$\theta_k \in C_0^\infty (U_k), \quad 0 \le \theta_k \le 1, \quad \sum_{k=0}^{m} \theta_k = 1 \ \text{ pe } \ \Omega \cup \bigcup_{k=1}^{m} U_k.$$

Fie $u \in H^1 (\Omega)$. Putem scrie $u = \sum_{k=0}^{m} \theta_k u = \sum_{k=0}^{m} u_k$, unde s-a notat $u_k = \theta_k u$. Vom defini acum prelungirea la $\mathbf{R}^n$ a fiecărei funcţii $\theta_k,\ k = 0,\ 1,\ ...,\ m$.

a) *Prelungirea lui* u_0 se defineşte astfel

$$\widetilde{u}_0 (x) = \begin{cases} u_0 (x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbf{R}^n \setminus \Omega. \end{cases}$$

Conform formulei (6.3), $\partial\widetilde{u}_0/\partial x_j = \theta_0 \partial u/\partial x_j + u \partial\theta_0/\partial x_j$ în $\mathcal{D}' (\mathbf{R}^n)$, de unde rezultă că $\widetilde{u}_0 \in H^1 (\mathbf{R}^n)$ şi

$$|\widetilde{u}_0|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = |u|_{L^2(\Omega)}, \quad |\widetilde{u}_0|_{H^1(\mathbf{R}^n)} \le C\, |u|_{H^1(\Omega)}$$

unde constanta C depinde numai de normele funcţiilor θ_0 şi $\nabla\theta_0$.

b) *Prelungirea funcţiilor* u_k, $1 \le k \le m$. Se defineşte funcţia $v_k (y) = u_k (\eta_k (y))$, $y \in Q_+$. Avem $v_k \in H^1 (Q_+)$ şi conform Lemei 7.1, prelungirea sa v_k^* prin reflexie aparţine lui $H^1 (Q)$. Apoi se readuce v_k^* pe U_k

definind $w_k(x) = v_k^*\left(\eta_k^{-1}(x)\right),\ x \in U_k$. Avem $w_k \in H^1(U_k)$, $w_k = u_k$ pe $U_k \cap \Omega$ şi

$$|w_k|_{L^2(U_k)} \leq C\,|u_k|_{L^2(U_k\cap\Omega)}, \quad |w_k|_{H^1(U_k)} \leq C\,|u_k|_{H^1(U_k\cap\Omega)}$$

unde C nu depinde de u. In final, prelungirea la $\mathbf{R}^n$ a funcţiei u_k, cu toate proprietătile dorite, va fi

$$\widetilde{u}_k(x) = \begin{cases} \theta_k(x)\,w_k(x), & x \in U_k \\ 0, & x \in \mathbf{R}^n \setminus U_k. \end{cases}$$

In concluzie, operatorul de prelungire căutat este $P : H^1(\Omega) \to H^1(\mathbf{R}^n)$, $Pu = \sum_{k=0}^{m} \widetilde{u}_k$. ■

Spre exemplu, operatorul de prelungire poate fi folosit pentru demonstrarea următorului rezultat de densitate.

Propoziţia 7.2 *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi de clasă C^1. Atunci mulţimea restricţiilor la Ω ale funcţiilor din $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ este densă în $H^1(\Omega)$.*

Demonstraţie. Fie $u \in H^1(\Omega)$. a) *Cazul* $\Omega = \mathbf{R}^n$. Avem $\zeta_k(\rho_k * u) \to u$ în $H^1(\mathbf{R}^n)$ pentru $k \to \infty$.

b) *Cazul* $\partial\Omega$ mărginit. Şirul $\zeta_k(\rho_k * Pu)$ converge la Pu în $H^1(\mathbf{R}^n)$ şi deci la u în $H^1(\Omega)$.

c) *Cazul* $\partial\Omega$ nemărginit. Fie $\varepsilon > 0$. Atunci există k_0 astfel încât $\left|\zeta_{k_0}u - u\right|_{H^1(\Omega)} < \varepsilon/2$. Se consideră acum o prelungire $v \in H^1(\mathbf{R}^n)$ a lui ζ_{k_0}. Există atunci $w \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ cu $|w - v|_{H^1(\mathbf{R}^n)} < \varepsilon/2$. Este clar că $|w - u|_{H^1(\Omega)} < \varepsilon$. ■

Observaţia 7.4 Din cele de mai sus rezultă că $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ este dens în $H^1(\mathbf{R}^n)$. De asemenea, dacă Ω este mărginit şi de clasă C^1, atunci $C^\infty(\overline{\Omega})$ este dens în $H^1(\Omega)$.

Se poate arăta că şi pentru $\Omega = \mathbf{R}_+^n$, $C_0^\infty\left(\mathbf{R}_+^n\right)$ este dens în $H^1\left(\mathbf{R}_+^n\right)$. In general însă, $C_0^\infty(\Omega)$ nu este dens în $H^1(\Omega)$.

7.3 Spaţiile Sobolev $H_0^m(\Omega)$

Definiţia 7.2 *Spaţiul Sobolev* $H_0^m(\Omega)$ este închiderea lui $C_0^\infty(\Omega)$ în $H^m(\Omega)$. Spaţiul $H_0^m(\Omega)$ înzestrat cu produsul scalar din $H^m(\Omega)$, este un spaţiu Hilbert.

Observaţia 7.5 Observaţia 7.4 garantează egalitatea $H_0^1(\mathbf{R}^n) = H^1(\mathbf{R}^n)$. Totuşi, în general, $H_0^1(\Omega)$ este un subspaţiu propriu al lui $H^1(\Omega)$.

In caz că Ω este mărginit (sau cel puţin mărginit după o direcţie), spaţiul $H_0^1(\Omega)$ poate fi înzestrat cu produsul scalar

$$(u,v)_{H_0^1} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

şi cu norma corespunzătoare

$$|u|_{H_0^1} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

echivalentă cu $|.|_{H^1}$. Pentru a demonstra echivalenţa normelor $|.|_{H^1}$ şi $|.|_{H_0^1}$ pe $H_0^1(\Omega)$, observăm mai întâi că $|u|_{H_0^1} \leq |u|_{H^1}$; mai departe este folosită inegalitatea lui Poincaré.

Teorema care urmează conţine condiţii suficiente pentru ca o funcţie din $H^1(\Omega)$ să aparţină subspaţiului $H_0^1(\Omega)$.

Teorema 7.3 *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi $u \in H^1(\Omega)$. Fiecare din următoarele condiţii este suficientă pentru ca $u \in H_0^1(\Omega)$:*
(i) $\operatorname{supp} u$ *este un compact inclus în* Ω.
(ii) $u \in C(\overline{\Omega})$ *şi* $u = 0$ *pe* $\partial\Omega$.

Demonstraţie. 1) Să presupunem (i) şi să consideră o mulţime Ω_0 deschisă, mărginită şi de clasă C^1, astfel încât $\operatorname{supp} u \subset \Omega_0$, $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$ şi o funcţie $\alpha \in C_0^\infty(\Omega_0)$ cu $\alpha = 1$ pe $\operatorname{supp} u$ (Ω_0 şi α pot fi obţinuţi folosind partiţia C^∞ a unităţii). Este clar că $\alpha u = u$. Pe baza Propoziţiei 7.2, există un şir $(u_k) \subset C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ astfel încât $u_k \to u$ în $H^1(\Omega_0)$. Rezultă că $\alpha u_k \to \alpha u$ în $H^1(\Omega)$, unde $\alpha u_k \in C_0^\infty(\Omega)$. Aşadar, $\alpha u = u \in H_0^1(\Omega)$.

2) Presupunem (ii). Pentru început analizăm cazul când $\operatorname{supp} u$ este mărginit. Se alege o funcţie $G \in C^1(\mathbf{R})$ astfel încât $|G(t)| \leq |t|$ pentru orice $t \in \mathbf{R}$, $G(t) = 0$ pentru $|t| \leq 1$ şi $G(t) = t$ pentru $|t| \geq 2$. Este uşor de văzut că $u_k = G(ku)/k \in H^1(\Omega)$ şi că $\operatorname{supp} u_k \subset \{x \in \Omega : |u(x)| \geq 1/k\}$, adică $\operatorname{supp} u_k$ este un compact inclus în Ω. Rezultă că $u_k \in H_0^1(\Omega)$. Pe de altă parte, folosind teorema convergenţei dominate, se constată că $u_k \to u$ în $H^1(\Omega)$ (Exerciţiu). In consecinţă, $u \in H_0^1(\Omega)$.

Dacă $\operatorname{supp} u$ este nemărginit, atunci se consideră şirul $\zeta_k u$ al trunchiatelor lui u, unde funcţiile ζ_k sunt definite în Propoziţia 6.3. Ca mai sus,

$\zeta_k u \in H_0^1(\Omega)$, iar pe de altă parte $\zeta_k u \to u$ în $H^1(\Omega)$. Deci $u \in H_0^1(\Omega)$. ■

Dacă Ω este de clasă C^1, atunci condiţia ca $u = 0$ pe $\partial\Omega$ este şi necesară pentru ca $u \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Teorema 7.4 *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi de clasă C^1. Dacă $u \in H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, atunci $u = 0$ pe $\partial\Omega$.*

Demonstraţie. Considerând un sistem de hărţi locale, problema se reduce la a se demonstra că dacă $u \in H_0^1(Q_+) \cap C(\overline{Q}_+)$, atunci $u = 0$ pe Q_0. Pentru aceasta, fie $(u_k) \subset C_0^\infty(Q_+)$ astfel încât $u_k \to u$ în $H^1(Q_+)$. Pentru $(x', x_n) \in Q_+$, avem

$$\left|u_k(x', x_n)\right| = \left|\int_0^{x_n} \frac{\partial u_k}{\partial x_n}(x', t)\, dt\right| \leq \int_0^{x_n} \left|\frac{\partial u_k}{\partial x_n}(x', t)\right| dt$$

şi deci, dacă $0 < \varepsilon \leq 1$, atunci

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{|x'|<1}\int_0^{\varepsilon} \left|u_k(x', x_n)\right| dx_n dx' \leq \int_{|x'|<1}\int_0^{\varepsilon} \left|\frac{\partial u_k}{\partial x_n}(x', t)\right| dt dx'.$$

Trecând la limită cu $k \to \infty$, obţinem

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_{|x'|<1}\int_0^{\varepsilon} \left|u(x', x_n)\right| dx_n dx' \leq \int_{|x'|<1}\int_0^{\varepsilon} \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)\right| dt dx'.$$

Dacă acum facem $\varepsilon \to 0$ şi ţinem cont că $u \in C(\overline{Q}_+)$ şi $\partial u/\partial x_n \in L^1(Q_+)$, deducem

$$\int_{|x'|<1} \left|u(x', 0)\right| dx' = 0$$

de unde $u(x', 0) = 0$ pentru orice $(x', 0) \in Q_0$. ■

Teoremele 7.3 şi 7.4 implică rezultatul următor.

Corolarul 7.1 *Fie Ω o mulţime deschisă şi de clasă C^1 şi fie $u \in H^1(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$. Atunci $u \in H_0^1(\Omega)$ dacă şi numai dacă $u = 0$ pe $\partial\Omega$.*

Se poate spune că funcţiile din $H_0^1(\Omega)$ sunt acele funcţii din $H^1(\Omega)$ care „se anulează pe $\partial\Omega$", sau a căror „urmă" pe $\partial\Omega$ este nulă. Această afirmaţie se bazează pe lema următoare.

Lema 7.2 *Pentru orice* $u \in C_0^\infty\left(\mathbf{R}_+^n\right)$ *este adevărată inegalitatea*

$$\left(\int_{\mathbf{R}^{n-1}}\left|u\left(x',0\right)\right|^2 dx'\right)^{\frac{1}{2}} \leq |u|_{H^1\left(\mathbf{R}_+^n\right)}.$$

Demonstraţie. Fie $G(t) = |t|\, t$ şi $u \in C_0^\infty\left(\mathbf{R}_+^n\right)$. Avem

$$\begin{aligned} G\left(u\left(x',0\right)\right) &= -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_n} G\left(u\left(x',x_n\right)\right) dx_n \\ &= -\int_0^\infty G'\left(u\left(x',x_n\right)\right) \frac{\partial u}{\partial x_n}\left(x',x_n\right) dx_n. \end{aligned}$$

Atunci

$$\begin{aligned} \left|u\left(x',0\right)\right|^2 &\leq 2\int_0^\infty \left|u\left(x',x_n\right)\right| \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\left(x',x_n\right)\right| dx_n \\ &\leq \int_0^\infty \left(\left|u\left(x',x_n\right)\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\left(x',x_n\right)\right|^2\right) dx_n \end{aligned}$$

şi concluzia rezultă prin integrare în raport cu $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$. ■

Dacă $\Omega = \mathbf{R}_+^n$, atunci funcţia $u(.,0)$ poate fi considerată urma lui u pe $\Gamma := \partial\Omega = \mathbf{R}^{n-1}$. Din Lema 7.2 se deduce că aplicaţia $u \longmapsto u|_\Gamma$ se prelungeşte prin densitate la un operator liniar şi continuu de la $H^1\left(\mathbf{R}_+^n\right)$ la $L^2(\Gamma)$. Acest operator este prin definiţie *urma* lui u pe Γ şi se notează cu $u|_\Gamma$.

Este de subliniat deferenţa dintre spaţiile $L^2\left(\mathbf{R}_+^n\right)$ şi $H^1\left(\mathbf{R}_+^n\right)$, anume aceea că funcţiile din $H^1\left(\mathbf{R}_+^n\right)$ au urmă pe Γ, lucru care nu are loc pentru $L^2\left(\mathbf{R}_+^n\right)$.

Cu ajutorul unor hărţi locale, se poate defini urma pe $\Gamma = \partial\Omega$ a funcţiilor din $H^1(\Omega)$, atunci când Ω este suficient de regular, de exemplu Ω este de clasă C^1 cu Γ mărginită. Imaginea lui $H^1(\Omega)$ prin acest operator este, prin definiţie, spaţiul $H^{1/2}(\Gamma)$. Aşadar $v \in H^{1/2}(\Gamma)$ dacă există o funcţie $u \in H^1(\Omega)$ cu $u|_\Gamma = v$. Se poate demonstra că $H_0^1(\Omega)$ este ker-ul operatorului urmă, adică

$$H_0^1(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega) : u|_\Gamma = 0\right\}.$$

Pentru detalii privind operatorul urmă şi spaţiul $H^{1/2}(\Gamma)$ a se vedea Adams [1] şi Bony [4].

In finalul acestei secţiuni, folosind Teorema 7.3 vom demonstra că dacă Ω este mărginit, atunci cele două definiţii ale spaţiului $H_0^1(\Omega)$, cea dată în Partea I şi Definiţia 7.2 sunt echivalente. Mai precis, are loc următoarea teoremă de caracterizare a spaţiului $H_0^1(\Omega)$ introdus prin Definiţia 7.2.

Teorema 7.5 *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi mărginită. Spaţiul $H_0^1(\Omega)$ introdus prin Definiţia 7.2 este completatul spaţiului $C_0^1\left(\overline{\Omega}\right) :=$ $\{u \in C^1\left(\overline{\Omega}\right) : u = 0 \text{ pe } \partial\Omega\}$ în raport cu norma $|u|_{0,1} := \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}$.*

Demonstraţie. Notăm cu $\mathcal{H}$ completatul lui $C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$ în raport cu norma $|.|_{0,1}$. Din Definiţia 7.2 rezultă că $H_0^1(\Omega)$ este completatul lui $C_0^\infty(\Omega)$ în raport cu norma $|.|_{0,1}$, aceasta pentru că, în virtutea inegalităţii lui Poincaré, norma $|.|_{0,1}$ este echivalentă pe $C_0^\infty(\Omega)$ cu norma $|.|_{H^1}$. Cum $C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$, prin completare, rezultă că $H_0^1(\Omega) \subset \mathcal{H}$.

Mulţimea Ω fiind mărginită, este clar că $C^1\left(\overline{\Omega}\right) \subset H^1(\Omega)$. Atunci, Teorema 7.3 garantează incluziunea $C_0^1\left(\overline{\Omega}\right) \subset H_0^1(\Omega)$. Dar $H_0^1(\Omega)$ este complet în raport cu norma $|.|_{0,1}$. In consecinţă, completatul lui $C_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$ este inclus în $H_0^1(\Omega)$, adică $\mathcal{H} \subset H_0^1(\Omega)$.

Aşadar $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega)$. ∎

7.4 Teorema de scufundare continuă a lui Sobolev

Definiţia 7.3 Fie X şi Y două spaţii liniare normate. Se spune că Y se *scufundă continuu* în X, dacă Y este un subspaţiu liniar al lui X şi aplicaţia liniară $J : Y \to X$, $Ju = u$ este continuă (adică există $c > 0$ astfel ca $|u|_X \leq c\,|u|_Y$ pentru orice $u \in Y$). De asemenea, se spune că Y se *scufundă compact* în X, dacă Y este un subspaţiu liniar al lui X şi injecţia J este compactă (transformă mulţimile mărginite în mulţimi relativ compacte).

Aşa de exemplu, au loc următoarele scufundări continue: $H^m(\Omega) \subset H^{m'}(\Omega)$ pentru $m \geq m'$ şi mai general $W^{m,p}(\Omega) \subset W^{m',p}(\Omega)$ pentru $m \geq m'$ şi $p \in [1, +\infty)$. Dacă Ω este mărginit, atunci avem scufundările continue $L^p(\Omega) \subset L^{p'}(\Omega)$ pentru $p \geq p'$, $W^{m,p}(\Omega) \subset W^{m',p'}(\Omega)$ pentru $p \geq p'$ şi $m \geq m'$ şi scufundarea compactă $C^k(\overline{\Omega}) \subset C^{k'}(\overline{\Omega})$ pentru $k > k'$.

In această secţiune prezentăm teorema lui Sobolev cu privire la scufundarea continuă a spaţiilor Sobolev în spaţii L^q. Incepem cu cazul $\Omega = \mathbf{R}^n$.

Teorema 7.6 (Sobolev) *Au loc următoarele scufundări continue:*

1) $H^1(\mathbf{R}^n) \subset L^q(\mathbf{R}^n)$ *pentru orice* $q \in [2, 2^*]$, *unde* $n \geq 3$ *şi* $2^* = 2n/(n-2)$.

2) $H^1(\mathbf{R}^2) \subset L^q(\mathbf{R}^2)$ *pentru orice* $q \in [2, +\infty)$.

Pentru demonstraţie avem nevoie de următoarele leme:

Lema 7.3 (Gagliardo) *Fie* $n \geq 2$ *şi* $f_1, f_2, ..., f_n \in L^{n-1}(\mathbf{R}^{n-1})$. *Pentru* $x \in \mathbf{R}^n$ *şi* $1 \leq j \leq n$, *notăm* $\widetilde{x}_j = (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_{j-1},\ x_{j+1},\ ...,\ x_n)$. *Atunci funcţia* $f(x) = \prod_{j=1}^n f_j(\widetilde{x}_j)$ *aparţine lui* $L^1(\mathbf{R}^n)$ *şi*

$$|f|_{L^1(\mathbf{R}^n)} \leq \prod_{j=1}^n |f_j|_{L^{n-1}(\mathbf{R}^{n-1})}.$$

Demonstraţie. Cazul $n = 2$ este trivial. Să considerăm cazul $n = 3$. Avem

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}} |f(x)|\, dx_3 \\ = \;& |f_3(x_1, x_2)| \int_{\mathbf{R}} |f_1(x_2, x_3)|\, |f_2(x_1, x_3)|\, dx_3 \\ \leq \;& |f_3(x_1, x_2)| \left(\int_{\mathbf{R}} |f_1(x_2, x_3)|^2 dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbf{R}} |f_2(x_1, x_3)|^2 dx_3 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Concluzia rezultă dacă se integrează pe $\mathbf{R}^2$ şi se aplică încă o dată inegalitatea lui Hölder. In cazul general, rezultatul se obţine prin inducţie. Să admitem că inegalitatea este adevărată pentru n şi să o demonstrăm pentru $n+1$. Pentru aceasta, fixăm pentru moment pe x_{n+1}. Aplicând inegalitatea lui Hölder obţinem

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|\, dx_1 dx_2\ ...\ dx_n \\ \leq \;& |f_{n+1}|_{L^n(\mathbf{R}^n)} \left(\int_{\mathbf{R}^n} |f_1 f_2 ... f_n|^{n'} dx_1 dx_2\ ...\ dx_n \right)^{\frac{1}{n'}} \end{aligned}$$

unde $n' = n/(n-1)$. Folosind ipoteza inducţiei pentru funcţiile $|f_1|^{n'}$, $|f_2|^{n'}$, ..., $|f_n|^{n'} \in L^{n-1}(\mathbf{R}^{n-1})$, deducem

$$\int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|\, dx_1 dx_2\ ...\ dx_n \leq |f_{n+1}|_{L^n(\mathbf{R}^n)} \prod_{j=1}^n |f_j|_{L^n(\mathbf{R}^{n-1})}.$$

In final se integrează în raport cu x_{n+1} şi se aplică inegalitatea lui Hölder tinându-se seamă de faptul că funcţiile $x_{n+1} \longmapsto |f_j|_{L^n(\mathbf{R}^{n-1})}$ aparţin lui $L^n(\mathbf{R})$ şi, în consecinţă, produsul lor este în $L^1(\mathbf{R})$. ■

Lema 7.4 *Dacă* $u \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ *unde* $1 \le p < r < \infty$, *atunci* $u \in L^q(\Omega)$ *ori de câte ori* $p < q < r$ *şi are loc următoarea inegalitate de interpolare*

$$|u|_{L^q} \le |u|_{L^p}^{\alpha} |u|_{L^r}^{1-\alpha} \quad \textit{unde} \quad \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{r},\ 0 < \alpha < 1. \tag{7.7}$$

Dacă în plus Y *este un spaţiu normat care se scufundă continuu atât în* $L^p(\Omega)$ *cât şi în* $L^r(\Omega)$, *atunci* Y *se scufundă continuu şi în* $L^q(\Omega)$, *unde* $p < q < r$.

Demonstraţie. Se observă că $|u|^{\alpha q} \in L^{p/(\alpha q)}(\Omega)$ şi $|u|^{(1-\alpha)q} \in L^{r/[(1-\alpha)q]}(\Omega)$, de unde, folosind inegalitatea lui Hölder, deducem că $|u|^q = |u|^{\alpha q} |u|^{(1-\alpha)q} \in L^1(\Omega)$, deci $u \in L^q(\Omega)$ şi de asemenea (7.7). Folosind inegalitatea lui Young, $ab \le \alpha a^{1/\alpha} + (1-\alpha) b^{1/(1-\alpha)}$ valabilă pentru $a,\ b \ge 0$, inegalitatea de interpolare conduce la

$$|u|_{L^q} \le \alpha |u|_{L^p} + (1-\alpha) |u|_{L^r}$$

de unde concluzia părţii a doua a lemei este imediată. ■

Demonstraţia Teoremei 7.6. 1) Fie pentru început $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Pentru fiecare $1 \le j \le n$, avem

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_{j-1},\ t,\ x_{j+1},\ ...,x_n)\, dt \right| \\ &\le \int_{\mathbf{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j}(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_{j-1},\ t,\ x_{j+1},\ ...,x_n) \right| dt \\ &= : (f_j(\widetilde{x}_j))^{n-1}. \end{aligned}$$

Rezultă că $|u(x)|^{n/(n-1)} \le \prod f_j(\widetilde{x}_j)$, iar pe baza Lemei 7.3, deducem

$$|u|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbf{R}^n)}^{\frac{n}{n-1}} \le \prod |f_j|_{L^{n-1}(\mathbf{R}^{n-1})} = \prod \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|_{L^1(\mathbf{R}^n)}^{\frac{1}{n-1}}$$

adică

$$|u|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbf{R}^n)} \le \prod \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|_{L^1(\mathbf{R}^n)}^{\frac{1}{n}}.$$

Dacă în această inegalitate înlocuim pe u cu $|u|^{p-1} u$ şi aplicăm inegalitatea lui Hölder, obţinem

$$\begin{aligned} |u|^p_{L^{\frac{pn}{n-1}}} &\leq p \prod \left| |u|^{p-1} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^{\frac{1}{n}}_{L^1} \leq p\, |u|^{p-1}_{L^{2(p-1)}} \prod \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^{\frac{1}{n}}_{L^2} \\ &\leq p\, |u|^{p-1}_{L^{2(p-1)}} |u|_{H^1} \end{aligned} \tag{7.8}$$

Alegând p astfel ca $2(p-1) = pn/(n-1)$, adică $p = 2(n-1)/(n-2)$ $= 2^*(n-1)/n$, obţinem

$$|u|_{L^{2^*}} \leq c\, |u|_{H^1}.$$

In final folosim densitatea lui $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ în $H^1(\mathbf{R}^n)$ precum şi lema lui Fatou, pentru a arăta că ultima inegalitate este valabilă pentru orice $u \in H^1(\mathbf{R}^n)$. Aşadar are loc scufundarea continuă $H^1(\mathbf{R}^n) \subset L^{2^*}(\mathbf{R}^n)$.

Pentru $2 < q < 2^*$, scufundarea continuă $H^1(\mathbf{R}^n) \subset L^q(\mathbf{R}^n)$ rezultă acum din Lema 7.4.

2) Fie $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$; aplicând (7.8) cu $n = 2$, obţinem

$$|u|_{L^{2p}} \leq c_0\, |u|^{\frac{p-1}{p}}_{L^{2(p-1)}} |u|^{\frac{1}{p}}_{H^1}$$

de unde, folosind inegalitatea lui Young, deducem

$$|u|_{L^{2p}} \leq C\left(|u|_{L^{2(p-1)}} + |u|_{H^1}\right). \tag{7.9}$$

Dacă în (7.9) alegem $p = 2$, găsim $|u|_{L^4} \leq C_2\, |u|_{H^1}$. Această inegalitate se extinde prin densitate la toate funcţiile din $H^1(\mathbf{R}^2)$. Aşadar $H^1(\mathbf{R}^2)$ se scufundă continuu în $L^4(\mathbf{R}^2)$. Folosind inegalitatea de interpolare, deducem apoi că $H^1(\mathbf{R}^2)$ se scufundă continuu în $L^q(\mathbf{R}^2)$ pentru $2 \leq q \leq 4$. Repetând acest argument pentru $p = 3, 4, ...,$ se obţine că $H^1(\mathbf{R}^2)$ se scufundă continuu în $L^q(\mathbf{R}^2)$ pentru orice $q \geq 2$. ■

Considerăm acum cazul unei mulţimi deschise Ω oarecare.

Teorema 7.7 (Sobolev) *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă, de clasă C^1 şi cu frontiera $\partial\Omega$ mărginită, sau $\Omega = \mathbf{R}^n_+$. Atunci au loc următoarele scufundări continue:*

1) $H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *pentru orice* $q \in [2, 2^*]$, *unde* $n \geq 3$ *şi* $2^* = 2n/(n-2)$.

2) $H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *pentru orice* $q \in [2, +\infty)$, *dacă* $n = 2$.

Demonstraţie. Se aplică Teorema 7.6 trecându-se la funcţii definite pe $\mathbf{R}^n$ cu ajutorul operatorului de prelungire $P : H^1(\Omega) \to H^1(\mathbf{R}^n)$. ■

7.5 Teorema de scufundare compactă a lui Rellich–Kondrachov

Teorema 7.8 (Rellich–Kondrachov) *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă, mărginită şi de clasă C^1. Atunci au loc următoarele scufundări compacte:*

1) $H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *oricare ar fi* $q \in [1, 2^*)$, *unde* $n \geq 3$ *şi* $2^* = 2n/(n-2)$.

2) $H^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *oricare ar fi* $q \in [1, +\infty)$, *dacă* $n = 2$.

Demonstraţie. Teorema 7.7 împreună cu faptul că pentru Ω mărginit are loc scufundarea continuă $L^p(\Omega) \subset L^{p'}(\Omega)$ când $p \geq p'$, demonstrează că au loc scufundările continue din enunţ.

Pentru a arăta că aceste scufundări sunt chiar compacte, să ne situăm în cazul $n \geq 3$ (cazul $n = 2$ se discută în mod analog). Avem de demonstrat că bila unitate B a spaţiului $H^1(\Omega)$ este relativ compactă în $L^q(\Omega)$ pentru $1 \leq q < 2^*$. Folosind criteriul de compactitate în L^q, al lui Fréchet–Kolmogorov (a se vedea Precup [38], [40]), este suficient să observăm că mulţimea B este mărginită în $L^q(\Omega)$ (ceea ce rezultă din faptul că injecţia spaţiului $H^1(\Omega)$ în $L^q(\Omega)$ este continuă, deci mărginită) şi că $\tau_h u \to u$ în $L^q(\Omega)$, uniform pentru $u \in B$, când $h \to 0$, unde $(\tau_h u)(x) = u(x-h)$ dacă $x - h \in \Omega$ şi $(\tau_h u)(x) = 0$ dacă $x - h \in \mathbf{R}^n \setminus \Omega$. Pentru aceasta, fie $\varepsilon > 0$ şi $u \in B$. Cum $C^1(\overline{\Omega})$ este dens în $H^1(\Omega)$ (vezi Observaţia 7.4), există $u_\varepsilon \in C^1(\overline{\Omega})$ cu $|u_\varepsilon - u|_{H^1(\Omega)} < c\,\varepsilon$ unde $c > 0$ este aşa fel încât $|u_\varepsilon - u|_{L^q(\Omega)} < \varepsilon/3$. Avem

$$\begin{aligned}
|\tau_h u - u|_{L^q} &\leq |\tau_h(u - u_\varepsilon)|_{L^q} + |\tau_h u_\varepsilon - u_\varepsilon|_{L^q} + |u_\varepsilon - u|_{L^q} \\
&\leq |\tau_h u_\varepsilon - u_\varepsilon|_{L^q} + 2\frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Pentru a estima $|\tau_h u_\varepsilon - u_\varepsilon|_{L^q}$, notăm $\Omega_h = \{x \in \Omega : x - h \in \Omega\}$. Atunci

$$|\tau_h u_\varepsilon - u_\varepsilon|_{L^q}^q = \int_{\Omega_h} |u_\varepsilon(x-h) - u_\varepsilon(x)|^q\,dx + \int_{\Omega\setminus\Omega_h} |u_\varepsilon(x)|^q\,dx.$$

Pentru prima integrală, dacă scriem $1/q = \alpha/1 + (1-\alpha)/2^*$, unde $0 < \alpha \leq 1$ (amintim $q < 2^*$) şi folosim inegalitatea de interpolare, găsim

$$\begin{aligned}
|\tau_h u_\varepsilon - u_\varepsilon|_{L^q(\Omega_h)} &\leq |\tau_h u_\varepsilon - u_\varepsilon|_{L^1(\Omega_h)}^\alpha\, |\tau_h u_\varepsilon - u_\varepsilon|_{L^{2^*}(\Omega_h)}^{1-\alpha} \\
&\leq C\,|h|^\alpha\, |u_\varepsilon|_{H^1(\Omega)}^\alpha \left(2\,|u_\varepsilon|_{L^{2^*}(\Omega)}\right)^{1-\alpha} \\
&\leq C_0\,|h|^\alpha
\end{aligned}$$

unde C_0 depinde numai de ε nu şi de u. Pentru cea de-a doua integrală, aplicăm inegalitatea lui Hölder şi obţinem

$$|u_\varepsilon|^q_{L^q(\Omega\setminus\Omega_h)} \le |1|_{L^r(\Omega\setminus\Omega_h)} |u_\varepsilon|^q_{L^{2^*}(\Omega)}$$

unde $1/r + q/2^* = 1$. Rezultă că există $\delta_\varepsilon > 0$ independent de u, astfel încât $|\tau_h u_\varepsilon - u_\varepsilon|_{L^q} < \varepsilon/3$ dacă $|h| < \delta_\varepsilon$. Aşadar

$$|\tau_h u - u|_{L^q} < \varepsilon \quad \text{pentru} \quad |h| < \delta_\varepsilon \text{ şi } u \in B.$$

■

Teoremele 7.7 şi 7.8 sunt adevărate dacă în locul spaţiului $H^1(\Omega)$ se consideră $H_0^1(\Omega)$ cu un Ω deschis, respectiv deschis şi mărginit, fără nici o condiţie de netezime. Explicaţia constă în existenţa unui operator de prelungire $P : H_0^1(\Omega) \to H^1(\mathbf{R}^n)$ pentru orice Ω deschis. Mai precis avem următorul rezultat.

Propoziţia 7.3 *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă. Atunci, pentru orice $u \in H_0^1(\Omega)$, prelungirea cu zero*

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbf{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

aparţine spaţiului $H^1(\mathbf{R}^n)$ şi

$$\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x_j} = \widetilde{\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)}, \quad j = 1,\ 2,\ ...,\ n. \tag{7.10}$$

Demonstraţie. Din $u \in H^1(\Omega)$ rezultă în mod clar că prelungirile cu zero $\widetilde{u}$ şi $\widetilde{\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)}$ ale lui u, respectiv $\frac{\partial u}{\partial x_j}$, aparţin spaţiului $L^2(\mathbf{R}^n)$. Rămâne să demonstrăm că $\widetilde{u} \in H^1(\mathbf{R}^n)$. Cum $u \in H_0^1(\Omega)$, există un şir $(u_k) \subset C_0^\infty(\Omega)$ astfel încât $u_k \to u$ în $H^1(\Omega)$. Atunci, pentru orice $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, avem

$$\left|\int_\Omega u_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx\right| = \left|-\int_\Omega \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\varphi\, dx\right| \le |u_k|_{H^1(\Omega)} |\varphi|_{L^2(\Omega)} \le C\,|\varphi|_{L^2(\Omega)}.$$

Trecând la limită cu $k \to \infty$, obţinem

$$\left|\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx\right| = \left|\int_{\mathbf{R}^n} \widetilde{u} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx\right| \le C\,|\varphi|_{L^2(\Omega)} \le C\,|\varphi|_{L^2(\mathbf{R}^n)}.$$

Aceasta, pe baza Observaţiei 7.1, garantează $\widetilde{u} \in H^1(\mathbf{R}^n)$. ■

Se poate demonstra şi următoarea reciprocă a Propoziţiei 7.3: Dacă Ω este de clasă C^1, $u \in L^2(\Omega)$ şi $\widetilde{u} \in H^1(\mathbf{R}^n)$, atunci $u \in H_0^1(\Omega)$ (a se vedea Brezis [5, Proposition IX.18]).

Aşadar, pentru spaţiul $H_0^1(\Omega)$ avem următoarele rezultate:

Teorema 7.9 *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă.*

1) *Are loc scufundarea continuă $H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ pentru $n \geq 3$ şi $q \in [2, 2^*]$, sau $n = 2$ şi $q \in [2, +\infty)$.*

2) *Dacă în plus Ω este mărginit, atunci are loc scufundarea compactă $H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ pentru $n \geq 3$ şi $q \in [1, 2^*)$, sau $n = 2$ şi $q \in [1, +\infty)$.*

Menţionăm că în literatură numărul $2^* - 1 = (n+2)/(n-2)$, pentru $n \geq 3$, se numeşte *exponent critic.*

7.6 Scufundarea spaţiului $H^m(\Omega)$ în $C\left(\overline{\Omega}\right)$

Prezentăm un rezultat privind scufundarea continuă a spaţiului $H^m(\Omega)$ în $C(\overline{\Omega})$. Pentru aceasta folosim o caracterizare a funcţiilor din $H^m(\mathbf{R}^n)$, în termenii transformării Fourier.

Incepem cu o consecinţă a teoremei lui Plancherel, privind caracterizarea spaţiului $H^m(\mathbf{R}^n)$.

Propoziţia 7.4 *Pentru orice $m \in \mathbf{N}$,*

$$H^m(\mathbf{R}^n) = \left\{ u \in L^2(\mathbf{R}^n) : \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{m}{2}} T[u] \in L^2(\mathbf{R}^n) \right\}.$$

In plus $\left| \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{m}{2}} T[u] \right|_{L^2}$ *este o normă echivalentă cu* $|u|_{H^m}$.

Demonstraţie. Fie $u \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Atunci, pe baza formulei (6.8),

$$\begin{aligned} u \quad \in \quad & H^m(\mathbf{R}^n) \Longleftrightarrow D^\alpha u \in L^2(\mathbf{R}^n), \ |\alpha| \leq m \\ \Longleftrightarrow \quad & T[D^\alpha u] \in L^2(\mathbf{R}^n), \ |\alpha| \leq m \Longleftrightarrow x^\alpha T[u] \in L^2(\mathbf{R}^n), \ |\alpha| \leq m \\ \Longleftrightarrow \quad & w_0(x)(T[u])^2 \in L^1(\mathbf{R}^n) \Longleftrightarrow w_0^{\frac{1}{2}} T[u] \in L^2(\mathbf{R}^n), \end{aligned}$$

unde $w_0(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} |x^\alpha|^2$. Mai departe se observă că în locul ponderii w_0 se poate lua orice altă funcţie netedă w pentru care există constantele pozitive c_1 şi c_2 astfel încât $c_1 w_0 \leq w \leq c_2 w_0$. In particular, se poate face alegerea consacrată $w(x) = \left(1 + |x|^2\right)^m$. ■

Pentru m suficient de mare, are loc următorul rezultat de regularitate a funcţiilor din $H^m(\mathbf{R}^n)$.

Teorema 7.10 *Dacă $m > n/2$, atunci*

$$H^m(\mathbf{R}^n) \subset C(\mathbf{R}^n)$$

şi pentru orice $u \in H^m(\mathbf{R}^n)$, $\sup_{\mathbf{R}^n} |u| \leq C\,|u|_{H^m}$.

Demonstraţie. Cheia demonstraţiei o constituie faptul că

$$\left(1+|x|^2\right)^{-\frac{m}{2}} \in L^2(\mathbf{R}^n), \text{ adică } \int_{\mathbf{R}^n} \left(1+|x|^2\right)^{-m} dx < \infty,$$

dacă şi numai dacă $m > n/2$. Aceasta se constată imediat dacă se trece la coordonate sferice:

$$\int_{\mathbf{R}^n} \left(1+|x|^2\right)^{-m} dx = \omega_n \int_0^\infty \left(1+r^2\right)^{-m} r^{n-1} dr.$$

Presupunem $m > n/2$ şi $u \in H^m(\mathbf{R}^n)$. Atunci, din

$$\left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}} T[u] \quad \text{şi} \quad \left(1+|x|^2\right)^{-\frac{m}{2}} \in L^2(\mathbf{R}^n)$$

rezultă $T[u] \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Mai departe, avem

$$\begin{aligned} |u(x)| &= \left|T^{-1}[T[u]](x)\right| = |T[T[u]](-x)| \qquad (7.11)\\ &\leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |T[u]|_{L^1} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} |T[u](x)|\, dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbf{R}^n} \left(1+|x|^2\right)^{-\frac{m}{2}} \left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}} |T[u]|\, dx \\ &\leq C_0 \left|\left(1+|x|^2\right)^{\frac{m}{2}} T[u]\right|_{L^2} \leq C\,|u|_{H^m}. \end{aligned}$$

De aici, folosind şi Lema 5.1, rezultă

$$|u(x+x_0) - u(x_0)| \leq C\,|\tau_{-x}u - u|_{H^m} \to 0 \quad \text{pentru } x \to 0,$$

de unde $u \in C(\mathbf{R}^n)$. In plus (7.11) arată că $\sup_{\mathbf{R}^n} |u| \leq C\,|u|_{H^m}$. ■

Este clar că rezultatul anterior implică incluziunile

$$H^m(\mathbf{R}^n) \subset C^k(\mathbf{R}^n) \quad \text{pentru} \quad m > k + \frac{n}{2}$$

$$\bigcap_{m \geq 0} H^m(\mathbf{R}^n) \subset C^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Teorema 7.11 *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă, de clasă C^m şi cu frontiera mărginită, sau $\Omega = \mathbf{R}^n_+$. Dacă $m > n/2$, atunci are loc scufundarea continuă*

$$H^m(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}).$$

Demonstraţie. Se foloseşte operatorul de prelungire. ■

Rezultate complete de scufundare continuă sau compactă pentru spaţiile Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ pot fi găsite în lucrările Adams [1] şi Brezis [5].

7.7 Spaţiile Sobolev $H^{-m}(\Omega)$

Definiţia 7.4 Fie $m \in \mathbf{N}$. Se defineşte $H^{-m}(\Omega)$ ca fiind spaţiul distribuţiilor f pe Ω pentru care există o constantă C cu

$$|(f,\varphi)| \leq C\,|\varphi|_{H^m}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{7.12}$$

Propoziţia 7.5 Spaţiul $H^{-m}(\Omega)$ se poate identifica cu dualul spaţiului $H_0^m(\Omega)$.

Demonstraţie. Dacă $f \in H^{-m}(\Omega)$, atunci, ca distribuţie, f este o funcţională liniară pe $C_0^\infty(\Omega)$. Formula (7.12) arată că această funcţională este continuă în raport cu norma $|.|_{H^m}$ pe $C_0^\infty(\Omega)$. Densitatea lui $C_0^\infty(\Omega)$ în $H_0^m(\Omega)$ garantează faptul că f admite o unică prelungire la o funcţională liniară şi continuă pe $H_0^m(\Omega)$. Reciproc, dacă g este o funcţională liniară şi continuă pe $H_0^m(\Omega)$, atunci există o constantă C cu $|g(\varphi)| \leq C\,|\varphi|_{H^m}$ pentru orice $\varphi \in H_0^m(\Omega)$. Rezultă că pentru orice compact $K \subset \Omega$, există o constantă $C' > 0$ astfel încât pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ cu $\operatorname{supp}\varphi \subset K$, să avem

$$|g(\varphi)| \leq C\,|\varphi|_{H^m} \leq C' \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in K} |D^\alpha \varphi(x)|. \tag{7.13}$$

S-a ţinut cont de faptul că

$$|D^\alpha \varphi|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{\mu(K)}\,|D^\alpha \varphi|_\infty$$

$\mu(K)$ fiind măsura Lebesgue a lui K. Inegalitatea (7.13) implică faptul că restricţia lui g la $\mathcal{D}(\Omega)$ este continuă, adică din $\varphi_k \to 0$ în $\mathcal{D}(\Omega)$ rezultă $g(\varphi_k) \to 0$. Deci restricţia lui g la $\mathcal{D}(\Omega)$ este o distribuţie f pe

Ω. Avem $|(f,\varphi)| = |g(\varphi)| \leq C|\varphi|_{H^m}$ pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, ceea ce demonstrează că $f \in H^{-m}(\Omega)$. ■

Vom identifica $L^2(\Omega)$ cu dualul său, dar nu şi pe $H_0^m(\Omega)$ cu $H^{-m}(\Omega)$. Deoarece $H_0^m(\Omega)$ se scufundă continuu în $L^2(\Omega)$, rezultă, trecând la spaţiile duale, că $L^2(\Omega)$ se scufundă de asemenea continuu în $H^{-m}(\Omega)$. Aşadar au loc scufundările continue (şi dense)

$$H_0^m(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-m}(\Omega).$$

Subliniem faptul că orice funcţie $f \in L^2(\Omega)$ se identifică, atunci când este privită ca element al lui $H^{-m}(\Omega)$, cu funcţionala liniară şi continuă pe $H_0^m(\Omega)$

$$u \in H_0^m(\Omega) \longmapsto (f,u)_{L^2}.$$

Elementele spaţiului $H^{-m}(\Omega)$ pot fi reprezentate cu ajutorul funcţiilor din $L^2(\Omega)$ după cum urmează:

Teorema 7.12 *O distribuţie f pe Ω aparţine lui $H^{-m}(\Omega)$ dacă şi numai dacă ea este o sumă de derivate de ordin $\leq m$ ale unor funcţii din $L^2(\Omega)$, adică pentru orice multi-indice $\alpha \in \mathbf{N}^n$ cu $|\alpha| \leq m$, există $g_\alpha \in L^2(\Omega)$ astfel încât*

$$f = \sum_{|a|\leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha g_\alpha.$$

In acest caz, avem

$$|f|_{H^{-m}} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} |g_\alpha|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aici numărul $|f|_{H^{-m}}$ reprezintă norma lui f în spaţiul $H^{-m}(\Omega)$, privit ca dual al lui $(H_0^m(\Omega), |.|_{H^m})$.

Demonstraţie. Dacă $g \in L^2(\Omega)$ şi $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $|\alpha| \leq m$, atunci $D^\alpha g$ este o distribuţie pe Ω pentru care

$$|(D^\alpha g,\varphi)| = |(g, D^\alpha\varphi)| \leq |g|_{L^2} |D^\alpha\varphi|_{L^2} \leq |g|_{L^2} |\varphi|_{H^m}$$

ceea ce arată că $D^\alpha g \in H^{-m}(\Omega)$. Rezultă că orice sumă de derivate de ordin $\leq m$ ale unor funcţii din $L^2(\Omega)$, aparţine de asemenea lui $H^{-m}(\Omega)$.

Pentru demonstraţia reciprocei, să considerăm mulţimea $A = \{\alpha \in \mathbf{N}^n : |\alpha| \leq m\}$ şi spaţiul Hilbert $E = \left(L^2(\Omega)\right)^A$ înzestrat cu produsul scalar

$$(g,h)_E = \sum_{\alpha \in A} (g_\alpha, h_\alpha)_{L^2}$$

unde $g(\alpha) = g_\alpha$ şi $h(\alpha) = h_\alpha$. Pe de altă parte, să considerăm aplicaţia $T : H_0^m(\Omega) \to E$ definită prin

$$Tu = (D^\alpha u)_{\alpha \in A}.$$

Este clar că T este o izometrie. Se consideră subspaţiul $E_0 = T\left(H_0^m(\Omega)\right)$ şi aplicaţia $T^{-1} : E_0 \to H_0^m(\Omega)$. Fie acum f un element oarecare al lui $H^{-m}(\Omega)$. Este clar că aplicaţia

$$h \in E_0 \longmapsto \left(f, T^{-1}h\right)$$

(aici (f, v) reprezintă valoarea funcţionalei f pe v) este o funcţională liniară şi continuă pe E_0. Pe baza teoremei lui Hahn–Banach, ea poate fi prelungită până la o funcţională G liniară şi continuă pe E, cu $|G|_{E'} = |f|_{H^{-m}}$. Teorema de reprezentare a lui Riesz implică că există $g = (g_\alpha)_{\alpha \in A} \in E$ astfel încât $(G, h) = (g, h)_E$ pentru orice $h \in E$. Pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, avem

$$\begin{aligned}
(f, \varphi) &= \left(f, T^{-1}T\varphi\right) = (G, T\varphi) = (g, T\varphi)_E \\
&= \sum_{|\alpha| \leq m} (g_\alpha, D^\alpha \varphi)_{L^2} = \sum_{|\alpha| \leq m} (g_\alpha, D^\alpha \varphi) \\
&= \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} (D^\alpha g_\alpha, \varphi).
\end{aligned}$$

Aşadar, $f = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha g_\alpha$. ■

Conform teoremei lui Riesz, pentru orice spaţiu Hilbert $(H, (.,.)_H)$, aplicaţia $u \in H \longmapsto (u,.)_H \in H'$ este un izomorfism al spaţiilor H şi H', pe baza căruia spaţiile H şi H' pot fi identificate. In cazul spaţiilor Sobolev $H_0^m(\Omega)$ şi $H^{-m}(\Omega)$, acest izomorfism se poate exprima cu ajutorul unor operatori diferenţiali.

Teorema 7.13 *Operatorul* $L : H_0^m(\Omega) \to H^{-m}(\Omega)$,

$$L = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha}$$

este un izomorfism al spaţiilor $H_0^m(\Omega)$ *şi* $H^{-m}(\Omega)$.

Demonstraţie. Conform Teoremei 7.12, operatorul L este bine definit. Se constată că pentru orice $u \in H_0^m(\Omega)$ şi orice $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, avem

$$(Lu, \varphi) = (u, \varphi)_{H^m}. \tag{7.14}$$

Aşadar, distribuţia Lu are aceeaşi acţiune asupra funcţiilor din spaţiul $\mathcal{D}(\Omega)$ (dens în $H_0^m(\Omega)$) ca şi funcţionala $(u, .)_{H^m}$ liniară şi continuă pe $H_0^m(\Omega)$. In acest sens se poate spune că $Lu = u$ în $H^{-m}(\Omega)$, unde $H_0^m(\Omega)$ este înzestrat cu produsul scalar $(.,.)_{H^m}$. Atenţie, sensul exact al propoziţiei ,,$Lu = u$ în $H^{-m}(\Omega)$" este dat de (7.14); de altfel, este limpede că, în general, $Lu \neq u$ în $\mathcal{D}'(\Omega)$. ■

Observaţia 7.6 Teorema 7.13 garantează că pentru orice $f \in H^{-m}(\Omega)$ există o singură funcţie $u \in H_0^m(\Omega)$ cu $Lu = f$, adică problema

$$\begin{cases} \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} u = f \ \text{ în } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u \in H_0^m(\Omega) \end{cases}$$

are soluţie unică. Această funcţie poate fi considerată soluţie generalizată (sau slabă) a problemei

$$\begin{cases} \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^{2\alpha} u = f & \text{pe } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases}$$

Este util să analizăm în mod special cazul $m = 1$, adică al spaţiilor $H_0^1(\Omega)$ şi $H^{-1}(\Omega)$, atunci când Ω este mărginit şi $H_0^1(\Omega)$ este înzestrat cu norma echivalentă $|u|_{H_0^1} = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{1/2}$.

Teorema 7.14 *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ deschis şi mărginit. O distribuţie f pe Ω aparţine lui $H^{-1}(\Omega)$ dacă şi numai dacă există funcţiile $g_1, g_2, ..., g_n \in L^2(\Omega)$ astfel încât*

$$f = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial x_j}.$$

In acest caz, avem

$$|f|_{H^{-1}} = \left(\sum_{j=1}^{n} |g_j|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aici numărul $|f|_{H^{-1}}$ *reprezintă norma lui* f *în spaţiul* $H^{-1}(\Omega)$, *privit ca dual al lui* $\left(H_0^1(\Omega), |.|_{H_0^1}\right)$.

Observaţia 7.7 Aşadar, o distribuţie f pe Ω mărginit aparţine lui $H^{-1}(\Omega)$ dacă şi numai dacă există o funcţie $\mathbf{g} \in L^2(\Omega; \mathbf{R}^n)$ cu $f = -\operatorname{div} \mathbf{g}$. In acest caz, $|f|_{H^{-1}} = |\mathbf{g}|_{L^2(\Omega;\mathbf{R}^n)}$.

Teorema 7.15 *Fie* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *deschis şi mărginit. Operatorul* $-\Delta$: $H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ *este un izomorfism al spaţiilor* $H_0^1(\Omega)$ *şi* $H^{-1}(\Omega)$.

Observaţia 7.8 Mai general, orice operator L eliptic, de tipul (3.39), realizează un izomorfism al spaţiilor $H_0^1(\Omega)$ şi $H^{-1}(\Omega)$. Şi în acest caz se poate spune că $Lu = u$ în $H^{-1}(\Omega)$, în sensul că $(Lu, \varphi) = a(u, \varphi)$ pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, unde $a(.,.)$ este definit de formula (3.41).

7.8 Soluţii generalizate ale problemelor Cauchy

In Capitolul 5 am studiat problema Cauchy pentru ecuaţia căldurii şi ecuaţia undelor. Spaţiul $\mathcal{S}$ în care s-a lucrat este însă mult prea restrictiv pentru aplicaţii. Amintindu-ne că transformarea Fourier realizează o izometrie şi în cazul spaţiului $L^2(\mathbf{R}^n)$, este firesc să ne punem problema extinderii rezultatelor prezentate în Capitolul 5, la cazul în care datele iniţiale sunt din $L^2(\mathbf{R}^n)$. Este clar că în această situaţie nu ne putem aştepta să existe soluţii clasice şi vorbim doar de *soluţii slabe.*

Teorema 7.16 (existenţă, unicitate şi reprezentare în L^2) *Dacă* $g_0 \in L^2(\mathbf{R}^n)$, *atunci există o unică funcţie*

$$u \in C([0,\infty); L^2(\mathbf{R}^n)) \cap C^1((0,\infty); L^2(\mathbf{R}^n))$$

astfel încât

$$\begin{cases} u'(t) - \Delta u(t) = 0 \ \text{ în } \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n), \ t > 0 \\ u(0) = g_0. \end{cases} \tag{7.15}$$

In plus $u \in C^\infty((0,\infty); L^2(\mathbf{R}^n))$ *şi are loc formula de reprezentare* (5.17).

Demonstraţie. *Unicitatea şi reprezentarea.* Fie u o funcţie cu toate proprietăţile din enunţ. Cum $\Delta u(t) \in \mathcal{S}'$, (7.15) este echivalent via transformarea Fourier în $\mathcal{S}'$, cu (5.15). Ca în demonstraţia Teoremei

5.5 se obţine formula de reprezentare (5.17), cu menţiunea că de această dată, transformarea Fourier se aplică unor funcţii din $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Existenţa. Se observă pentru început că $w(t) \in L^2(\mathbf{R}^n)$ pentru orice $t \geq 0$, iar $\frac{\partial^k w(x,t)}{\partial t^k} \in L^2(\mathbf{R}^n)$ pentru $t > 0$ şi $k \geq 1$. Faptul că $w \in C([0,\infty); L^2(\mathbf{R}^n))$ şi $\frac{\partial^k w(x,t)}{\partial t^k} \in C((0,\infty); L^2(\mathbf{R}^n))$ se demonstrează folosind teorema creşterilor finite, într-un mod asemănător cu cel din demonstraţia Teoremei 5.5. Propunem cititorului să efectueze acest raţionament. ■

Se poate demonstra că proprietatea $u'(t) - \Delta u(t) = 0$ în $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, $t > 0$, este echivalentă cu faptul că $u(x,t)$ satisface ecuaţia căldurii în $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n \times (0,\infty))$ şi, de asemenea, cu faptul că pentru orice $v \in H^1(\mathbf{R}^n)$, $(u(t), v)_{L^2(\mathbf{R}^n)} \in C^1[0,\infty)$ şi

$$\frac{d}{dt}(u(t), v)_{L^2(\mathbf{R}^n)} + (\nabla u(t), \nabla v)_{L^2(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^n)} = 0, \quad t \geq 0.$$

Un spor de regularitate pentru soluţia slabă u, în punctul $t = 0$, se obţine dacă g_0 posedă anumite proprietăţi de netezime. Astfel, se poate demonstra că dacă $g_0 \in H^m(\mathbf{R}^n)$, atunci $u^{(k)} \in C([0,\infty); H^{m-2k}(\mathbf{R}^n))$ pentru $0 \leq k \leq m/2$.

Ca şi în cazul ecuaţiei căldurii, putem vorbi de soluţii slabe (generalizate, sau distribuţionale) ale problemei Cauchy pentru ecuaţia undelor, în condiţii mai generale asupra datelor.

Teorema 7.17 (existenţă, unicitate şi reprezentare în L^2) *Dacă* $g_0 \in H^1(\mathbf{R}^n)$ *şi* $g_1 \in L^2(\mathbf{R}^n)$, *atunci există o unică funcţie* $u \in C^1\left(\mathbf{R}; L^2(\mathbf{R}^n)\right) \cap C\left(\mathbf{R}; H^1(\mathbf{R}^n)\right)$ *astfel încât* $u(0) = g_0$, $u'(0) = g_1$ *şi pentru orice* $v \in H^1(\mathbf{R}^n)$, $(u(t), v)_{L^2(\mathbf{R}^n)} \in C^2(\mathbf{R})$ *şi*

$$\frac{d^2}{dt^2}(u(t), v)_{L^2(\mathbf{R}^n)} + (\nabla u(t), \nabla v)_{L^2(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^n)} = 0, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{7.16}$$

In plus u se reprezintă prin formula (5.19) *şi satisface legea conservării energiei*

$$\left|u'(t)\right|^2_{L^2(\mathbf{R}^n)} + |\nabla u(t)|^2_{L^2(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^n)} = |g_1|^2_{L^2(\mathbf{R}^n)} + |\nabla g_0|^2_{L^2(\mathbf{R}^n;\mathbf{R}^n)}. \tag{7.17}$$

Demonstraţie. *Existenţa şi reprezentarea.* Avem de arătat că formula

$$u(t)(x) = T^{-1}\left[T[g_0](y)\cos(|y|\,t) + T[g_1](y)\frac{\sin(|y|\,t)}{|y|}\right](x)$$

defineşte o funcţie $u \in C^1\left(\mathbf{R}; L^2\left(\mathbf{R}^n\right)\right) \cap C\left(\mathbf{R}; H^1\left(\mathbf{R}^n\right)\right)$ astfel încât $u(0) = g_0$, $u'(0) = g_1$ şi cu proprietatea (7.16). Avem de demonstrat că $u \in C\left(\mathbf{R}; H^1\left(\mathbf{R}^n\right)\right)$ şi $\partial u/\partial t \in C\left(\mathbf{R}; L^2\left(\mathbf{R}^n\right)\right)$, unde

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = T^{-1}\left[-T[g_0](y)|y|\sin(|y|t) + T[g_1](y)\cos(|y|t)\right](x).$$

Faptul că pentru un t fixat, $u(t)$ aparţine spaţiului $H^1(\mathbf{R}^n)$ se arată astfel:

$$\begin{aligned} u(t) \quad \in \quad & H^1(\mathbf{R}^n) \Longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_j}u(t) \in L^2(\mathbf{R}^n) \quad (j = 1, 2, ..., n) \\ \Longleftrightarrow \quad & T\left[\frac{\partial}{\partial x_j}u(t)\right] \in L^2(\mathbf{R}^n) \\ \Longleftrightarrow \quad & y_j T[u(t)](y) \in L^2(\mathbf{R}^n) \\ \Longleftrightarrow \quad & y_j T[g_0](y)\cos(|y|t) + T[g_1](y)\frac{y_j}{|y|}\sin(|y|t) \in L^2(\mathbf{R}^n). \end{aligned}$$

Dar $iy_jT[g_0](y) = T\left[\frac{\partial}{\partial x_j}g_0\right](y) \in L^2(\mathbf{R}^n)$ fiindcă $g_0 \in H^1(\mathbf{R}^n)$. Cum $\cos(|y|t)$ este mărginit, rezultă atunci că $y_jT[g_0](y) \in L^2(\mathbf{R}^n)$. La fel, mărginirea lui $\frac{y_j}{|y|}\sin(|y|t)$ implică $T[g_1](y)\frac{y_j}{|y|}\sin(|y|t) \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Aşadar $u(t) \in H^1(\mathbf{R}^n)$.

In mod asemănător se arată că $\frac{\partial u}{\partial t}(.,t) \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Verificarea acestei incluziuni, demonstrarea continuităţii în raport cu t a funcţiilor $u(t)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(.,t)$ şi demonstrarea relaţiei (7.16) sunt lăsate pe seama cititorului.

Pentru a deduce legea de conservare a energiei, pornim de la egalităţile

$$\begin{aligned} T\left[u'(t)\right](y) &= -T[g_0](y)|y|\sin(|y|t) + T[g_1](y)\cos(|y|t) \\ |y|\,T[u(t)](y) &= T[g_0](y)|y|\cos(|y|t) + T[g_1](y)\sin(|y|t). \end{aligned}$$

Luând părţilelor reale, ridicându-le la pătrat şi adunându-le, obţinem

$$\left(\mathrm{Re}\ T\left[u'(t)\right]\right)^2 + |y|^2\left(\mathrm{Re}\ T[u(t)]\right)^2 = |y|^2\left(\mathrm{Re}\ T[g_0]\right)^2 + \left(\mathrm{Re}\ T[g_1]\right)^2.$$

Procedând la fel pentru părţile lor imaginare şi însumând cele două egalităţi, obţinem identitatea

$$\left|T\left[u'(t)\right](y)\right|^2 + |y|^2\left|T[u(t)](y)\right|^2 = \left|T[g_1](y)\right|^2 + |y|^2\left|T[g_0](y)\right|^2$$

care reprezintă legea conservării energiei în fiecare punct y. Dacă se integrează în raport cu y, se obţine legea conservării globale a energiei (7.17).

Unicitatea rezultă imediat din legea de conservare. ■

De menţionat că proprietatea (7.16) este echivalentă cu faptul că $u(x,t)$ satisface ecuaţia undelor în $\mathcal{D}'\left(\mathbf{R}^{n+1}\right)$ (Exerciţiu).

Notăm de asemenea faptul că un spor de regularitate pentru soluţia slabă se obţine dacă se presupune $g_0 \in H^{m+1}(\mathbf{R}^n)$ şi $g_1 \in H^m(\mathbf{R}^n)$, unde $m \geq 1$.

Relativ la problema Cauchy pentru ecuaţia neomogenă a căldurii, putem generaliza rezultatul din Secţiunea 5.4 la cazul funcţiilor din $L^2(\mathbf{R}^n)$, în felul următor.

Să notăm cu $S(t)\,g_0$ soluţia problemei (5.10) dacă $g_0 \in L^2(\mathbf{R}^n)$. Deci

$$\begin{aligned} S(t)\,g_0 &= g_0 * N(t), \quad t > 0 \\ S(0)\,g_0 &= g_0. \end{aligned}$$

Teorema 7.18 *Dacă $f \in L^1_{loc}([0,\infty); L^2(\mathbf{R}^n))$, atunci există o unică funcţie $v \in C([0,\infty); L^2(\mathbf{R}^n))$ satisfăcând $v(0) = 0$ şi $v_t - \Delta_x v = f$ în $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n \times (0,\infty))$. In plus are loc reprezentarea*

$$\begin{aligned} v(t)(x) &= \int_0^t [S(\tau)\,f(t-\tau)](x)\,d\tau \\ &= \left(\widetilde{f} * N\right)(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbf{R}^n} f(y,\tau)\,N(x-y,t-\tau)\,dy d\tau. \end{aligned}$$

Familia $(S(t))_{t\geq 0}$ de operatori liniari de la $L^2(\mathbf{R}^n)$ în el însuşi, se bucură de următoarele proprietăţi:

$$\begin{aligned} &S(t+s) = S(t)\,S(s), \quad t,s \geq 0 \\ &S(0) = I \ \ \text{(operatorul identitate)} \\ &\lim_{t\to 0} S(t)\,g_0 = g_0, \quad g_0 \in L^2(\mathbf{R}^n). \end{aligned}$$

In plus, pe baza formulei (5.17), operatorii $S(t)$ sunt neexpansivi, adică

$$|S(t)\,g_0|_{L^2} \leq |g_0|_{L^2}, \quad g_0 \in L^2(\mathbf{R}^n). \tag{7.18}$$

Se spune că $(S(t))_{t\geq 0}$ este un *semigrup continuu de contracţii liniare* pe spaţiul Hilbert $L^2(\mathbf{R}^n)$. Pentru teoria abstractă a semigrupurilor de operatori liniari şi mărginiţi şi aplicaţiile ei la ecuaţii de evoluţie recomandăm Aubin [2], Brezis [5], Cazenave–Haraux [8], Dautray–Lions [9, chapitre XVII] şi Pazy [36].

Pentru un alt mod de abordare a problemei Cauchy trimitem la Barbu [3, p. 194], Kalik [23, p. 218] şi Vladimirov [57, p. 272].

Incheiem cu o aplicaţie la problema semiliniară

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x, u(x,t)), & x \in \mathbf{R}^n,\ t > 0 \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbf{R}^n. \end{cases} \tag{7.19}$$

Teorema 7.19 *Fie $f : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie cu proprietăţile:*

(i) *$f(.,u)$ este măsurabilă oricare ar fi $u \in \mathbf{R}$ şi $f(.,0) \in L^2(\mathbf{R}^n)$;*

(ii) *există $a \geq 0$ astfel încât*

$$|f(x,u) - f(x,v)| \leq a\,|u - v|, \quad u, v \in \mathbf{R},\ a.p.t.\ x \in \mathbf{R}^n.$$

Atunci problema Cauchy semiliniară (7.19) *admite o soluţie slabă unică $u \in C([0,\infty); L^2(\mathbf{R}^n))$.*

Demonstraţie. Pentru $t \in [0,T]$, problema (7.19) este echivalentă cu problema de punct fix $u = A(u)$ pe spaţiul Banach $C\left([0,T]; L^2(\mathbf{R}^n)\right)$, unde

$$A(u)(t) = \int_0^t S(t-\tau) f(., u(\tau))\, d\tau, \quad t \in [0,T].$$

Folosind inegalitatea (7.18), se constată că

$$\begin{aligned} |A(u)(t) - A(v)(t)|_{L^2} &\leq \int_0^t |f(., u(\tau)) - f(., v(\tau))|_{L^2}\, d\tau \\ &\leq a \int_0^t |u(\tau) - v(\tau)|_{L^2}\, d\tau \\ &= a \int_0^t e^{\theta\tau} e^{-\theta\tau} |u(\tau) - v(\tau)|_{L^2}\, d\tau \\ &\leq \frac{a}{\theta} e^{\theta t} \max_{\tau \in [0,T]} \left(e^{-\theta\tau} |u(\tau) - v(\tau)|_{L^2} \right). \end{aligned}$$

Rezultă

$$\max_{t \in [0,T]} e^{-\theta t} |A(u)(t) - A(v)(t)|_{L^2} \leq \frac{a}{\theta} \max_{t \in [0,T]} e^{-\theta t} |u(t) - v(t)|_{L^2}.$$

Dacă alegem $\theta > a$, atunci operatorul A devine o contracţie pe spaţiul $C\left([0,T]; L^2(\mathbf{R}^n)\right)$ înzestrat cu norma $\max_{t \in [0,T]} e^{-\theta t} |u(t)|_{L^2}$. Concluzia rezultă acum pe baza teoremei de punct fix a lui Banach. ■

Capitolul 8
Teoria variaţională a problemelor la limită eliptice

8.1 Metoda variaţională pentru problema Dirichlet

Teorema 7.15 garantează că dacă $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ este o mulţime deschisă şi mărginită, atunci pentru orice $f \in H^{-1}(\Omega)$ există o singură funcţie $u \in H_0^1(\Omega)$ cu $-\Delta u = f$, adică problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f \ \text{ în } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

are soluţie unică. Această funcţie poate fi considerată soluţie generalizată, sau slabă, a problemei Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{pe } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases} \tag{8.1}$$

Cum $L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, este justificată întrebarea dacă această noţiune de soluţie slabă, pentru $f \in L^2(\Omega)$, coincide cu noţiunea de soluţie slabă introdusă în Partea I. Răspunsul este afirmativ, după cum rezultă din teorema care urmează, de caracterizare variaţională a soluţiei slabe.

Ataşăm problemei Dirichlet (8.1) cu $f \in H^{-1}(\Omega)$, funcţionala energie

$$E : H_0^1(\Omega) \to \mathbf{R}, \ \ E(u) = \frac{1}{2}|u|_{H_0^1}^2 - (f, u).$$

Aici (f, u) reprezintă valoarea pe funcţia u a funcţionalei liniare şi continue f. Amintim că atunci când $f \in L^2(\Omega)$, (f, u) coincide cu $(f, u)_{L^2}$.

Propoziţia 8.1 *Fie* $u, v \in H_0^1(\Omega)$.

1) *Funcţia reală de variabilă reală*

$$t \in \mathbf{R} \longmapsto E(u + tv) \in \mathbf{R}$$

este derivabilă în punctul $t = 0$ *şi*

$$\begin{aligned} E'(u; v) &= \lim_{t \to 0^+} \frac{E(u+tv) - E(u)}{t} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx - (f, v) \\ &= (u, v)_{H_0^1} - (f, v). \end{aligned}$$

2) *Dacă* $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, *atunci numărul* $E'(u; \varphi)$ *este egal cu acţiunea distribuţiei* $-(\Delta u + f)$ *asupra funcţiei test* φ, *adică*

$$E'(u; \varphi) = -(\Delta u + f, \varphi).$$

Demonstraţie. Un calcul simplu bazat pe proprietăţile produsului scalar arată că

$$E(u + tv) = E(u) + t\left[(u, v)_{H_0^1} - (f, v)\right] + \frac{t^2}{2} |v|_{H_0^1}^2. \tag{8.2}$$

De aici, expresia derivatei de la punctul 1) rezultă imediat.

2) Dacă $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, atunci numărul (f, φ) reprezentând acţiunea distribuţiei regulare f asupra lui φ, este $(f, \varphi) = \int_\Omega f \varphi dx = (f, \varphi)_{L^2}$. De asemenea, folosind derivatele în sens distribuţional, avem

$$\begin{aligned} (u, \varphi)_{H_0^1} &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \sum_{j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = -(\Delta u, \varphi). \end{aligned}$$

Aşadar, $E'(u; \varphi) = -(\Delta u + f, \varphi)$. ■

Teorema 8.1 (principiul lui Dirichlet) *Fie* $f \in H^{-1}(\Omega)$ *şi* $u \in H_0^1(\Omega)$. *Următoarele trei propoziţii sunt echivalente:*

(i) $-\Delta u = f$ *în* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

(ii) $E'(u; v) = 0$ *oricare ar fi* $v \in H_0^1(\Omega)$.

(iii) $E(u) < E(w)$ *oricare ar fi* $w \in H_0^1(\Omega)$ *cu* $w \neq u$.

Demonstraţie. (i)⇒(ii): Dacă $-\Delta u = f$ în $\mathcal{D}'(\Omega)$, atunci pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ avem $(\Delta u + f, \varphi) = 0$, de unde ţinând seamă de Propoziţia 8.1 2), găsim că $E'(u;\varphi) = 0$. Prin densitate, obţinem că $E'(u;v) = 0$ pentru orice $v \in H_0^1(\Omega)$.

(ii)⇒(i): Din (ii) rezultă că $E'(u;\varphi) = 0$ pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pe baza Propoziţiei 8.1, rezultă că $(\Delta u + f, \varphi) = 0$ pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, adică $\Delta u + f = 0$ în $\mathcal{D}'(\Omega)$.

(ii)⇒(iii): Fie $w \in H_0^1(\Omega)$, $w \neq u$. Folosind (8.2) în care $t = 1$ şi $v = w - u$, găsim

$$\begin{aligned} E(w) &= E(u + (w-u)) = E(u) + E'(u; w-u) + \frac{1}{2}|w-u|_{H_0^1}^2 \\ &= E(u) + \frac{1}{2}|w-u|_{H_0^1}^2 > E(u). \end{aligned}$$

(iii)⇒(ii): Dacă u este punct de minim absolut al lui E, atunci pentru orice $v \in H_0^1(\Omega)$ fixat, avem $E(u) \leq E(u+tv)$ oricare ar fi $t \in \mathbf{R}$. Folosind Propoziţia 8.1 1) şi teorema lui Fermat, deducem că $E'(u;v) = 0$. ■

Numim *soluţie slabă,* sau *generalizată,* a problemei Dirichlet (8.1) o funcţie $u \in H_0^1(\Omega)$ care satisface oricare din cele trei condiţii echivalente ale Teoremei 8.1 (adică, satisface ecuaţia $-\Delta u = f$ în $\mathcal{D}'(\Omega)$; este punct critic al funcţionalei energie; este punct de minim al funcţionalei energie).

Conform Teoremei 7.15 soluţia slabă există şi este unică. La această concluzie se poate ajunge şi direct, aplicând teorema lui Riesz funcţionalei liniare şi continue $F : H_0^1(\Omega) \to \mathbf{R}$, $F(v) = (f, v)$, ca în demonstraţia Teoremei 3.13.

In plus, şi în acest caz mai general, are loc formula de reprezentare a soluţiei slabe cu ajutorul valorilor şi funcţiilor proprii ale problemei Dirichlet:

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(f, \phi_k)}{\lambda_k} \phi_k$$

convergenţa având loc în $H_0^1(\Omega)$. In adevăr, dacă $f \in H^{-1}(\Omega)$, atunci $u = (-\Delta)^{-1} f \in H_0^1(\Omega)$ şi

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \left((-\Delta)^{-1} f, \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \phi_k \right)_{H_0^1} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \phi_k$$

(convergenţa având loc în $H_0^1(\Omega)$), iar $\left((-\Delta)^{-1} f, \phi_k\right)_{H_0^1} = (f, \phi_k)$.

Proprietăţi de regularitate suplimentare pentru soluţia slabă pot fi puse în evidenţă dacă Ω şi f sunt suficient de regulare.

Teorema 8.2 *Fie $u \in H_0^1(\Omega)$ soluţia slabă a problemei* (8.1).

1) *Dacă Ω este de clasă C^{m+2} şi $f \in H^m(\Omega)$ ($m \in \mathbf{N}$), atunci $u \in H^{m+2}(\Omega)$ şi există o constantă $C > 0$ depinzând numai de Ω şi de m astfel încât*

$$|u|_{H^{m+2}} \leq C\,|f|_{H^m}.$$

In particular, dacă $m > n/2$, atunci $u \in H^{m+2}(\Omega) \subset C^2(\overline{\Omega})$.

2) *Dacă Ω este de clasă C^∞ şi $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, atunci $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.*

Demonstraţia acestui rezultat este laborioasă şi va fi prezentată în Secţiunea 8.4.

Rezultatul care urmează răspunde la întrebarea: în ce condiţii soluţia slabă este soluţie clasică?

Teorema 8.3 *Dacă Ω este de clasă C^1, $f \in C(\overline{\Omega})$, iar $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ este soluţia slabă a problemei* (8.1), *atunci u este şi soluţie clasică.*

Demonstraţie. 1) Cum Ω este de clasă C^1 şi $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$, pe baza Teoremei 7.4, avem că $u = 0$ pe $\partial\Omega$. 2) Funcţia u fiind soluţie slabă, pe baza principiului lui Dirichlet, ea satisface ecuaţia $-\Delta u = f$ în $\mathcal{D}'(\Omega)$. Cum însă distribuţiile $-\Delta u$ şi f sunt regulare şi corespund unor funcţii continue, iar scufundarea $C(\overline{\Omega}) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ este injectivă, rezultă că funcţia u satisface punctual ecuaţia lui Poisson. ■

Am ilustrat pe cazul problemei Dirichlet (8.1), etapele care sunt parcurse atunci când se aplică metoda variaţională unei probleme la limită oarecare. Aceste etape sunt următoarele:

Etapa 1. Se defineşte noţiunea de soluţie slabă (generalizată). Aceasta presupune în primul rând precizarea spaţiului de funcţii în care se caută soluţiile. Definiţia va fi în aşa fel dată încât orice soluţie clasică să fie o soluţie slabă.

Etapa 2. Se stabileşte existenţa şi unicitatea soluţiei slabe folosind metoda variaţională. Cu această metodă, soluţia se găseşte ca punct de extrem (mai general, ca punct critic) al unei funcţionale asociate problemei.

Etapa 3. Este studiată regularitatea soluţiei slabe obţinute, adică apartenenţa ei la spaţii de funcţii mai netede, în particular la spaţiul C^2.

Etapa 4. Revenirea la soluţii clasice. Aceasta presupune să se demonstreze că în condiţii precizate de regularitate a datelor, soluţia slabă este soluţie clasică.

In continuare ne referim la problema Dirichlet cu condiţia la limită neomogenă.

Teorema 8.4 *Fie Ω deschis, mărginit şi de clasă C^1, $f \in H^{-1}(\Omega)$ şi $\upsilon \in H^{1/2}(\Gamma)$, unde $\Gamma = \partial\Omega$. Există o unică funcţie $u \in H^1(\Omega)$ astfel încât*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{în } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u|_{\Gamma} = \upsilon. \end{cases}$$

Notaţia $u|_{\Gamma}$ este folosită pentru a desemna urma funcţiei u pe Γ.

Demonstraţie. Din definiţia spaţiului $H^{1/2}(\Gamma)$, rezultă că există un element $u_1 \in H^1(\Omega)$ cu $u_1|_{\Gamma} = \upsilon$. Observaţia 7.7 garantează că $\Delta u_1 \in H^{-1}(\Omega)$. Atunci problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f + \Delta u_1 & \text{pe } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega \end{cases}$$

are o unică soluţie slabă $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. Este clar că că funcţia $u = u_0 + u_1$ este cea căutată. ∎

Funcţia u cu proprietăţile din teorema anterioară poate fi considerată soluţia slabă a problemei Dirichlet neomogene

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{pe } \Omega \\ u = \upsilon & \text{pe } \partial\Omega \end{cases}$$

unde $f \in H^{-1}(\Omega)$ iar $\upsilon \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Demonstraţia Teoremei 8.4 arată că studiul problemei Dirichlet neomogene se reduce, via operatorul urmă, la studiul problemei Dirichlet omogene.

Menţionăm în încheiere că rezultatele obţinute mai sus, ca şi metoda variaţională folosită, pot fi extinse la cazul operatorilor eliptici în formă de divergenţă:

$$\begin{aligned} Lu &= -\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + a_0(x)\,u \\ &= -\operatorname{div}\left(A(x)\nabla u\right) + a_0(x)\,u. \end{aligned}$$

8.2 Metoda variaţională pentru problema Neumann

In continuare vom parcurge aceleaşi etape în cazul problemei Neumann.

In Partea I am considerat problema Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + a_0(x)\, u = f & \text{pe } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{pe } \partial\Omega \end{cases} \tag{8.3}$$

unde $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ este o mulţime deschisă şi mărginită, $a_0 \in C(\overline{\Omega})$ şi $a_0(x) \geq m > 0$ oricare ar fi $x \in \Omega$.

Prin *soluţie clasică* a problemei (8.3) în care Ω este de clasă C^1 şi $f \in C(\overline{\Omega})$, s-a înţeles o funcţie $u \in C^2(\overline{\Omega})$ care satisface punctual egalităţile (8.3), iar prin *soluţie slabă* sau *generalizată* s-a înţeles o funcţie $u \in H^1(\Omega)$ care satisface identitatea

$$a(u, v) - (f, v)_{L^2} = 0, \quad v \in H^1(\Omega). \tag{8.4}$$

Amintim că

$$a(u, v) = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + a_0\, uv)\, dx.$$

S-a văzut că pentru orice $f \in L^2(\Omega)$, soluţia slabă a problemei Neumann există, este unică şi minimizează funcţionala energie

$$E : H^1(\Omega) \to \mathbf{R}, \quad E(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - (f, u)_2.$$

Să observăm că, la fel ca în cazul problemei Dirichlet, pentru $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, avem

$$E'(u; \varphi) = a(u, \varphi) - (f, \varphi)_{L^2} = -(\Delta u - a_0\, u + f, \varphi)$$

unde $(\Delta u - a_0\, u + f, \varphi)$ reprezintă acţiunea distribuţiei $\Delta u - a_0 u + f$ asupra funcţiei test φ. Rezultă că soluţia slabă a problemei Neumann satisface ecuaţia $-\Delta u + a_0\, u = f$ în sens distribuţional, adică

$$-\Delta u + a_0\, u = f \quad \text{în } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{8.5}$$

Reciproca nu are însă loc, adică nu orice funcţie $u \in H^1(\Omega)$ care satisface (8.5) este soluţie generalizată a problemei Neumann; explicaţia constă în faptul că $\overline{C_0^\infty(\Omega)} \neq H^1(\Omega)$. Aceasta ne permite să afirmăm că proprietatea (8.4) conferă în mod implicit un anume înţeles condiţiei la limită $\partial u / \partial \nu = 0$, suficient pentru a garanta unicitatea soluţiei.

Proprietăţi suplimentare de regularitate pentru soluţia slabă a problemei Neumann pot fi garantate dacă se ţine cont de teoremele de scufundare a spaţiilor Sobolev. Astfel are loc teorema.

Teorema 8.5 *Fie $u \in H^1(\Omega)$ soluţia slabă a problemei Neumann* (8.3).

1) *Dacă Ω este de clasă C^{m+2}, $a_0 \in C^m(\overline{\Omega})$ şi $f \in H^m(\Omega)$, atunci $u \in H^{m+2}(\Omega)$ şi există o constantă $C > 0$ depinzând numai de Ω şi de m astfel încât $|u|_{H^{m+2}} \leq C\,|f|_{H^m}$. In particular, dacă $m > n/2$, atunci $u \in C^2(\overline{\Omega})$.*

2) *Dacă Ω este de clasă C^∞, $a_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ şi $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, atunci $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.*

Teorema următoare oferă condiţii suficiente pentru ca soluţia slabă a problemei Neumann să fie soluţie clasică.

Teorema 8.6 *Dacă Ω este de clasă C^1, $f \in C(\overline{\Omega})$ şi $u \in H^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ este soluţia slabă a problemei* (8.3), *atunci u este şi soluţie clasică.*

Demonstraţie. 1) Avem $-\Delta u + a_0\, u - f = 0$ în $\mathcal{D}'(\Omega)$, iar cum $-\Delta u + a_0\, u - f \in C(\overline{\Omega})$, rezultă că u satisface punctual egalitatea $-\Delta u + a_0\, u - f = 0$.

2) Urmează să arătăm că $\partial u / \partial \nu = 0$ pe $\partial \Omega$. Definiţia soluţiei slabe implică că

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla \varphi + a_0\, u\varphi - f\varphi)\, dx = 0, \quad \varphi \in C^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega).$$

De aici, folosind formula (G1) a lui Green şi faptul deja demonstrat că $-\Delta u + a_0\, u - f = 0$, deducem

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, \varphi\, d\sigma = \int_\Omega (\varphi\, \Delta u + \nabla u \cdot \nabla \varphi)\, dx = \int_\Omega (\Delta u - a_0 u + f)\, \varphi\, dx = 0.$$

Aşadar

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, \varphi\, d\sigma = 0, \qquad \varphi \in C^1(\overline{\Omega}). \tag{8.6}$$

Aceasta implică că $\partial u / \partial \nu = 0$ pe $\partial \Omega$. Intr-adevăr, să presupunem contrarul, anume că pentru vreun $x_0 \in \partial \Omega$, avem $\partial u / \partial \nu\, (x_0) \neq 0$. Pentru fixarea ideilor să presupunem că $\partial u/\partial\nu\,(x_0) > 0$. Atunci ar exista $\varepsilon > 0$ astfel ca

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) > 0 \text{ oricare ar fi } x \in \overline{B}_\varepsilon(x_0) \cap \partial\Omega.$$

Dacă acum în (8.6) alegem $\varphi(x) = \rho_\varepsilon(x - x_0)$, obţinem

$$0 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\,\rho_\varepsilon(x - x_0)\,d\sigma = \int_{\overline{B}_\varepsilon(x_0)\cap\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x)\,\rho_\varepsilon(x - x_0)\,d\sigma > 0$$

o contradicţie. ■

8.3 Principii de maxim pentru soluţii slabe

Clasicul principiu slab de maxim, Corolarul 3.6, admite o generalizare naturală pentru funcţii din spaţiul Sobolev $H^1(\Omega)$. Pentru a o formula, este necesar să conferim un sens inegalităţilor $\Delta u \geq 0$ pe Ω şi $u \leq 0$ pe $\partial\Omega$, atunci când $u \in H^1(\Omega)$.

Definiţia 8.1 Fie $u \in D'(\Omega)$. Spunem că u este o *distribuţie nenegativă* şi scriem $u \geq 0$ în $D'(\Omega)$, dacă $(u, \varphi) \geq 0$ pentru orice $\varphi \in D(\Omega)$ cu $\varphi \geq 0$ pe Ω.

Această noţiune permite definirea unei relaţii de ordine pe spaţiul $\mathcal{D}'(\Omega)$ după cum urmează. Fie $u, v \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Spunem că $u \leq v$, dacă distribuţia $v - u$ este nenegativă, adică $v - u \geq 0$ în $\mathcal{D}'(\Omega)$. Relaţia $\leq$ astfel definită pe $\mathcal{D}'(\Omega)$, este în mod evident reflexivă şi tranzitivă; pentru a demonstra că ea este antisimetrică este necesar şi suficient să arătăm că inegalităţile $u \geq 0$ şi $-u \geq 0$ implică $u = 0$. Pentru aceasta să considerăm o funcţie test oarecare $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Avem $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ şi $\varphi_k = (\varphi^+)_k - (\varphi^-)_k$, unde $\varphi^+ = \max\{0, \varphi\}$, $\varphi^- = \max\{0, -\varphi\}$, iar pentru o funcţie f oarecare, s-a notat cu f_k regularizata sa $\rho_k * f$. Folosind relaţia

$$\begin{aligned} & |(D^\alpha \varphi_k)(x) - (D^\alpha \varphi)(x)| \\ = \; & |(\rho_k * D^\alpha \varphi)(x) - (D^\alpha \varphi)(x)| \\ \leq \; & \int_{|x-y|<\frac{1}{k}} |D^\alpha \varphi(y) - D^\alpha \varphi(x)|\,\rho_k(x-y)\,dy \end{aligned}$$

se constată imediat că $\varphi_k \to \varphi$ în $\mathcal{D}(\Omega)$, pentru $k \to \infty$. Atunci

$$(u, \varphi) = \lim_{k\to\infty} (u, \varphi_k) = \lim_{k\to\infty} \left[\left(u, \left(\varphi^+\right)_k\right) - \left(u, \left(\varphi^-\right)_k\right)\right] = 0,$$

deoarece $(u, \psi) = 0$ oricare ar fi $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ cu $\psi \geq 0$, iar funcţiile $(\varphi^+)_k$ şi $(\varphi^-)_k$ aparţin lui $\mathcal{D}(\Omega)$ şi sunt nenegative. Aşadar, $(u, \varphi) = 0$ pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, adică $u = 0$.

Să mai observăm că dacă distrubuţia u este regulară, adică $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, atunci pozitivitatea ei în sensul Definiţiei 8.1 revine la pozitivitatea lui u ca funcţie, adică la $u(x) \geq 0$ a.p.t. $x \in \Omega$.

Definiţia 8.2 Fie $u \in H^1(\Omega)$. Vom spune că $u \geq 0$ pe $\partial\Omega$ dacă $u^- \in H^1_0(\Omega)$. In mod analog, $u \leq 0$ pe $\partial\Omega$ dacă $u^+ \in H^1_0(\Omega)$, sau echivalent, dacă $-u \geq 0$ pe $\partial\Omega$.

Această definiţie permite introducerea unei relaţii de preordine (reflexivă şi tranzitivă) pe spaţiul $H^1(\Omega)$; fie $u, v \in H^1(\Omega)$; se spune că $u \leq v$ pe $\partial\Omega$ dacă $v - u \geq 0$ pe $\partial\Omega$. Este clar că dacă $u \geq 0$ pe $\partial\Omega$ şi totodată $u \leq 0$ pe $\partial\Omega$, atunci $u \in H^1_0(\Omega)$. Vom demonstra că este adevărată şi reciproca acestei afirmaţii, ceea ce implică faptul că relaţia $\leq$ pe $\partial\Omega$ induce o relaţie de ordine pe spaţiul cât $H^1(\Omega)/H^1_0(\Omega)$.

Propoziţia 8.2 *Fie $u \in H^1(\Omega)$. Atunci $u^+, u^- \in H^1(\Omega)$ şi*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^+}{\partial x_j}(x) &= \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) & \textit{dacă } u(x) > 0 \\ 0 & \textit{dacă } u(x) \leq 0 \end{cases} \\ \frac{\partial u^-}{\partial x_j}(x) &= \begin{cases} 0 & \textit{dacă } u(x) \geq 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) & \textit{dacă } u(x) < 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{8.7}$$

In particular, dacă $u \in H^1_0(\Omega)$, atunci $u^+, u^- \in H^1_0(\Omega)$.

Pentru demonstraţie avem nevoie de următoarea lemă.

Lema 8.1 *Fie $f \in C^1(\mathbf{R})$ o funcţie cu derivata mărginită şi fie $u \in H^1(\Omega)$. Atunci $f \circ u \in H^1(\Omega)$ şi*

$$\frac{\partial (f \circ u)}{\partial x_j} = \left(f' \circ u\right) \frac{\partial u}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{8.8}$$

Dacă în plus $f(0) = 0$ şi $u \in H^1_0(\Omega)$, atunci $f \circ u \in H^1_0(\Omega)$.

Demonstraţie. Avem $f' \circ u \in L^{\infty}(\Omega)$ şi $\partial u/\partial x_j \in L^2(\Omega)$, de unde rezultă că $(f' \circ u)\,\partial u/\partial x_j \in L^2(\Omega)$. Rămâne să demonstrăm relaţia (8.8), adică

$$\int_{\Omega} (f \circ u)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = -\int_{\Omega} \left(f' \circ u\right) \frac{\partial u}{\partial x_j}\,\varphi\, dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{8.9}$$

Fie deci $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ o funcţie test fixată. Vom demonstra formula (8.9) presupunând fără a restrânge generalitatea, că Ω este mărginit şi de clasă C^1 (în caz contrar se va înlocui Ω cu o mulţime mărginită Ω' şi de clasă C^1, astfel încât $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega' \subset \Omega$). Rezultă atunci, pe baza Propoziţiei 7.2, că există un şir $(u_k) \subset C_0^{\infty}(\mathbf{R}^n)$ astfel încât $u_k \to u$ în $H^1(\Omega)$, pentru $k \to \infty$. Este clar că pentru orice k, avem

$$\int_{\Omega} (f \circ u_k)\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = -\int_{\Omega} \left(f' \circ u_k\right) \frac{\partial u_k}{\partial x_j}\,\varphi\, dx\,.$$

De aici, prin trecere la limită, formula (8.9) rezultă imediat dacă se arată că

$$f \circ u_k \to f \circ u \quad \text{şi} \quad \left(f' \circ u_k\right) \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \to \left(f' \circ u\right) \frac{\partial u}{\partial x_j} \quad \text{în } L^2(\Omega)\,.$$

Prima convergenţă rezultă din estimarea

$$\int_{\Omega} |f \circ u_k - f \circ u|^2\, dx \le \sup\left|f'\right|^2 \int_{\Omega} |u_k - u|^2\, dx \le C\, |u_k - u|^2_{L^2(\Omega)}\,.$$

Pentru cea de a doua convergenţă, folosim inegalitatea

$$\begin{aligned} &\left(\int_{\Omega} \left|(f' \circ u_k)\,\frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \left(f' \circ u\right) \frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ \le\ &\sup\left|f'\right| \left(\int_{\Omega} \left|\frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \left(\int_{\Omega} \left|\left(f' \circ u_k\right) - \left(f' \circ u\right)\right|^2 \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Prima integrală din membrul drept al acestei inegalităţi tinde evident la zero. Cea de a doua integrală tinde şi ea la zero, pe baza teoremei convergenţei dominate a lui Lebesgue, dacă se observă că $f' \circ u_k \to f' \circ u$ a.p.t. pe Ω, eventual numai pentru un subşir (reamintim că din convergenţa $u_k \to u$ în $L^2(\Omega)$ rezultă convergenţa punctuală a.p.t. la u a unui subşir al lui (u_k)).

Presupunem că în plus $f(0) = 0$ şi $u \in H_0^1(\Omega)$. Atunci există un şir $(u_k) \subset C_0^\infty(\Omega)$ cu $u_k \to u$ în $H^1(\Omega)$. Ca mai sus se arată că $f \circ u_k \to f \circ u$ în $H_0^1(\Omega)$. Pe de altă parte, prima parte a acestei leme arată că $f \circ u_k \in H^1(\Omega)$, iar cum $\operatorname{supp} f \circ u_k \subset \operatorname{supp} u_k \subset \Omega$, pe baza Teoremei 7.3, avem $f \circ u_k \in H_0^1(\Omega)$. In consecinţă, $f \circ u \in H_0^1(\Omega)$ de asemenea. ■

Demonstraţia Propoziţiei 8.2. Este clar că u^+, u^-, la fel ca şi funcţiile din membrii drepţi ai egalităţilor (8.7), aparţin spaţiului $L^2(\Omega)$. Vom determina acum derivata distribuţională $\partial u^+ / \partial x_j$.

Pentru $\varepsilon > 0$, considerăm funcţia $f_\varepsilon \in C^1(\mathbf{R})$ cu derivata mărginită,

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \left(t^2 + \varepsilon^2\right)^{1/2} - \varepsilon, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Aplicând Lema 8.1, obţinem că pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega (f_\varepsilon \circ u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \, dx = -\int_{(u>0)} \frac{u}{\left(u^2 + \varepsilon^2\right)^{1/2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi \, dx \, .$$

Trecând la limită cu $\varepsilon \to 0$, găsim

$$\int_\Omega u^+ \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = -\int_{(u>0)} \frac{\partial u}{\partial x_j} \varphi \, dx$$

astfel că (8.7) este demonstrată pentru u^+.

Presupunem acum că $u \in H_0^1(\Omega)$. Cum $f_\varepsilon(0) = 0$, avem $f_\varepsilon \circ u \in H_0^1(\Omega)$. In plus, se constată imediat (exerciţiu) că $f_\varepsilon \circ u \to u^+$ în $H^1(\Omega)$ pentru $\varepsilon \to 0$. In consecinţă, $u^+ \in H_0^1(\Omega)$.

Rezultatele corespunzătoare pentru u^- se deduc folosind egalitatea $u^- = (-u)^+$. ■

Suntem acum în măsură să enunţăm generalizarea principiului slab de maxim, pentru funcţii din spaţiul $H^1(\Omega)$.

Teorema 8.7 (principiul de maxim pentru soluţii slabe) *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi mărginită şi fie $u \in H^1(\Omega)$. Dacă $\Delta u \geq 0$ în $\mathcal{D}'(\Omega)$ şi $u \leq 0$ pe $\partial\Omega$, atunci $u \leq 0$ a.p.t. pe Ω.*

Demonstraţie. Cum $\Delta u \geq 0$ în $\mathcal{D}'(\Omega)$, pentru orice $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ cu $\varphi \geq 0$, avem

$$(\Delta u, \varphi) = -\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = -(u, \varphi)_{H_0^1} \geq 0.$$

Prin densitate, obţinem

$$(u, v)_{H_0^1} \leq 0$$

pentru orice $v \in H_0^1(\Omega)$ cu $v \geq 0$. Alegând $v = u^+$ (amintim că $u \leq 0$ pe $\partial\Omega$ înseamnă $u^+ \in H_0^1(\Omega)$) şi ţinând seamă de faptul că $(u^+, u^-)_{H_0^1} = 0$ (pe baza formulei (8.7)), găsim

$$0 \geq \left(u, u^+\right)_{H_0^1} = \left(u^+ - u^-, u^+\right)_{H_0^1} = \left|u^+\right|_{H_0^1}^2$$

de unde rezultă $u^+ \equiv 0$. Deci $u = -u^- \leq 0$ a.p.t. pe Ω. ■

Următorul rezultat este o consecinţă imediată a Teoremei 8.7.

Corolarul 8.1 *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi fie $f \in H^{-1}(\Omega)$ cu $f \geq 0$ în $\mathcal{D}'(\Omega)$. Dacă $u \in H_0^1(\Omega)$ este soluţia slabă a problemei Dirichlet*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{pe } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega \end{cases}$$

atunci $u(x) \geq 0$ a.p.t. pe Ω.

Observaţia 8.1 Corolarul 8.1 afirmă că operatorul liniar $(-\Delta)^{-1} : H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ este *pozitiv* (sau *izoton*).

Observaţia 8.2 Teorema 8.7 şi Corolarul 8.1 rămân adevărate prin înlocuirea operatorului Δu cu operatorul $\Delta u + cu$, dacă şi numai dacă constanta c satisface inegalitatea $c < \lambda_1$, unde λ_1 este prima valoare proprie a problemei Dirichlet pentru operatorul $-\Delta$ (a se vedea Problema 3).

Cititorul este îndemnat să formuleze şi să demonstreze principiul de maxim pentru cazul în care în locul operatorului lui Laplace se consideră mai general, un operator eliptic în formă de divergenţă.

Versiunea generalizată a principiului tare de maxim, Teorema 3.4, pentru a cărei demonstraţie trimitem la Gilbarg–Trudinger [16, Theorem 8.19], este următoarea:

Teorema 8.8 (principiul tare de maxim pentru soluţii slabe) *Fie* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *un domeniu şi fie* $u \in H^1(\Omega)$ *satisfăcând* $\Delta u \geq 0$ *în* $\mathcal{D}'(\Omega)$. *Dacă există o bilă închisă* $B \subset \Omega$ *astfel încăt*

$$ess \sup_B u = ess \sup_\Omega u,$$

atunci funcţia u este constantă pe Ω.

8.4 Regularitatea soluţiilor slabe

Are loc următoarea teoremă de regularitate a soluţiei slabe a problemei Dirichlet.

Teorema 8.9 *Fie* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *o mulţime deschisă, de clasă* C^2 *şi cu frontiera mărginită, sau* $\Omega = \mathbf{R}^n_+$. *Fie* $f \in L^2(\Omega)$ *şi* $u \in H^1_0(\Omega)$ *o funcţie care satisface condiţia*

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\, dx = \int_\Omega f v\, dx, \quad v \in H^1_0(\Omega). \tag{8.10}$$

Atunci $u \in H^2(\Omega)$ *şi există o constantă* C *depinzând numai de* Ω *astfel încât*

$$|u|_{H^2} \leq C\,|f|_{L^2}.$$

Demonstraţie. Parcurgem următoarele etape: 1) cazul $\Omega = \mathbf{R}^n$ 2) cazul $\Omega = \mathbf{R}^n_+$ 3) cazul general, cu subcazurile: a) regularitate interioară, adică într-o submulţime deschisă şi mărginită Ω' cu $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ (când ne inspirăm din cazul $\Omega = \mathbf{R}^n$) b) regularitate în vecinătatea frontierei (când, folosind hărţi locale, ne inspirăm din cazul $\Omega = \mathbf{R}^n_+$).

1) Cazul $\Omega = \mathbf{R}^n$. Pentru orice $h \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, notăm

$$(D_h u)(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|}.$$

Dacă în (8.10) alegem $v = D_{-h}(D_h u)$, obţinem

$$|D_h u|^2_{H^1} \leq |f|_{L^2}\, |D_{-h}(D_h u)|_{L^2} \leq |f|_{L^2}\, |D_h u|_{H^1}.$$

Deci $|D_h u|_{H^1} \leq |f|_{L^2}$, de unde

$$\left| D_h \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|_{L^2} \leq |f|_{L^2}, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Pentru $h = te_j$, unde e_j este versorul axei Ox_j, deducem

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}dx\right| &= \left|\lim_{t\to 0}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k} D_{te_j}\varphi\, dx\right| \\ &\le \lim_{t\to 0}\int_\Omega \left|\varphi\, D_{-te_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right| dx \\ &\le |f|_{L^2}\,|\varphi|_{L^2}\end{aligned}$$

pentru orice $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ şi $j = 1, 2, ..., n$. Observaţia 7.1 garantează acum că $\partial u/\partial x_k \in H^1(\mathbf{R}^n)$ pentru orice k, de unde $u \in H^2(\mathbf{R}^n)$.

2) Cazul $\Omega = \mathbf{R}^n_+$. Raţionamentul de la Cazul 1 rămâne valabil dacă direcţia h este paralelă cu frontiera semispaţiului Ω; aceasta deoarece pentru $h \parallel \partial\Omega$, se arată imediat că

$$u \in H_0^1(\Omega) \ \text{ implică } \ D_h u \in H_0^1(\Omega)\,.$$

Deci alegerea $v = D_{-h}(D_h u)$ în (8.10) este permisă. Aşadar şi în acest caz, oricare ar fi $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, avem

$$\left|\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}dx\right| \le |f|_{L^2}\,|\varphi|_{L^2} \tag{8.11}$$

dar numai pentru $1 \le j \le n-1$, $1 \le k \le n$. Cum

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}dx = \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}dx$$

rezultă că inegalitătile (8.11) au loc oricare ar fi j şi k cu $j \le n-1$ sau $k \le n-1$. Rămâne să ne convingem că o inegalitate de tipul (8.11) are loc şi pentru $j = k = n$. Intr-adevăr, din (8.10) deducem că există $C > 0$ astfel încât

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_n}\frac{\partial \varphi}{\partial x_n}dx\right| &= \left|-\sum_{j=1}^{n-1}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}dx + \int_\Omega (f\varphi - u\varphi)\,dx\right| \\ &\le C\,|f|_{L^2}\,|\varphi|_{L^2}\,.\end{aligned}$$

3) Cazul general

a) Regularitate interioară. Fie Ω' o mulţime deschisă, mărginită şi cu $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Considerăm o funcţie $\theta_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ astfel încât $\theta_0 = 1$ într-o vecinătate a compactului $\overline{\Omega'}$. Funcţia $v := \theta_0 u$ (prelungită cu zero în afara lui Ω) aparţine spaţiului $H^1(\mathbf{R}^n)$ şi este soluţie distribuţională a ecuaţiei $-\Delta v + v = g$, unde

$$g = \theta_0 f - 2\nabla\theta_0 \cdot \nabla u - u\Delta\theta_0 \in L^2(\mathbf{R}^n).$$

Conform Cazului 1, $v \in H^2(\mathbf{R}^n)$ şi $|v|_{H^2(\mathbf{R}^n)} \leq C_1 |g|_{L^2(\mathbf{R}^n)}$. Se observă imediat că $|g|_{L^2(\mathbf{R}^n)} \leq C_2 |f|_{L^2(\Omega)}$. Aşadar, $u \in H^2(\Omega')$ şi $|u|_{H^2(\Omega')} \leq C|f|_{L^2(\Omega)}$.

b) Regularitate în vecinătatea frontierei. Pentru simplitate vom considera cazul Ω mărginit. Ca în demonstraţia Teoremei 7.2, vom considera o partiţie C^∞ a unităţii şi vom scrie $u = \sum_{k=0}^m \theta_k u$. Ne propunem să demonstrăm că $\theta_k u \in H^2(\Omega)$ pentru $1 \leq k \leq m$ ($\theta_0 u \in H^2(\Omega)$, după cum s-a arătat deja la cazul a)).

Amintim că $\theta_k \in C_0^\infty(U_k)$ şi există o bijecţie $\eta : Q \to U_k$ astfel încât $\eta \in C^2(\overline{Q})$, $\zeta = \eta^{-1} \in C^2(\overline{U}_k)$, $\eta(Q_+) = U_k \cap \Omega$ şi $\eta(Q_0) = U_k \cap \partial\Omega$.

Se constată imediat (vezi Teorema 7.3) că $v := \theta_k u \in H_0^1(\Omega \cap U_k)$ şi v este soluţie slabă a problemei

$$\begin{cases} -\Delta v = \theta_k f - \theta_k u - 2\nabla\theta_k \cdot \nabla u - u\Delta\theta_k \equiv g & \text{pe } \Omega \cap U_k \\ v = 0 & \text{pe } \partial(\Omega \cap U_k) \end{cases}$$

unde $g \in L^2(\Omega \cap U_k)$ şi $|g|_{L^2(\Omega\cap U_k)} \leq C|f|_{L^2(\Omega)}$.

Ideea demonstraţiei constă în a efectua schimbarea de variabile $y = \zeta(x)$, cu scopul de a transporta problema din $\Omega \cap U_k$ în Q_+. Fie deci $w(y) = v(\eta(y))$ pentru $y \in Q_+$. Atunci $v(x) = w(\zeta(x))$ pentru $x \in \Omega \cap U_k$. Să arătăm că w este soluţia slabă a unei probleme eliptice de forma

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(y)\frac{\partial w}{\partial x_i}\right) = \widetilde{g}(y) & \text{pe } Q_+ \\ w = 0 & \text{pe } \partial Q_+ \end{cases} \tag{8.12}$$

unde $\widetilde{g} = (g \circ \eta)|\det D\eta|$, $D\eta$ este matricea Jacobian a funcţiei $\eta(y)$ iar funcţiile $a_{ij} \in C^1(\overline{Q}_+)$ satisfac pentru un anumit $\alpha > 0$, condiţia de elipticitate

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(y)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2, \quad y \in \overline{Q}_+,\ \xi \in \mathbf{R}^n.$$

Pentru aceasta, fie $\psi \in H_0^1(Q_+)$. Notăm $\varphi(x) = \psi(\zeta(x))$ pentru $x \in \Omega \cap U_k$. Este clar că $\varphi \in H_0^1(\Omega \cap U_k)$. Avem

$$\frac{\partial v}{\partial x_l} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial w}{\partial y_i}\frac{\partial \zeta_i}{\partial x_l} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial y_j}\frac{\partial \zeta_j}{\partial x_l}.$$

Deci

$$\int_{\Omega\cap U_k} \nabla v\cdot\nabla\varphi\,dx = \int_{\Omega\cap U_k}\sum_{i,j,l=1}^{n}\frac{\partial\zeta_i}{\partial x_l}\frac{\partial\zeta_j}{\partial x_l}\frac{\partial w}{\partial y_i}\frac{\partial\psi}{\partial y_j}dx \tag{8.13}$$
$$= \int_{Q_+}\sum_{i,j,l=1}^{n}\frac{\partial\zeta_i}{\partial x_l}\frac{\partial\zeta_j}{\partial x_l}\frac{\partial w}{\partial y_i}\frac{\partial\psi}{\partial y_j}\left|\det D\eta\right|dy$$
$$= \int_{Q_+}\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\left(y\right)\frac{\partial w}{\partial y_i}\frac{\partial\psi}{\partial y_j}dy$$

unde

$$a_{ij}\left(y\right)=\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial\zeta_i}{\partial x_l}\frac{\partial\zeta_j}{\partial x_l}\left|\det D\eta\right|.$$

De remarcat că $a_{ij}\in C^1(\overline{Q}_+)$ şi deoarece matricile Jacobiene $D\eta$ şi $D\zeta$ sunt nesingulare, există $\alpha>0$ astfel ca

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\left(y\right)\xi_i\xi_j=\left|\det D\eta\left(y\right)\right|\sum_{l=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\zeta_i}{\partial x_l}\xi_i\right|^2\geq\alpha\left|\xi\right|^2$$

pentru $y\in\overline{Q}_+$ şi $\xi\in\mathbf{R}^n$. Pe de altă parte, are loc relaţia

$$\int_{\Omega\,\cap U_k}g\varphi\,dx=\int_{Q_+}\left(g\circ\eta\right)\psi\left|\det D\eta\right|dy=\int_{Q_+}\widetilde{g}\psi\,dy. \tag{8.14}$$

Din (8.13) şi (8.14) rezultă că w este soluţia slabă a problemei (8.12).

In continuare vom arăta că $w\in H^2\left(Q_+\right)$ şi $\left|w\right|_{H^2(Q_+)}\leq C\left|\widetilde{g}\right|_{L^2(Q_+)}$, de unde revenind la variabilele x, va rezulta că $v=\theta_k u\in H^2\left(\Omega\right)$ şi $\left|v\right|_{H^2(\Omega)}\leq C\left|f\right|_{L^2(\Omega)}$. Pentru aceasta, fie $\psi=D_{-h}\left(D_h w\right)$ cu $h\parallel Q_0$ şi $\left|h\right|$ suficient de mic pentru ca $\psi\in H_0^1\left(Q_+\right)$; notăm că $\operatorname{supp}w\subset\{(y',y_n):\left|y'\right|<1-\delta,\,0<y_n<1-\delta\}$. Folosind faptul că w este soluţia slabă a problemei (8.12), deducem

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_{Q_+}D_h\left(a_{ij}\frac{\partial w}{\partial y_i}\right)\frac{\partial D_h w}{\partial y_j}dy=\int_{Q_+}\widetilde{g}D_{-h}\left(D_h w\right)dy.$$

Avem

$$\int_{Q_+}\widetilde{g}D_{-h}\left(D_h w\right)dy\leq\left|\widetilde{g}\right|_{L^2}\left|D_{-h}\left(D_h w\right)\right|_{L^2}\leq\left|\widetilde{g}\right|_{L^2}\left|D_h w\right|_{H_0^1}. \tag{8.15}$$

Pe de altă parte

$$D_h\left(a_{ij}\frac{\partial w}{\partial y_i}\right)(y)=a_{ij}\left(y+h\right)\frac{\partial D_h w}{\partial y_i}(y)+D_h a_{ij}\left(y\right)\frac{\partial w}{\partial y_i}(y)$$

de unde

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_{Q_+}D_h\left(a_{ij}\frac{\partial w}{\partial y_i}\right)\frac{\partial D_h w}{\partial y_j}dy\geq\alpha\left|D_h w\right|_{H_0^1}^2-C\left|w\right|_{H^1}\left|D_h w\right|_{H_0^1}. \tag{8.16}$$

Din (8.15) şi (8.16) folosind şi inegalitatea lui Poincaré, deducem

$$|D_h w|_{H_0^1(Q_+)}\leq C_0(|w|_{H^1(Q_+)}+|\widetilde{g}|_{L^2(Q_+)})\leq C\,|\widetilde{g}|_{L^2(Q_+)}. \tag{8.17}$$

De aici, ca la Cazul 2, deducem că pentru orice $\chi\in C_0^\infty\left(Q_+\right)$ şi oricare ar fi i şi j cu $i\leq n-1$ sau $j\leq n-1$, avem

$$\begin{aligned}\left|\int_{Q_+}\frac{\partial w}{\partial y_i}\frac{\partial\chi}{\partial y_j}dy\right| &= \left|\lim_{t\to0}\int_{Q_+}\frac{\partial w}{\partial y_i}D_{te_j}\chi dy\right|\\ &= \left|\lim_{t\to0}\int_{Q_+}\chi D_{-te_j}\frac{\partial w}{\partial y_i}dy\right|\\ &\leq C\left|\widetilde{g}\right|_{L^2(Q_+)}\left|\chi\right|_{L^2(Q_+)}.\end{aligned}$$

In consecinţă, folosind teorema lui Riesz,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y_i\partial y_j}\in L^2\left(Q_+\right)\quad\text{şi}\quad\left|\frac{\partial^2 w}{\partial y_i\partial y_j}\right|_{L^2(Q_+)}\leq C\left|\widetilde{g}\right|_{L^2(Q_+)} \tag{8.18}$$

dacă $i\leq n-1$ sau $j\leq n-1$. Rămâne să ne ocupăm de distribuţia $\partial^2 w/\partial y_n^2$.

Pentru aceasta, din nou folosim faptul că w este soluţie slabă. Cum pentru $\chi\in C_0^\infty\left(Q_+\right)$, avem că $\chi/a_{nn}\in H_0^1\left(Q_+\right)$, deducem

$$\sum_{i,j=1}^{n}\int_{Q_+}a_{ij}\frac{\partial w}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{\chi}{a_{nn}}\right)dy=\int_{Q_+}\widetilde{g}\,\frac{\chi}{a_{nn}}\,dy$$

de unde

$$\begin{aligned}&\int_{Q_+}a_{nn}\frac{\partial w}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{\chi}{a_{nn}}\right)dy\\ =\;&\int_{Q_+}\widetilde{g}\frac{\chi}{a_{nn}}dy-\sum_{i+j<2n}\int_{Q_+}a_{ij}\frac{\partial w}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{\chi}{a_{nn}}\right)dy.\end{aligned}$$

De aici, folosind estimările (8.18), se obţine că

$$\left|\int_{Q_+}\frac{\partial w}{\partial y_n}\frac{\partial \chi}{\partial y_n}dy\right| \le C\left|\widetilde{g}\right|_{L^2(Q_+)}\left|\chi\right|_{L^2(Q_+)}, \quad \chi\in C_0^\infty\left(Q_+\right).$$

In consecinţă,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y_n^2}\in L^2\left(Q_+\right) \quad \text{şi} \quad \left|\frac{\partial^2 w}{\partial y_n^2}\right|_{L^2(Q_+)} \le C\left|\widetilde{g}\right|_{L^2(Q_+)}.$$

Teorema este astfel complet demonstrată. ■

Corolarul 8.2 *Fie $\Omega\subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă, de clasă C^{m+2} şi cu frontiera mărginită, sau $\Omega = \mathbf{R}_+^n$. Fie $f\in H^m(\Omega)$ şi $u\in H_0^1(\Omega)$ o funcţie care satisface condiţia* (8.10). *Atunci $u\in H^{m+2}(\Omega)$ şi există o constantă C depinzând numai de Ω şi de m astfel încât*

$$|u|_{H^{m+2}}\le C\,|f|_{H^m}.$$

In particular, dacă $m>n/2$, atunci $u\in C^2(\overline{\Omega})$. Dacă Ω este de clasă C^∞ şi $f\in C^\infty(\overline{\Omega})$, atunci $u\in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Demonstraţie. Se raţionează prin inducţie în raport cu $m\in\mathbf{N}$. Pentru $m=0$ se obţine chiar Teorema 8.9. Fie acum $m=1$.

Cazul $\Omega=\mathbf{R}^n$. Se observă că pentru orice $k\in\{1,\,2,\,...,\,n\}$, are loc relaţia

$$\int_\Omega\left(\nabla\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)\cdot\nabla v+\frac{\partial u}{\partial x_k}v\right)dx=\int_\Omega\frac{\partial f}{\partial x_k}v\,dx,\quad v\in C_0^\infty\left(\mathbf{R}^n\right). \quad (8.19)$$

Pentru aceasta este suficient ca în (8.10) să înlocuim pe v cu $\partial v/\partial x_k$. Pe baza Teoremei 8.9, rezultă atunci că

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial x_j}\in H^1\left(\mathbf{R}^n\right) \quad \text{şi} \quad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial x_j}\right|_{H^1}\le C\left|\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_{L^2}$$

oricare ar fi $1\le j,k\le n$. Deci $u\in H^3\left(\mathbf{R}^n\right)$ şi $|u|_{H^3}\le C\,|f|_{H^1}$.

Cazul $\Omega=\mathbf{R}_+^n$. Şi în acest caz ne bazăm pe egalitatea (8.19) observând în plus că dacă $f\in H^1(\Omega)$, $u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ şi u satisface (8.10), atunci $\partial u/\partial x_k\in H_0^1(\Omega)$ pentru $1\le k\le n-1$. Intr-adevăr, pentru $h\parallel\partial\Omega$, avem

$$|D_h u|_{H^1}\le|u|_{H^2}.$$

Alegănd $h = \alpha e_k$, unde $1 \leq k \leq n-1$, va exista un şir $\alpha_l \to 0$ astfel ca $D_{\alpha_l e_k} u \to g$ slab în $H_0^1(\Omega)$, pentru $l \to \infty$. In consecinţă, trecând la limită în egalitatea

$$(D_h u, \varphi)_{L^2} = (u, D_{-h}\varphi)_{L^2}, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

obţinem

$$(g, \varphi)_{L^2} = \left(u, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right)_{L^2}, \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Aşadar, $\partial u/\partial x_k = g \in H_0^1(\Omega)$ pentru $1 \leq k \leq n-1$. Aplicând Teorema 8.9, obţinem că

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} \in H^1(\Omega) \quad \text{şi} \quad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}\right|_{H^1} \leq C\,|f|_{H^1} \text{ pentru } j+k < 2n.$$

Rămâne să arătăm că

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \in H^1(\Omega) \quad \text{şi} \quad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right|_{H^1} \leq C\,|f|_{H^1}.$$

Aceasta rezultă dacă observăm că din (8.10) avem

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = f - u + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \quad \text{în } \mathcal{D}'(\Omega)$$

unde distribuţia din membrul drept este, pe baza celor deja arătate, o funcţie din $H^1(\Omega)$ a cărei normă în $H^1(\Omega)$ se poate majora cu $C\,|f|_{H^1}$.

Cazul general. Folosind notaţiile din demonstraţia Teoremei 8.9, avem $a_{ij} \in C^2(\overline{Q}_+)$ şi $\widetilde{g} \in H^1(Q_+)$. Mai departe se procedează ca la cazul anterior. Se constată că pentru $1 \leq k \leq n-1$, funcţia $\widetilde{w} = \partial w/\partial y_k$ este soluţie slabă a problemei

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{ij}\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial y_i}\right) = \frac{\partial \widetilde{g}}{\partial y_k} + \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial y_k}\frac{\partial w}{\partial y_i}\right) & \text{pe } Q_+ \\ \widetilde{w} = 0 & \text{pe } \partial Q_+. \end{cases}$$

Folosind Teorema 8.9 şi inegalitatea $|w|_{H^2(Q_+)} \leq C\,|\widetilde{g}|_{L^2(Q_+)}$, găsim

$$\left|\frac{\partial^2 w}{\partial y_k \partial y_j}\right|_{H^1(Q_+)} = \left|\frac{\partial \widetilde{w}}{\partial y_j}\right|_{H^1(Q_+)} \leq C\,|\widetilde{g}|_{H^1(Q_+)}$$

pentru $1 \leq k \leq n-1$ şi $1 \leq j \leq n$. In fine, din (8.12), avem

$$-a_{nn}\frac{\partial^2 w}{\partial y_n^2} = \widetilde{g} + \frac{\partial a_{nn}}{\partial y_n}\frac{\partial w}{\partial y_n} + \sum_{i+j<2n}\frac{\partial}{\partial y_j}\left(a_{ij}\frac{\partial w}{\partial y_i}\right) \quad \text{în } \mathcal{D}'(Q_+)$$

de unde se deduce că

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y_n^2} \in H^1(Q_+) \quad \text{şi} \quad \left|\frac{\partial^2 w}{\partial y_n^2}\right|_{H^1(Q_+)} \leq C\,|\widetilde{g}|_{H^1(Q_+)}\,.$$

In consecinţă

$$w \in H^3(Q_+) \quad \text{şi} \quad |w|_{H^3(Q_+)} \leq C\,|\widetilde{g}|_{H^1(Q_+)}\,.$$

Mai departe se repetă acest raţionament în mod succesiv.

Ultima parte a Corolarului 8.2 rezultă din Teorema 7.11. ■

Facem observaţia că în locul condiţiei (8.10) se poate cere, în mod echivalent, ca u să satisfacă condiţia

$$\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx = \int_\Omega f v\,dx, \qquad v\in H_0^1(\Omega)\,. \tag{8.20}$$

In adevăr, este suficient ca f să fie înlocuit în (8.10) cu $f+u$ iar în (8.20) cu $f-u$. Avantajul condiţiei (8.10) constă în faptul că pentru $v=u$, ea conduce la relaţia $|u|_{H^1}^2 = (f,u)_{L^2}$, din care se deduce inegalitatea $|u|_{H^1} \leq |f|_{L^2}$. In caz că Ω este mărginit, o inegalitate de acest fel, $|u|_{H^1} \leq C\,|f|_{L^2}$, se obţine şi din (8.20), via inegalitatea lui Poincaré.

Observaţia de mai sus ne permite să afirmăm că Teorema 8.2 de regularitate a soluţiei slabe a problemei Dirichlet este astfel demonstrată. In mod asemănător se poate demonstra şi Teorema 8.5 de regularitate a soluţiei slabe a problemei Neumann.

8.5 Regularitatea funcţiilor proprii

Fie λ_k şi ϕ_k valorile şi funcţiile proprii ale problemei Dirichlet puse în evidenţă în Secţiunea 3.11. Folosind Teorema 8.9, putem demonstra că $\phi_k \in C^\infty(\Omega)$.

Teorema 8.10 1) *Funcţiile proprii ϕ_k aparţin spaţiului $C^\infty(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$.*

2) *Cea mai mică valoare proprie λ_1 este simplă şi admite o funcţie proprie ϕ_1 pozitivă, adică $\phi_1 > 0$ pe Ω.*

Demonstraţie. a) Conform Teoremei 8.9, pentru orice mulţime Ω' deschisă şi mărginită satisfăcând $\overline{\Omega'} \subset \Omega$, $\phi_k \in H^2(\Omega')$. Mai departe, Corolarul 8.2 implică succesiv $\phi_k \in H^4(\Omega')$, $\phi_k \in H^6(\Omega')$ şi aşa mai departe. Aşadar, $\phi_k \in \bigcap_{m=1}^{\infty} H^m(\Omega')$. In consecinţă, alegând $m > n/2$ obţinem $\phi_k \in C^\infty(\Omega')$. Rezultă că $\phi_k \in C^\infty(\Omega)$.

b) Demonstrăm acum că λ_1 este valoare proprie simplă (adică $\lambda_1 < \lambda_2$) şi admite o funcţie proprie ϕ_1 pozitivă (adică $\phi_1(x) > 0$ pentru orice $x \in \Omega$). Pentru aceasta, din (3.35) observăm că dacă minimul este atins pentru o funcţie ϕ_1, atunci el este atins şi pentru $|\phi_1|$. Din demonstraţia Teoremei 3.15, se deduce atunci că ϕ_1 şi $|\phi_1|$ sunt amândouă funcţii proprii. Deci $-\Delta|\phi_1| = \lambda_1|\phi_1|$ pe Ω. Rezultă că funcţia

$$\psi(x,t) = |\phi_1(x)|\, e^{\sqrt{\lambda_1}\,t}, \quad x \in \Omega,\ t \in \mathbf{R}$$

este o funcţie armonică nenegativă pe $\Omega \times \mathbf{R}$. Inegalitatea lui Harnack, mai precis Corolarul 3.9, implică $\psi > 0$ pe $\Omega \times \mathbf{R}$, de unde $|\phi_1| > 0$ pe Ω. Aşadar $\phi_1 = |\phi_1|$ (sau $\phi_1 = -|\phi_1|$). Astfel am arătat că funcţiile proprii corespunzătoare lui λ_1 sunt fie pozitive, fie negative pe Ω. In consecinţă, oricare două dintre ele nu pot fi ortogonale în $L^2(\Omega)$. Aceasta arată că spaţiul liniar generat de funcţiile proprii corespunzătoare valorii proprii λ_1 este unidimensional, adică λ_1 este valoare proprie simplă.

c) Faptul că $\phi_k \in L^\infty(\Omega)$ rezultă pe baza lemei care urmează, dacă se ţine seamă de faptul că funcţiile ϕ_k^+ şi ϕ_k^- aparţin spaţiului $H_0^1(\Omega)$ (a se vedea Propoziţia 8.2). ■

Lema 8.2 *Fie* $\lambda > 0$ *şi* $u \in H^1(\Omega)$.

1) *Dacă* $\Delta u + \lambda u \geq 0$ *în* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *şi* $u \leq 0$ *pe* $\partial\Omega$, *atunci*

$$u(x) \leq C\left|u^+\right|_{L^2} \quad \textit{a.p.t. pe } \Omega.$$

2) *Dacă* $\Delta u + \lambda u \leq 0$ *în* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *şi* $u \geq 0$ *pe* $\partial\Omega$, *atunci*

$$-u(x) \leq C\left|u^-\right|_{L^2} \quad \textit{a.p.t. pe } \Omega.$$

Demonstraţie. Vom demonstra afirmaţia 1); propoziţia 2) se obţine prin aplicarea lui 1) funcţiei $-u$. Pentru $\alpha \geq 1$ şi $N > 0$ considerăm funcţia $h \in C^1[0,\infty)$,

$$h(t) = \begin{cases} t^\alpha, & 0 \leq t \leq N \\ \alpha N^{\alpha-1} t + (1-\alpha) N^\alpha, & t > N \end{cases}$$

şi notăm $g(t) = \int_0^t h'(s)^2 \, ds$. Cum $u \leq 0$ pe $\partial\Omega$, avem $u^+ \in H_0^1(\Omega)$. Atunci, pe baza Lemei 8.1, funcţiile $h \circ u^+$ şi $g \circ u^+$ aparţin de asemenea lui $H_0^1(\Omega)$. Amintim că inegalitatea $\Delta u + \lambda u \geq 0$ în $\mathcal{D}'(\Omega)$, înseamnă

$$\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v - \lambda uv) \, dx \leq 0 \quad \text{pentru orice } v \in H_0^1(\Omega).$$

Alegând $v = g \circ u^+$ şi folosind (8.7) precum şi inegalitatea $g(t) \leq tg'(t)$ $(t \geq 0)$, deducem

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g'\left(u^+\right) \left|\nabla u^+\right|^2 dx &\leq \lambda \int_\Omega ug\left(u^+\right) dx \\
&\leq \lambda \int_\Omega u^+ g\left(u^+\right) dx \\
&\leq \lambda \int_\Omega g'\left(u^+\right) \left(u^+\right)^2 dx
\end{aligned}$$

adică

$$\int_\Omega \left|\nabla h\left(u^+\right)\right|^2 dx \leq \lambda \int_\Omega \left|h'\left(u^+\right) u^+\right|^2 dx$$

sau încă

$$\left|h\left(u^+\right)\right|_{H_0^1} \leq \sqrt{\lambda} \left|h'\left(u^+\right) u^+\right|_{L^2}.$$

In continuare, pentru simplitate, vom considera numai cazul $n \geq 3$. Folosind teorema de scufundare a lui Sobolev, Teorema 7.9, obţinem

$$\left|h\left(u^+\right)\right|_{L^{2^*}} \leq c \left|h'\left(u^+\right) u^+\right|_{L^{2p/(p-2)}}$$

unde $2^* = 2n/(n-2)$, $p > 2$ este fixat, iar $c = c(n, \Omega)$. Trecând acum la limită cu $N \to \infty$, găsim

$$\left|u^+\right|_{L^{\alpha 2^*}} \leq (c\,\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \left|u^+\right|_{L^{\frac{2\alpha p}{p-2}}}.$$

Notând $q = 2p/(p-2) > 2$ şi $r = n(p-2)/[p(n-2)] > 1$, avem deci

$$\left|u^+\right|_{L^{\alpha q r}} \leq (c\,\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \left|u^+\right|_{L^{\alpha q}}.$$

Această inegalitate arată că apartenenţa $u^+ \in L^{\alpha q}(\Omega)$ implică apartenenţa mai tare $u^+ \in L^{\alpha q r}(\Omega)$. Considerând în mod succesiv $\alpha = r$, r^2, r^3, ..., r^{N-1}, unde N este un număr natural oarecare, deducem că

$$\left|u^+\right|_{L^{r^N q}} \le \prod_{m=0}^{N-1} (cr^m)^{r^{-m}} \left|u^+\right|_{L^q} \le c^a r^b \left|u^+\right|_{L^q} \le C \left|u^+\right|_{L^q} \qquad (8.21)$$

unde $a = \sum_{m=0}^{N-1} r^{-m}$, $b = \sum_{m=0}^{N-1} m r^{-m}$ iar $C = C(n, p, \Omega)$. Cum pentru orice $m \ge 1$, există N astfel încât $m \le r^N q$, rezultă că $u^+ \in \bigcap_{1 \le m < \infty} L^m(\Omega)$. In final, din (8.21) obţinem concluzia

$$u^+ \in L^\infty(\Omega), \quad \left|u^+\right|_{L^\infty} \le C \left|u^+\right|_{L^q}.$$

Intr-adevăr, dacă presupunem contrarul, ar exista o mulţime Ω_0 de măsură μ nenulă, astfel încât

$$u^+(x) \ge M > C \left|u^+\right|_{L^q} \quad \text{pentru orice } x \in \Omega_0.$$

Atunci pentru orice N, avem

$$C \left|u^+\right|_{L^q} \ge \left|u^+\right|_{L^{r^N q}(\Omega)} \ge \left|u^+\right|_{L^{r^N q}(\Omega_0)} \ge M \, \mu^{\frac{1}{r^N q}}$$

de unde, trecând la limită cu $N \to \infty$, obţinem $C\left|u^+\right|_{L^q} \ge M$, o contradicţie. ■

8.6 Probleme

1) Metoda separării variabilelor ne-a condus în cazul problemei Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{pentru } \rho < R \\ u = g & \text{pentru } \rho = R \end{cases}$$

pe discul $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^2 : |x| < R\}$, la expresia

$$u = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \left(\frac{\rho}{R}\right)^k. \qquad (8.22)$$

Formal, pentru $\rho = R$, cerem ca

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) = g.$$

Sistemul funcţiilor $\cos k\varphi$, $\sin k\varphi$ fiind ortogonal şi complet în $L^2(0,2\pi)$, găsim pentru $g \in L^2(0,2\pi)$:

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\cos k\varphi\, d\varphi, \quad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(\varphi)\sin k\varphi\, d\varphi.$$

Să se demonstreze că dacă $g \in C^1[0,2\pi]$ şi $g(0) = g(2\pi)$, atunci seria (8.22) este convergentă în $C\left(\overline{\Omega}\right)$, defineşte o funcţie $u \in C^\infty(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$, armonică pe Ω şi a cărei restricţie la $\partial\Omega$ coincide cu g.

Rezolvare. Folosim rezultatul clasic de teorie a seriilor Fourier conform căruia, dacă $g \in C^1[0,2\pi]$ şi $g(0) = g(2\pi)$, atunci seria Fourier a lui g converge uniform la g pe $[0,2\pi]$ (a se vedea de exemplu, S.M. Nikolsky, *A Course of Mathematical Analysis,* Mir, Moscow, 1981, Vol. 2, p. 205, Theorem 15.5.2). Notând cu S_m suma parţială a seriei (8.22) şi cu s_m suma parţială a seriei Fourier a funcţiei g, avem

$$\begin{cases} \Delta S_m = 0 & \text{pe } \Omega \\ S_m = s_m & \text{pe } \partial\Omega \end{cases}$$

Folosind şi formula (3.9), deducem

$$|S_{m+p} - S_m|_{C(\overline{\Omega})} \le |s_{m+p} - s_m|_{C(\partial\Omega)} \to 0 \quad \text{pentru } m \to \infty.$$

Aşadar $S_m \to u$ în $C(\overline{\Omega})$. Dacă $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, atunci

$$0 = (\Delta S_m, \psi) = (S_m, \Delta\psi) \to (u, \Delta\psi) = (\Delta u, \psi)$$

adică u satisface ecuaţie lui Laplace în sens distribuţional. Lema lui Weyl, Propoziţia 6.8, garantează că u este o funcţie armonică pe Ω.

3) Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi mărginită, $u \in H^1(\Omega)$ şi $c < \lambda_1$. Să se demonstreze că dacă $\Delta u + cu \ge 0$ în $\mathcal{D}'(\Omega)$ şi $u \le 0$ pe $\partial\Omega$, atunci $u \le 0$ a.p.t. pe Ω (principiul maximului are loc pentru operatorul $\Delta u + cu$ dacă $c < \lambda_1$).

Indicaţie. Presupunem contrarul. Atunci $u^+ \ne 0$ şi din

$$-\left|u^+\right|^2_{H_0^1} + c\left|u^+\right|^2_{L^2} \ge 0$$

deducem

$$\frac{|u^+|^2_{H_0^1}}{|u^+|^2_{L^2}} \le c < \lambda_1$$

ceea ce contrazice (3.35).

3) Reciproc, dacă principiul maximului are loc pentru operatorul $\Delta u + cu$, atunci $c < \lambda_1$.

Indicaţie. Presupunem $c \geq \lambda_1$. Atunci, cum $\varphi_1 > 0$ pe Ω, avem

$$\begin{gathered}\Delta\varphi_1 + c\varphi_1 \geq \Delta\varphi_1 + \lambda_1\varphi_1 = 0 \ \text{ pe } \Omega \\ \varphi_1 \leq 0 \ \text{ pe } \partial\Omega,\end{gathered}$$

de unde $\varphi_1 \leq 0$ pe Ω, o contradicţie.

4) Să se arate că pentru $c < \lambda_1$, operatorul liniar $(-\Delta - cI)^{-1} : H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ este pozitiv (sau izoton).

5) Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi mărginită, $c < \lambda_1$, $c_0 > 0$ şi $u \in H_0^1(\Omega)$ astfel încât $\Delta u + cu + c_0 \leq 0$ în $\mathcal{D}'(\Omega)$ şi $u \geq 0$ pe $\partial\Omega$. Atunci există $\varepsilon > 0$ depinzând numai de c şi c_0, cu $u \geq \varepsilon\phi_1$ a.p.t pe Ω.

*Indica*ţie. Fie $v = \varepsilon\phi_1$. Alegem $\varepsilon > 0$ suficient de mic ca $\Delta v + cv + c_0 \geq 0$ pe Ω. Pentru aceasta se ţine cont de $\Delta\phi_1 = -\lambda_1\phi_1$ şi de $\phi_1 \in L^\infty(\Omega)$. Atunci avem $\Delta(v-u) + c(v-u) \geq 0$ în $\mathcal{D}'(\Omega)$ şi $v - u \leq 0$ pe $\partial\Omega$. Principiul de maxim garantează acum că $v - u \leq 0$ a.p.t. pe Ω.

6) Dacă $f \in L^2(\Omega)$ şi $u \in H^1(\Omega)$ este soluţia slabă a problemei Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{pe } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{pe } \partial\Omega \end{cases}$$

atunci

$$\text{ess}\inf_\Omega f \leq u(x) \leq \text{ess}\sup_\Omega f$$

a.p.t. pe Ω (Principiul de maxim pentru soluţia slabă a problemei Neumann).

Indicaţie. Fie $M = \text{ess}\sup_\Omega f$. Conform Propoziţiei 8.2, $(u-M)^+ \in H^1(\Omega)$. Atunci

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left|\nabla (u-M)^+\right|^2 dx &= \int_\Omega (f-u)(u-M)^+ dx \\ &\leq \int_\Omega (M-u)(u-M)^+ dx \\ &= -\int_\Omega \left|(u-M)^+\right|^2 dx. \end{aligned}$$

Rezultă $(u-M)^+ = 0$, adică $u \leq M$.

Capitolul 9
Probleme la limită eliptice neliniare

Scopul acestui capitol este de a sugera în ce fel rezultate din teoria ecuaţiilor eliptice liniare intervin în studiul unor probleme la limită relative la ecuaţii cvasiliniare. Problemele neliniare reprezintă un capitol vast, în plină dezvoltare şi extrem de captivant al teoriei ecuaţiilor cu derivate parţiale. Studiul lor necesită rezultate de teorie a ecuaţiilor liniare cu derivate parţiale, analiză funcţională, teoria operatorilor, topologie, teoria măsurii şi altele. In cele ce urmează ne limităm la a discuta rezolvabilitatea problemei Dirichlet neliniare

$$\begin{cases} -\Delta u = g\left(x, u, \nabla u\right) + f & \text{pe } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega \end{cases} \tag{9.1}$$

unde $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ este o mulţime deschisă şi mărginită, $f \in H^{-1}(\Omega)$ iar $g : \Omega \times \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ este o funcţie dată. Vom căuta soluţii slabe, anume funcţii $u \in H_0^1(\Omega)$ pentru care $g(., u, \nabla u) \in H^{-1}(\Omega)$ şi

$$(u, v)_{H_0^1} = (g(x, u, \nabla u) + f, v), \qquad v \in H_0^1(\Omega).$$

Vom prezenta câteva rezultate privind rezolvabilitatea problemei (9.1), obţinute cu ajutorul teoremelor de punct fix ale lui Banach, Schauder şi Leray–Schauder, a metodei iteraţiilor monotone şi a metodei punctului critic.

Problema (9.1) este echivalentă cu problema de punct fix

$$u = A(u), \quad u \in H_0^1(\Omega) \tag{9.2}$$

unde

$$A = (-\Delta)^{-1}(B + f)$$

şi

$$B : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega), \quad B(u) = g(., u, \nabla u).$$

Este clar că prima problemă ce se impune a fi clarificată este problema definiţiei corecte a operatorului B. Acestei probleme i se consacră secţiunea întâi a acestui capitol.

9.1 Operatorul de superpoziţie al lui Nemytskii

Definiţia 9.1 Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ o mulţime deschisă şi mărginită şi fie $g : \Omega \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ o funcţie oarecare. Numim *operator de superpoziţie* sau *operator Nemytskii* asociat lui g, aplicaţia N_g care asociază oricărei funcţii $w : \Omega \to \mathbf{R}^n$, funcţia $N_g(w) : \Omega \to \mathbf{R}^m$ definită prin

$$N_g(w)(x) = g(x, w(x)) \quad (x \in \Omega).$$

Proprietăţile operatorului N_g depind de proprietăţile funcţiei g. Aici suntem interesaţi ca operatorul N_g să aplice spaţiul $L^p(\Omega; \mathbf{R}^n)$, sau mai general spaţiul $L^{p_1}(\Omega; \mathbf{R}^{n_1}) \times L^{p_2}(\Omega; \mathbf{R}^{n_2})$, unde $n_1 + n_2 = n$, în $L^q(\Omega; \mathbf{R}^m)$.

Definiţia 9.2 Se spune că funcţia $g : \Omega \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ satisface *condiţiile lui Carathéodory*, dacă:
(i) funcţia $g(., y) : \Omega \to \mathbf{R}^m$ este măsurabilă pentru orice $y \in \mathbf{R}^n$;
(ii) funcţia $g(x, .) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ este continuă a.p.t. $x \in \Omega$.

Propoziţia 9.1 *Dacă g satisface condiţiile lui Carathéodory, atunci N_g transformă funcţiile măsurabile în funcţii măsurabile.*

Demonstraţie. Fie $w : \Omega \to \mathbf{R}^n$ o funcţie măsurabilă. Există atunci un şir de funcţii w_k cu un număr finit de valori astfel ca $w_k(x) \to w(x)$ pentru $k \to \infty$, a.p.t. $x \in \Omega$. De aici, pe baza condiţiei (ii), avem

$$N_g(w_k)(x) = g(x, w_k(x)) \to g(x, w(x)) = N_g(w)(x) \tag{9.3}$$

pentru $k \to \infty$, a.p.t. $x \in \Omega$. Pe de altă parte, funcţia w_k având un număr finit de valori, admite o reprezentare de forma

$$w_k(x) = \sum_j \chi_j(x)\, y_j$$

unde $y_j \in \mathbf{R}^n$, χ_j reprezintă funcţia caracteristică a unei submulţimi $\Omega_j \subset \Omega$,

$$\Omega = \bigcup_j \Omega_j, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad \text{pentru } i \neq j$$

iar suma este finită. Rezultă că

$$N_g (w_k)|_{\Omega_j} = g (., y_j).$$

Pe baza condiţiei (i), avem deci că restricţia funcţiei $N_g (w_k)$ la fiecare submulţime Ω_j este măsurabilă. In consecinţă $N_g (w_k)$ este măsurabilă pe Ω. Atunci (9.3) implică măsurabilitatea funcţiei limită $N_g (w)$. ■

Teorema 9.1 *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ o mulţime deschisă şi mărginită, $g : \Omega \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ şi $1 \leq p,\ q < \infty$. Dacă g satisface condiţiile lui Carathéodory şi există $c \in \mathbf{R}_+$ şi $h \in L^q (\Omega; \mathbf{R}_+)$ astfel ca*

$$|g (x, y)| \leq c |y|^{\frac{p}{q}} + h (x)$$

pentru orice $y \in \mathbf{R}^n$ şi a.p.t. $x \in \Omega$, atunci operatorul

$$N_g : L^p (\Omega; \mathbf{R}^n) \to L^q (\Omega; \mathbf{R}^m), \quad N_g (w) = g (., w)$$

este bine definit, continuu şi mărginit. In plus

$$|N_g (w)|_{L^q(\Omega;\mathbf{R}^m)} \leq c |w|^{\frac{p}{q}}_{L^p(\Omega;\mathbf{R}^n)} + |h|_{L^q(\Omega)} \quad (w \in L^p (\Omega; \mathbf{R}^n)). \qquad (9.4)$$

Demonstraţie. 1) N_g este bine definit şi mărginit. Intr-adevăr, Propoziţia 9.1 garantează că N_g transformă funcţiile măsurabile în funcţii măsurabile. Mai departe, dacă $w \in L^p (\Omega; \mathbf{R}^n)$, atunci folosind inegalitatea normei obţinem

$$\begin{aligned} \left(\int_\Omega |N_g (w)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left\{ \int_\Omega \left(c |w (x)|^{\frac{p}{q}} + h (x) \right)^q dx \right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\leq c |w|^{\frac{p}{q}}_{L^p} + |h|_{L^q} \end{aligned}$$

ceea ce demonstrează inegalitatea (9.4). Această inegalitate arată că operatorul N_g este mărginit în sensul că transformă mulţimile mărginite în mulţimi mărginite.

2) N_g este continuu. Pentru demonstraţie se foloseşte lema lui Vitali.

Lema 9.1 (Vitali) *Fie* $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ *deschis şi mărginit şi fie* (u_k) *un şir de funcţii din* $L^p(\Omega; \mathbf{R}^n)$ $(1 \leq p < \infty)$ *astfel încât* $u_k(x) \to u(x)$ *pentru* $k \to \infty$, *a.p.t.* $x \in \Omega$. *Atunci* $u \in L^p(\Omega; \mathbf{R}^n)$ *şi* $u_k \to u$ *în* $L^p(\Omega; \mathbf{R}^n)$ *pentru* $k \to \infty$, *dacă şi numai dacă pentru orice* $\varepsilon > 0$ *există* $\delta_\varepsilon > 0$ *astfel ca*

$$\int_D |u_k|^p \, dx < \varepsilon \tag{9.5}$$

pentru toţi k, *ori de câte ori* $D \subset \Omega$ *şi* $\mu(D) < \delta_\varepsilon$.

Fie $w_k \in L^p(\Omega; \mathbf{R}^n)$ cu $w_k \to w$ în $L^p(\Omega; \mathbf{R}^n)$ pentru $k \to \infty$. Există atunci un subşir $(w_{k'})$ al lui (w_k) cu $w_{k'}(x) \to w(x)$ a.p.t. $x \in \Omega$, iar partea de necesitate a lemei lui Vitali implică că $|w_{k'}|^p_{L^p(D;\mathbf{R}^n)} < \varepsilon$ dacă $\mu(D) < \delta_\varepsilon$. Atunci, pe de o parte $N_g(w_{k'})(x) \to N_g(w)(x)$ a.p.t. $x \in \Omega$ iar pe de altă parte, dacă $\mu(D) < \delta_\varepsilon$, avem

$$\begin{aligned} |N_g(w_{k'})|_{L^q(D;\mathbf{R}^m)} &\leq c\,|w_{k'}|^{\frac{p}{q}}_{L^p(D;\mathbf{R}^n)} + |h|_{L^q(D)} \\ &\leq c\,\varepsilon^{\frac{1}{q}} + |h|_{L^q(D)}\,. \end{aligned}$$

Deci pentru şirul de funcţii $N_g(w_{k'})$, condiţiile lemei lui Vitali sunt de asemenea satisfăcute. Partea de suficienţă a lemei lui Vitali implică atunci că $N_g(w_{k'}) \to N_g(w)$ în $L^q(\Omega; \mathbf{R}^m)$. Rezultă acum că întregul şir $(N_g(w_k))$ converge la $N_g(w)$ în $L^q(\Omega; \mathbf{R}^m)$. Aşadar N_g este continuu. ■

Observaţia 9.1 In mod analog se poate demonstra rezultatul următor: Dacă $g : \Omega \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ satisface condiţiile lui Carathéodory, $n = n_1 + n_2$ şi există $c_1, c_2 \in \mathbf{R}_+$ şi $h \in L^q(\Omega; \mathbf{R}_+)$ astfel ca

$$\left|g\left(x, y^1, y^2\right)\right| \leq c_1 \left|y^1\right|^{\frac{p_1}{q}} + c_2 \left|y^2\right|^{\frac{p_2}{q}} + h(x)$$

oricare ar fi $y^1 \in \mathbf{R}^{n_1}$, $y^2 \in \mathbf{R}^{n_2}$ şi a.p.t. $x \in \Omega$, atunci operatorul

$$\begin{aligned} N_g &: L^{p_1}(\Omega; \mathbf{R}^{n_1}) \times L^{p_2}(\Omega; \mathbf{R}^{n_2}) \to L^q(\Omega; \mathbf{R}^m) \\ N_g\left(w^1, w^2\right)(x) &= g\left(x, w^1(x), w^2(x)\right) \end{aligned}$$

este bine definit, continuu şi mărginit. In plus

$$\left|N_g\left(w^1, w^2\right)\right|_{L^q(\Omega;\mathbf{R}^m)} \leq c_1 \left|w^1\right|^{\frac{p_1}{q}}_{L^{p_1}(\Omega;\mathbf{R}^{n_1})} + c_2 \left|w^2\right|^{\frac{p_2}{q}}_{L^{p_2}(\Omega;\mathbf{R}^{n_2})} + |h|_{L^q(\Omega)}\,.$$

9.2 Aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Banach

Inainte de a trece la formularea rezultatelor de existenţă, este util să subli-niem câteva lucruri care se deduc din teoria spaţiilor Sobolev prezentată mai sus şi care vor fi utile în cele ce urmează.

Lema 9.2 *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi mărginită. Sunt adevărate propoziţiile:*

$$\begin{aligned}
\left|(-\Delta)^{-1} f\right|_{H_0^1} &= |f|_{H^{-1}}, \quad f \in H^{-1}(\Omega) \\
|f|_{H^{-1}} &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} |f|_{L^2}, \quad f \in L^2(\Omega) \\
|u|_{L^2} &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} |u|_{H_0^1}, \quad u \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Demonstraţie. 1) Prima relaţie exprimă faptul că operatorul $(-\Delta)^{-1}$ este o izometrie a spaţiilor $H^{-1}(\Omega)$ şi $H_0^1(\Omega)$ (vezi Teorema 7.15).

2) Reamintim că orice funcţie $f \in L^2(\Omega)$ se identifică cu funcţionala liniară şi continuă pe $H_0^1(\Omega)$,

$$u \in H_0^1(\Omega) \longmapsto (f, u)_{L^2}.$$

Atunci, folosind formula (3.37), obţinem

$$|f|_{H^{-1}} = \sup_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{|(f,u)_{L^2}|}{|u|_{H_0^1}} \leq \sup_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{|f|_{L^2} |u|_{L^2}}{|u|_{H_0^1}} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} |f|_{L^2}.$$

3) Cea de a treia relaţie este inegalitatea lui Poincaré (3.37). ■

Folosind principiul contracţiilor obţinem următorul rezultat de existenţă, unicitate şi aproximare pentru problema neliniară (9.1).

Teorema 9.2 *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi mărginită, $f \in H^{-1}(\Omega)$ şi $g : \Omega \times \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ o funcţie cu următoarele proprietăţi:*

(i) *g satisface condiţiile lui Carathéodory, adică $g(.,y) : \Omega \to \mathbf{R}$ este funcţie măsurabilă pentru orice $y \in \mathbf{R}^{n+1}$, iar $g(x,.) : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ este funcţie continuă a.p.t. $x \in \Omega$;*

(ii) *$g(.,0,0) = 0$ şi există $a, b \in \mathbf{R}_+$ astfel încât*

$$|g(x,u,v) - g(x,\overline{u},\overline{v})| \leq a|u - \overline{u}| + b|v - \overline{v}|$$

oricare ar fi $u, \overline{u} \in \mathbf{R},\ v, \overline{v} \in \mathbf{R}^n$ *şi a.p.t.* $x \in \Omega$;

(iii) $a/\lambda_1 + b/\sqrt{\lambda_1} < 1$, *unde* λ_1 *este cea mai mică valoare proprie a problemei Dirichlet pentru operatorul* $-\Delta$.

Atunci problema (9.1) *admite o soluţie unică* $u \in H_0^1(\Omega)$. *In plus* u *este limita în* $H_0^1(\Omega)$ *a şirului* $u_k := A^k(u_0)$, $k \geq 1$, *pentru orice* $u_0 \in H_0^1(\Omega)$.

Demonstraţie. Condiţiile lui Carathéodory asigură faptul că pentru orice funcţie măsurabilă $w : \Omega \to \mathbf{R}^{n+1}$, funcţia $g(., w(.)) : \Omega \to \mathbf{R}$ este de asemenea măsurabilă. Dacă $u \in H_0^1(\Omega)$, atunci cuplul $w = [u, \nabla u]$ aparţine lui $L^2\left(\Omega; \mathbf{R}^{n+1}\right)$, deci este o funcţie măsurabilă. Rezultă că funcţia $B(u)$ este măsurabilă. In plus

$$\begin{aligned} |B(u)(x)| &= |g(x, u(x), \nabla u(x))| = |g(x, u(x), \nabla u(x)) - g(x, 0, 0)| \\ &\leq a|u(x)| + b|\nabla u(x)|. \end{aligned}$$

Cum $a|u| + b|\nabla u| \in L^2(\Omega)$, deducem că $B(u) \in L^2(\Omega)$. Dar $L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$. Aşadar $B(u) \in H^{-1}(\Omega)$, ceea ce arată că operatorul $B : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ este bine definit.

Mai departe, arătăm că (ii) şi (iii) implică faptul că A este o contracţie pe spaţiul $H_0^1(\Omega)$. Intr-adevăr, oricare ar fi $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$, folosind Lema 9.2, obţinem

$$\begin{aligned} |A(u_1) - A(u_2)|_{H_0^1} &= \left|(-\Delta)^{-1}[B(u_1) - B(u_2)]\right|_{H_0^1} \\ &= |B(u_1) - B(u_2)|_{H^{-1}} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}|B(u_1) - B(u_2)|_{L^2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\left(a|u_1 - u_2|_{L^2} + b|\nabla(u_1 - u_2)|_{L^2(\Omega;\mathbf{R}^n)}\right) \\ &\leq \left(\frac{a}{\lambda_1} + \frac{b}{\sqrt{\lambda_1}}\right)|u_1 - u_2|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

Concluzia rezultă acum pe baza bine cunoscutei teoreme de punct fix a lui Banach. ■

9.3 Aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Schauder

Teorema care urmează nu cere ca funcţia $g(x, u, v)$ să satisfacă o condiţie Lipschitz în raport cu u şi v, ci doar ca ea să aibă creştere cel mult liniară în u şi v. Concluzia este însă mai slabă; vom obţine numai existenţa soluţiei, nu şi unicitatea, via teorema de punct fix a lui Schauder.

Teorema de punct fix a lui Schauder foloseşte noţiunea de operator complet continuu.

Definiţia 9.3 Spunem că un operator $T : D \subset X \to Y$, unde X şi Y sunt spaţii Banach, este *complet continuu*, dacă este continuu şi transformă submulţimile mărginite ale lui D în mulţimi relativ compacte în Y.

Din definiţie rezultă că orice operator complet continuu este un opera-tor mărginit. Tot pe baza definiţiei se constată imediat că o compunere de doi sau mai mulţi operatori continui şi mărginiţi, dintre care cel puţin unul este complet continuu, este operator complet continuu.

Din cele ce vor urma va reieşi rolul extrem de important pe care îl au teoremele de scufundare compactă pentru garantarea proprietăţii de complet continuitate a operatorilor neliniari asociaţi problemelor la limită.

Teorema 9.3 (Schauder) *Fie X un spaţiu Banach, D o submulţime nevidă, închisă, convexă şi mărginită a lui X şi fie $A : D \to D$ un operator complet continuu. Atunci A admite cel puţin un punct fix.*

Pentru demonstraţie, ca şi pentru detalii privind operatorii complet continui, indicăm lucrările Precup [38], [40].

Teorema 9.4 *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi mărginită, $f \in H^{-1}(\Omega)$ şi $g : \Omega \times \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ o funcţie cu următoarele proprietăţi:*

(i) *g satisface condiţiile lui Carathéodory;*

(ii) *există $a, b \in \mathbf{R}_+$ şi $h \in L^2(\Omega)$ astfel ca*

$$|g(x,u,v)| \le a|u| + b|v| + h(x) \tag{9.6}$$

pentru orice $u \in \mathbf{R}$, $v \in \mathbf{R}^n$ şi a.p.t. $x \in \Omega$;

(iii) $a/\lambda_1 + b/\sqrt{\lambda_1} < 1$.

Atunci problema (9.1) *admite cel puţin o soluţie $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Demonstraţie. Este clar că $(-\Delta)^{-1} f \in H_0^1(\Omega)$. Ne ocupăm în continuare de operatorul $(-\Delta)^{-1} B$. Avem $B = J \circ N_g \circ P$, unde

$$P : H_0^1(\Omega) \to L^2\left(\Omega; \mathbf{R}^{n+1}\right), \quad P(u) = [u, \nabla u],$$

N_g este operatorul lui Nemytskii asociat lui g,

$$N_g : L^2\left(\Omega; \mathbf{R}^{n+1}\right) \to L^2(\Omega), \quad N_g(w)(x) = g(x, w(x)),$$

iar J este operatorul de scufundare

$$J : L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega), \quad J(u) = (u, .)_{L^2}.$$

Este clar că P este un operator liniar şi continuu, deci mărginit. Condiţiile (i) şi (ii) garantează că N_g este bine definit, continuu şi mărginit. Mai departe, scufundarea lui $L^2(\Omega)$ în $H^{-1}(\Omega)$ fiind compactă, avem că J este un operator liniar şi complet continuu. In consecinţă, operatorul compus $J \circ N_g \circ P$ este complet continuu de la $H_0^1(\Omega)$ la $H^{-1}(\Omega)$. Rezultă că prin compunere cu operatorul liniar şi continuu $(-\Delta)^{-1}$: $H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$ se obţine un operator complet continuu. Deci operatorul $(-\Delta)^{-1} B$ este complet continuu de la spaţiul $H_0^1(\Omega)$ la el însuşi. Aşadar operatorul $A : H_0^1(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$, $A(u) = (-\Delta)^{-1}(B(u) + f)$ este complet continuu.

Pentru orice $u \in H_0^1(\Omega)$ avem

$$\begin{aligned}
|A(u)|_{H_0^1} &\leq \left|(-\Delta)^{-1} B(u)\right|_{H_0^1} + \left|(-\Delta)^{-1} f\right|_{H_0^1} \\
&= |B(u)|_{H^{-1}} + \left|(-\Delta)^{-1} f\right|_{H_0^1} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} |B(u)|_{L^2} + \left|(-\Delta)^{-1} f\right|_{H_0^1} \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \left(a |u|_{L^2} + b |\nabla(u)|_{L^2(\Omega;\mathbf{R}^n)} + |h|_{L^2}\right) + \left|(-\Delta)^{-1} f\right|_{H_0^1} \\
&\leq \left(\frac{a}{\lambda_1} + \frac{b}{\sqrt{\lambda_1}}\right) |u|_{H_0^1} + c
\end{aligned}$$

unde $c = \left|(-\Delta)^{-1} f\right|_{H_0^1} + |h|_{L^2} / \sqrt{\lambda_1}$. De aici, folosind (iii), deducem că există $R > 0$ suficient de mare, astfel încât

$$|A(u)|_{H_0^1} \leq R \quad \text{pentru orice } u \in H_0^1(\Omega) \text{ cu } |u|_{H_0^1} \leq R.$$

Aşadar operatorul A invariază bila închisă cu centrul în origine şi de rază R, a spaţiului $H_0^1(\Omega)$. Concluzia rezultă acum pe baza teoremei de punct fix a lui Schauder. ■

9.4 Aplicaţie a teoremei de punct fix a lui Leray–Schauder

Se pune întrebarea dacă se pot obţine teoreme de existenţă pentru problema (9.1) în care funcţia $g(x,u,v)$ satisface (9.6) fără însă ca numerele a şi b să fie suficient de mici. Astfel de rezultate pot fi deduse din teorema lui Leray–Schauder impunând o anumită condiţie de semn. Mai mult decât atât, metoda de demonstraţie permite funcţiei g să aibă o creştere superliniară în u şi v.

Teorema 9.5 (Leray–Schauder) *Fie $(X, |.|_X)$ un spaţiu Banach, $R > 0$ şi $A : \overline{B}_R(0;X) \to X$ un operator complet continuu. Dacă*

$$|u|_X < R$$

oricare ar fi u o soluţie a ecuaţiei $u = \lambda A(u)$ şi $\lambda \in (0,1)$, atunci A admite cel puţin un punct fix.

Pentru demonstraţie şi diverse aplicaţii a se vedea lucrările O'Regan–Precup [35] şi Precup [38], [40].

Teorema 9.6 *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ $(n \geq 3)$ o mulţime deschisă şi mărginită, $f \in H^{-1}(\Omega)$ şi $g : \Omega \times \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ o funcţie cu proprietăţile:*

(i) *g satisface condiţiile lui Carathéodory;*

(ii) *$g(.,0,0) = 0$ şi există $a, b, \alpha, \beta \in \mathbf{R}_+$ cu $1 \leq \alpha < 2^* - 1 = (n+2)/(n-2)$, $1 \leq \beta < 2/(2^*)' = 1 + 2/n$ şi $h \in L^2(\Omega)$ astfel ca*

$$|g(x,u,v)| \leq a|u|^\alpha + b|v|^\beta + h(x)$$

pentru orice $u \in \mathbf{R}$, $v \in \mathbf{R}^n$ şi a.p.t. $x \in \Omega$;

(iii)

$$u\, g(x,u,v) \leq 0$$

pentru orice $u \in \mathbf{R}$, $v \in \mathbf{R}^n$ şi a.p.t. $x \in \Omega$.

Atunci problema (9.1) *admite cel puţin o soluţie $u \in H_0^1(\Omega)$.*

Demonstraţie. Fie $p_1 = 2^*/\alpha$, $p_2 = 2/\beta$ şi $p = \min\{p_1, p_2\}$. Condiţiile asupra exponenţilor α şi β garantează $(2^*)' < p_1 \leq 2^*$ şi $(2^*)' < p_2 \leq 2$. Rezultă că $(2^*)' < p \leq 2$, de unde avem că scufundarea

$$L^p(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$$

este compactă. In consecinţă, operatorul de scufundare

$$J : L^p(\Omega) \to H^{-1}(\Omega), \quad (J(u), v) = \int_\Omega u\, v\, dx$$

$(u \in L^p(\Omega),\ v \in H_0^1(\Omega))$ este complet continuu. Mai departe, din $\alpha p \leq \alpha p_1 = 2^*$, avem $L^{2^*}(\Omega) \subset L^{\alpha p}(\Omega)$, iar din $\beta p \leq \beta p_2 = 2$, avem $L^2(\Omega) \subset L^{\beta p}(\Omega)$. Rezultă că operatorul liniar

$$P : H_0^1(\Omega) \to L^{\alpha p}(\Omega) \times L^{\beta p}(\Omega; \mathbf{R}^n), \quad P(u) = [u, \nabla u]$$

este bine definit şi continuu. De asemenea, operatorul Nemytskii

$$\begin{aligned} N_g &: L^{\alpha p}(\Omega) \times L^{\beta p}(\Omega; \mathbf{R}^n) \to L^p(\Omega), \\ N_g(u, v) &= g(., u, v) \end{aligned}$$

este bine definit, continuu, mărginit şi satisface inegalitatea

$$\begin{aligned} |N_g(u, v)|_{L^p} &\leq a\, \left||u|^\alpha\right|_{L^p} + b \left||v|^\beta\right|_{L^p} + |h|_{L^p} \\ &= a\, |u|^\alpha_{L^{\alpha p}} + b\, |v|^\beta_{L^{\beta p}(\Omega; \mathbf{R}^n)} + |h|_{L^p}. \end{aligned}$$

Deducem din cele de mai sus că operatorul $B = J \circ N_g \circ P$ este bine definit şi complet continuu de la $H_0^1(\Omega)$ în $H^{-1}(\Omega)$. In consecinţă, operatorul $A = (-\Delta)^{-1}(B + f)$ de la $H_0^1(\Omega)$ în $H_0^1(\Omega)$, este complet continuu. Mai departe se arată că există $R > 0$ astfel ca

$$|u|_{H_0^1} < R$$

oricare ar fi $u \in H_0^1(\Omega)$ o soluţie a ecuaţiei $u = \lambda A(u)$ şi oricare ar fi $\lambda \in (0, 1)$.

Pentru aceasta, fie $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ cu $u = \lambda A(u)$, pentru un anumit $\lambda \in (0, 1)$. Atunci

$$(u, v)_{H_0^1} = \lambda (B(u) + f, v), \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Alegând $v = u$ şi ţinând seamă de faptul că $B(u) \in L^p(\Omega)$, de condiţia de semn şi de $\lambda < 1$, obţinem

$$|u|^2_{H_0^1} = \lambda [(B(u), u) + (f, u)] \leq \lambda (f, u) < |f|_{H^{-1}} |u|_{H_0^1}.$$

Evident aici s-a presupus $f \neq 0$, cazul $f = 0$ fiind trivial. Deci $|u|_{H_0^1} < |f|_{H^{-1}}$. Concluzia rezultă acum din teorema lui Leray–Schauder. ■

Observaţia 9.2 Teorema 9.6 este valabilă şi dacă, mai general, în locul condiţiei de semn (iii) se cere să existe $c < \lambda_1$ astfel ca

$$u\, g(x, u, v) \le c\, |u|^2$$

pentru orice $u \in \mathbf{R}$, $v \in \mathbf{R}^n$ şi a.p.t. $x \in \Omega$.

Intr-adevăr, în această situaţie avem

$$\begin{aligned} |u|_{H_0^1}^2 &= \lambda\left[(B(u), u) + (f, u)\right] = \lambda \int_\Omega u\, g(x, u, \nabla u)\, dx + \lambda (f, u) \\ &\le \lambda \left(c\, |u|_{L^2}^2 + |f|_{H^{-1}} |u|_{H_0^1} \right) < \frac{c}{\lambda_1} |u|_{H_0^1}^2 + |f|_{H^{-1}} |u|_{H_0^1} . \end{aligned}$$

Cum $c < \lambda_1$, deducem $|u|_{H_0^1} < |f|_{H^{-1}} / (1 - c/\lambda_1)$.

Observaţia 9.3 Teorema 9.6 este adevărată în cazurile $n = 2$ şi $n = 1$, fără alte restricţii asupra exponenţilor $\alpha, \beta \ge 1$.

Rezultate obţinute pe baza principiului lui Leray–Schauder pentru probleme la limită cu p-Laplacean pot fi găsite în lucrarea Jebelean [20].

9.5 Metoda iteraţiilor monotone

Metoda iteraţiilor monotone, sau *metoda sub şi supra*-soluţiilor, reduce problema existenţei soluţiilor la existenţa unei sub-soluţii $\underline{u}$ şi a unei supra-soluţii $\overline{u}$, cu $\underline{u} \le \overline{u}$. Instrumentul cel mai legat de această metodă îl reprezintă principiul de maxim.

Vom ilustra această metodă pe cazul problemei (9.1) în care membrul drept al ecuaţiei nu depinde de ∇u, adică pe problema

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x, u) + f & \text{pe } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega \end{cases} \tag{9.7}$$

unde $f \in H^{-1}(\Omega)$ şi $g : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Vom considera cazul $n \ge 3$.

Definiţia 9.4 Numim *sub-soluţie* a problemei (9.7), o funcţie $\underline{u} \in H^1(\Omega)$ pentru care $N_g(\underline{u}) \in L^{(2^*)'}(\Omega)$ şi

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} \le g(x, \underline{u}) + f \ \text{ în } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \underline{u} \le 0 \quad \text{pe } \partial\Omega. \end{cases}$$

Numim *supra-soluţie* a problemei (9.7), o funcţie $\overline{u} \in H^1(\Omega)$ pentru care $N_g(\overline{u}) \in L^{(2^*)'}(\Omega)$ şi

$$\begin{cases} -\Delta \overline{u} \geq g(x, \overline{u}) + f \ \text{ în } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \overline{u} \geq 0 \quad \text{pe } \partial\Omega. \end{cases}$$

Teorema 9.7 *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime deschisă şi mărginită, $f \in H^{-1}(\Omega)$ şi fie $\underline{u}$, $\overline{u}$ o sub-soluţie şi respectiv o supra-soluţie a problemei* (9.7) *cu $\underline{u}(x) \leq \overline{u}(x)$ a.p.t. $x \in \Omega$. Dacă funcţia $g : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ satisface condiţiile lui Carathéodory şi este crescătoare in raport cu al doilea argument, adică*

$$g(x, u_1) \leq g(x, u_2) \tag{9.8}$$

pentru $\underline{u}(x) \leq u_1 \leq u_2 \leq \overline{u}(x)$ şi a.p.t. $x \in \Omega$, atunci problema (9.7) *are cel puţin o soluţie slabă $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfăcând $\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x)$ a.p.t. $x \in \Omega$.*

Demonstraţie. Fie $u \in H^1(\Omega)$ o funcţie oarecare satisfăcând $\underline{u}(x) \leq u(x) \leq \overline{u}(x)$ a.p.t. $x \in \Omega$. Condiţiile lui Carathéodory garantează că funcţia $N_g(u) = g(., u(.))$ este măsurabilă. Mai departe, (9.8) implică $N_g(\underline{u}) \leq N_g(u) \leq N_g(\overline{u})$ pe Ω, de unde

$$0 \leq N_g(u) - N_g(\underline{u}) \leq N_g(\overline{u}) - N_g(\underline{u}).$$

De aici şi din $N_g(\overline{u}) - N_g(\underline{u}) \in L^{(2^*)'}(\Omega)$ se deduce că funcţia măsurabilă $N_g(u) - N_g(\underline{u})$ aparţine lui $L^{(2^*)'}(\Omega)$. Atunci $N_g(u) \in L^{(2^*)'}(\Omega)$ de asemenea. Cum $L^{(2^*)'}(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, are deci sens

$$A(u) = (-\Delta)^{-1}(N_g(u) + f) \quad \text{şi} \quad v := A(u) \in H_0^1(\Omega).$$

Avem

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} \leq g(x, \underline{u}) + f \ \text{ în } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \underline{u} \leq 0 \quad \text{pe } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases} -\Delta v = g(x, u) + f \ \text{ în } \mathcal{D}'(\Omega) \\ v = 0 \quad \text{pe } \partial\Omega. \end{cases}$$

Rezultă

$$\begin{cases} \Delta(v - \underline{u}) \leq g(x, \underline{u}) - g(x, u) \leq 0 \ \text{ în } \mathcal{D}'(\Omega) \\ v - \underline{u} \geq 0 \quad \text{pe } \partial\Omega. \end{cases}$$

Principiul de maxim garantează $v - \underline{u} \geq 0$ pe Ω. Analog, $\overline{u} - v \geq 0$ pe Ω. Deci

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \quad \text{implcă} \quad \underline{u} \leq A(u) \leq \overline{u}.$$

In particular, $\underline{u} \leq A(\underline{u}) \leq \overline{u}$, de unde, din aproape în aproape, se deduce că $\underline{u} \leq A^k(\underline{u}) \leq \overline{u}$ pentru orice k. In plus, este uşor de constatat că şirul de funcţii $\left(A^k(\underline{u})\right)$ este crescător. Din teorema convergenţei monotone a lui Beppo-Levi deducem că există o funcţie $u \in L^{2^*}(\Omega)$ cu $A^k(\underline{u}) \to u$ în $L^{2^*}(\Omega)$ pentru $k \to \infty$. Ne rămâne să arătăm că $A(u) = u$. In plus vom arăta că această convergenţă are loc chiar în $H_0^1(\Omega)$. Monotonia şirului $\left(A^k(\underline{u})\right)$ şi convergenţa sa la u în $L^{2^*}(\Omega)$ garantează că $A^k(\underline{u})(x) \to u(x)$ a.p.t. $x \in \Omega$. Condiţia Carathéodory de continuitate, implică atunci că $N_g\left(A^k(\underline{u})(x)\right) \to N_g(u)(x)$ a.p.t. $x \in \Omega$. Dar şirul $\left(N_g\left(A^k(\underline{u})\right)\right)$ este el însuşi monoton. Deci $N_g\left(A^k(\underline{u})\right) \to N_g(u)$ în $L^{(2^*)'}(\Omega)$ şi deci şi în $H^{-1}(\Omega)$. Folosind continuitatea operatorului $(-\Delta)^{-1}$ de la $H^{-1}(\Omega)$ la $H_0^1(\Omega)$, deducem $A\left(A^k(\underline{u})\right) \to A(u)$ în $H_0^1(\Omega)$, deci şi în $L^{2^*}(\Omega)$. Aşadar $A(u) = u$. ■

Observaţia 9.4 Teorema 9.7 rămâne adevărată dacă operatorul $-\Delta u$ se înlocuieşte prin $-\Delta u - cu$, cu $c < \lambda_1$.

Sub şi supra-soluţii pot fi puse în evidenţă pentru diferite clase de funcţii g (a se vedea secţiunea Probleme).

Mai multe detalii despre metoda iteraţiilor monotone, inclusiv varianta ei abstractă, operatorială, pot fi găsite în monografia Precup [40].

9.6 Metoda punctului critic

Definiţia 9.5 Fie X un spaţiu liniar normat şi $E : X \to \mathbf{R}$ o funcţională oarecare. Prin *derivata lui E în $u \in X$ după direcţia $v \in X$*, notată cu $E'(u; v)$, se înţelege (dacă există) numărul

$$E'(u; v) = \lim_{t \to 0+} \frac{E(u + tv) - E(u)}{t}.$$

Dacă $E'(u; v)$ există pentru orice $v \in X$ şi funcţionala $E'(u; .)$ este liniară şi continuă pe X, spunem că E este *derivabilă în u* şi notăm $E'(u) = E'(u; .)$. Atunci $E'(u) \in X^*$ şi $(E'(u), v) = E'(u; v)$ pentru $v \in X$.

Se spune că E este *derivabilă* dacă ea este derivabilă în orice $u \in X$.

Aşa de exemplu, funcţionala energie asociată problemei Dirichlet (8.1) cu $f \in H^{-1}(\Omega)$ este

$$E : H_0^1(\Omega) \to \mathbf{R}, \quad E(u) = \frac{1}{2}|u|_{H_0^1}^2 - (f, u).$$

Am constatat că pentru orice $u,\ v \in H_0^1(\Omega)$, avem

$$E'(u; v) = (u, v)_{H_0^1} - (f, v).$$

Aceasta arată că E este derivabilă şi

$$E'(u) = (u, .)_{H_0^1} - (f, .).$$

Prin soluţie slabă a problemei Dirichlet (8.1) s-a înţeles o funcţie $u \in H_0^1(\Omega)$ pentru care $E'(u; v) = 0$ pentru orice $v \in H_0^1(\Omega)$. Aceasta revine la faptul că $E'(u) = 0$, adică u este *punct critic* al funcţionalei energie.

In această secţiune vom schiţa doar modul în care este folosită metoda punctului critic pentru a discuta problema neliniară (9.7) cu $f \in H^{-1}(\Omega)$. Printr-o soluţie slabă a acestei probleme am înţeles o funcţie $u \in H_0^1(\Omega)$ pentru care $g(., u(.)) \in H^{-1}(\Omega)$ şi

$$(u, v)_{H_0^1} - (g(., u) + f, v) = 0, \quad v \in H_0^1(\Omega).$$

Prima întrebare care se pune este dacă există o funcţională derivabilă pe $H_0^1(\Omega)$ astfel ca soluţiile slabe ale problemei neliniare (9.7) să coincidă cu punctele ei critice. Răspunsul afirmativ este dat de teorema următoare.

Teorema 9.8 *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ deschis şi mărginit şi $n \geq 3$. Fie $f \in H^{-1}(\Omega)$ şi $g : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Presupunem că g satisface condiţiile lui Carathéodory şi condiţia de creştere*

$$|g(x, u)| \leq c\,|u|^{2^*-1} + h(x) \tag{9.9}$$

pentru orice $u \in \mathbf{R}$ şi a.p.t. $x \in \Omega$, unde $c \in \mathbf{R}_+$ iar $h \in L^{(2^*)'}(\Omega)$. Fie $G : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ primitiva lui g în raport cu cel de-al doilea argument, care se anulează în origine, adică

$$G(x, u) = \int_0^u g(x, \tau)\, d\tau \quad (x \in \Omega,\ u \in \mathbf{R}).$$

Atunci funcţionala $E : H_0^1(\Omega) \to \mathbf{R}$ *definită prin*

$$\begin{aligned} E(u) &= \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - G(x, u(x)) \right) dx - (f, u) \qquad (9.10) \\ &= \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 - \int_0^{u(x)} g(x, \tau)\, d\tau \right) dx - (f, u) \end{aligned}$$

este derivabilă şi

$$\left(E'(u), v \right) = (u, v)_{H_0^1} - (g(., u) + f, v) \qquad (9.11)$$

oricare ar fi $u,\, v \in H_0^1(\Omega)$.

Observaţia 9.5 Pentru $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, (9.11) devine

$$\left(E'(u), \varphi \right) = (-\Delta u - g(., u) - f,\ \varphi).$$

Aşadar, ca distribuţie pe Ω, $E'(u) = -\Delta u - g(., u) - f$. Deci

$$E' = -\Delta - N_g - f.$$

Demonstraţie. Avem de demonstrat că

$$\int_\Omega \left(\frac{G(x, u + tv) - G(x, u)}{t} - g(x, u)\, v \right) dx \to 0 \quad \text{pentru } t \to 0_+. \qquad (9.12)$$

Fie

$$\psi(x, t) = \frac{G(x, u + tv) - G(x, u)}{t} - g(x, u)\, v.$$

Folosind teorema de medie, putem scrie

$$\psi(x, t) = [g(x, u + t\theta(x)\, v) - g(x, u)]\, v$$

unde $\theta(x) \in [0, 1]$. Condiţia Carathéodory de continuitate implică

$$\psi(x, t) \to 0 \quad \text{pentru } t \to 0_+ \text{ a.p.t. } x \in \Omega.$$

Pe de altă parte, folosind (9.9), pentru $t < 1$ găsim

$$\begin{aligned} |\psi(x, t)| &\leq |v| \left(c\, |u + t\theta v|^{2^* - 1} + c\, |u|^{2^* - 1} + 2\, |h| \right) \\ &\leq |v| \left[c\, (|u| + |v|)^{2^* - 1} + c\, |u|^{2^* - 1} + 2\, |h| \right]. \end{aligned}$$

Să observăm că membrul drept al acestei inegalităţi nu depinde de t şi este o funcţie din $L^1(\Omega)$. Apartenenţa la $L^1(\Omega)$ rezultă din inegalitatea lui Hölder fiindcă $u,\ v \in H_0^1(\Omega) \subset L^{2^*}(\Omega)$ şi $c(|u|+|v|)^{2^*-1} + c|u|^{2^*-1} + 2|h| \in L^{(2^*)'}(\Omega)$. Teorema convergenţei dominate a lui Lebesgue implică atunci că $\psi(.,t) \to 0$ în $L^1(\Omega)$ pentru $t \to 0_+$, adică (9.12). ■

Formula (9.10) defineşte funcţionala energie a problemei neliniare (9.7), iar (9.11) arată că soluţiile slabe ale acestei probleme coincid cu punctele critice ale funcţionalei energie. S-a văzut că în cazul liniar funcţionala energie admite un unic punct critic şi acesta este unicul ei punct de minim. In caz neliniar, pot exista mai multe soluţii ale problemei şi deci, mai multe puncte critice ale funcţionalei energie corespunzătoare. Următoarea întrebare care se impune este aşadar, prin ce metode putem identifica puncte critice pentru funcţionala (9.10). Cea mai simplă cale este de a imita cazul liniar, impunând lui g condiţii care să garanteze existenţa unui punct de minim al funcţionalei energie şi de a ne baza pe următoarea variantă generalizată a teoremei lui Fermat.

Propoziţia 9.2 *Fie X un spaţiu liniar normat şi $E : X \to \mathbf{R}$ o funcţională oarecare. Dacă $u \in X$ este un punct de extrem local al lui E şi dacă E este derivabilă în u, atunci $E'(u) = 0$.*

Demonstraţie. Fie u un punct de minim local. Atunci există o bilă $B_r(u)$ de rază $r > 0$ şi centru u astfel încât $E(w) \geq E(u)$ pentru orice $w \in B_r(u)$. Fie $v \in X$ cu $|v| = 1$. Pentru orice $t \in [0, r)$ avem

$$E(u+tv) \geq E(u) \ \text{ şi } \ E(u-tv) \geq E(u).$$

Din prima inegalitate se deduce $E'(u; v) \geq 0$, iar din cea de a doua $E'(u; -v) \geq 0$. Dar $E'(u; v) = (E'(u), v)$ şi $E'(u; -v) = (E'(u), -v) = -(E'(u), v)$. Rezultă $(E'(u), v) = 0$. Cum v a fost arbitrar ales, deducem $E'(u) = 0$. ■

Propoziţia care urmează furnizează condiţii suficiente pentru ca o funcţională oarecare să admită un punct de minim global.

Propoziţia 9.3 *Fie X un spaţiu Banach reflexiv şi $E : X \to \mathbf{R}$ o funcţională. Presupunem că pentru orice $\lambda \in \mathbf{R}$, mulţimea de nivel $(E \leq \lambda) := \{u \in X : E(u) \leq \lambda\}$ este închisă şi convexă. In plus, presupunem că E este coercivă, adică $E(u) \to \infty$ pentru $|u| \to \infty$. Atunci E este măginită inferior pe X şi îşi atinge infimumul.*

Demonstraţie. Fie $m = \inf_X E(u)$. Avem $-\infty \leq m < \infty$. Considerăm un şir (u_k) de elemente ale lui X cu proprietatea $E(u_k) \to m$

pentru $k \to \infty$. Coercivitatea lui E implică mărginirea şirului (u_k). Cum X este reflexiv, există un subşir slab convergent al lui (u_k). Fără a introduce o notaţie specială pentru acest subşir, putem presupune că $u_k \to u_0$ slab. Fie a un număr real oarecare cu $m < a$. Atunci, există un rang k_a începând de la care $E(u_k) \leq a$, adică $u_k \in (E \leq a)$. Este cunoscut rezultatul conform căruia, pentru orice şir slab convergent există un şir de combinaţii convexe ale termenilor săi care converge tare la aceeaşi limită. Fie $(\widetilde{u}_k)$ şirul de combinaţii convexe de elemente ale lui $(u_k)_{k \geq k_a}$ cu $\widetilde{u}_k \to u_0$ tare. Convexitatea mulţimii $(E \leq a)$ garantează $\widetilde{u}_k \in (E \leq a)$, iar faptul că $(E \leq a)$ este închisă, implică $u_0 \in (E \leq a)$. Deci $E(u_0) \leq a$. Făcând $a \downarrow m$, găsim $E(u_0) \leq m$, ceea ce arată pe de o parte că $m > -\infty$ şi pe altă parte că $E(u_0) = m$. ■

Suntem acum în măsură să enunţăm un rezultat de existenţă pentru problema Dirichlet (9.7).

Teorema 9.9 *Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ deschis şi mărginit şi $n \geq 3$. Fie $f \in H^{-1}(\Omega)$ şi $g : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Presupunem că g satisface condiţiile lui Carathéodory şi condiţia de creştere*

$$|g(x,u)| \leq c\,|u|^{2^*-1} + h(x) \tag{9.13}$$

pentru orice $u \in \mathbf{R}$ şi a.p.t. $x \in \Omega$, unde $c \in \mathbf{R}_+$şi $h \in L^{(2^*)'}(\Omega)$. Dacă în plus $g(x,0) = 0$ şi $g(x,.)$ este descrescătoare pe $\mathbf{R}$ a.p.t. $x \in \Omega$, atunci problema (9.7) are o soluţie slabă $u \in H_0^1(\Omega)$ unică. In plus u minimizează funcţionala energie.

Demonstraţie. Este clar că funcţionala $\frac{1}{2}|u|^2_{H_0^1} - (f,u)$ este continuă şi convexă pe $H_0^1(\Omega)$. Arătăm că aceleaşi proprietăţi le are şi funcţionala $-\int_\Omega G(x,u)\,dx$. Din (9.13) deducem că există constanta c_1 şi $h_1 \in L^1(\Omega)$ cu

$$|G(x,u)| \leq c_1\,|u|^{2^*} + h_1(x)$$

pentru orice $u \in \mathbf{R}$ şi a.p.t. $x \in \Omega$. Teorema 9.1 asupra operatorului lui Nemytskii implică continuitatea lui $N_G = G(.,u(.))$ de la $L^{2^*}(\Omega)$ la $L^1(\Omega)$. Dacă $u_k \to u$ în $H_0^1(\Omega)$, atunci $u_k \to u$ în $L^{2^*}(\Omega)$, de unde $G(.,u_k(.)) \to G(.,u(.))$ în $L^1(\Omega)$. Deci

$$\left|\int_\Omega (G(x,u_k) - G(x,u))\,dx\right| \leq \int_\Omega |G(x,u_k) - G(x,u)|\,dx \to 0,$$

adică funcţionala $-\int_\Omega G(x,u)\,dx$ este continuă. Rezultă că E este de asemenea continuă şi în consecinţă, mulţimile de nivel $(E \le \lambda)$ sunt închise.

Pe de altă parte, din $g(x,.)$ descrescătoare pe $\mathbf{R}$ avem că $G(x,.)$ este o funcţie concavă pe $\mathbf{R}$. Rezultă, după cum se poate constata uşor, că funcţionala $-\int_\Omega G(x,u)\,dx$ este convexă pe $H_0^1(\Omega)$. Atunci, ca o sumă de funcţionale convexe, E este convexă. In consecinţă mulţimile ei de nivel $(E \le \lambda)$ sunt convexe.

In final arătăm că E este coercivă. Cum $g(x,.)$ este descrescătoare, iar $g(x,0) = 0$, rezultă că $G(x,u) \le 0$ pentru orice $u \in \mathbf{R}$. Atunci

$$E(u) \ge \frac{1}{2}|u|_{H_0^1}^2 - |f|_{H^{-1}}|u|_{H_0^1}$$

de unde $E(u) \to \infty$ pentru $|u|_{H_0^1} \to \infty$. Propoziţiile 9.3 şi 9.2 implică existenţa unei soluţii care minimizează energia. Unicitatea soluţiei este consecinţa convexităţii stricte a funcţionalei E garantată de convexitatea strictă a termenului $|u|_{H_0^1}^2$ (Exerciţiu). ■

In ultimele trei decenii, teoria punctului critic a cunoscut o remarcabilă dezvoltare. Au fost puse la punct metode prin care sunt obţinute puncte critice ce nu sunt puncte de extrem. Cititorul interesat să se iniţieze în aceste metode poate consulta lucrările Precup [38], [40] şi Rădulescu [44]. Numeroase tehnici de punct critic pentru ecuaţii cu derivate parţiale sunt prezentate în monografiile Rabinowitz [43] şi Struwe [51].

Alte metode pentru studiul problemelor la limită neliniare se bazează pe teoria operatorilor monotoni în sensul lui Minty şi Browder; a se vedea Barbu [3, Sectiunea 3.5], Lions [26], Necas [33] şi Sburlan [46, Sectiunea II.2]. O foarte bună introducere în problemele la limită neliniare este lucrarea Taylor [53, vol. 3].

9.7 Probleme

1) Să se dea exemple de funcţii g care satisfac toate condiţiile fiecăreia dintre Teoremele 9.2, 9.4 şi 9.6.

2) Să se verifice faptul că funcţia $g(x,u,v) = -a|u|^{p-1}u$ satisface condiţiile Teoremei 9.6 dacă $a \in \mathbf{R}_+$ şi $1 \le p < 2^* - 1$. Să se deducă existenţa pentru orice $f \in H^{-1}(\Omega)$, a cel puţin unei soluţii slabe a problemei

$$\begin{cases} -\Delta u = -a\,|u|^{p-1}\,u + f & \text{pe } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases}$$

3) Să se arate că în Teorema 9.7, dacă în plus $\underline{u}, \overline{u} \in L^\infty(\Omega)$, adică există constantele m, M cu $m \le \underline{u}(x) \le \overline{u}(x) \le M$ a.p.t. $x \in \Omega$, atunci condiţia ca $g(x,u)$ să fie crescătoare pentru $u \in [\underline{u}(x), \overline{u}(x)]$ a.p.t. $x \in \Omega$, poate fi înlocuită cu cerinţa ca să existe o constantă $K \ge 0$ astfel încât funcţia $g(x,u) + Ku$ este crescătoare pentru $u \in [m, M]$ a.p.t. $x \in \Omega$.

Indicaţie. Se scrie ecuaţia sub forma $-\Delta u + Ku = g(x,u) + Ku + f$ şi se ţine seamă de Observaţia 9.4.

4) Să se arate că dacă $f \in L^\infty(\Omega)$ iar $g(x,u) = cu - a\,|u|^{p-1}\,u$, unde $c < \lambda_1$ şi $a \in \mathbf{R}_+$, atunci funcţia $\overline{u} = (-\Delta - cI)^{-1}\,c_0$ este o supra-soluţie, iar $\underline{u} = -\overline{u}$ este o sub-soluţie a problemei (9.7), unde $c_0 = |f|_{L^\infty}$.

Indicaţie. Principiul de maxim garantează $\overline{u} \ge 0$. Atunci

$$-\Delta\overline{u} = c\overline{u} + c_0 \ge c\overline{u} + f - a\,|\overline{u}|^{p-1}\,\overline{u} \quad \text{în } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Deci $\overline{u}$ este o supra-soluţie.

5) Fie problema

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{pe } \Omega \\ u > 0 & \text{pe } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega \end{cases} \tag{9.14}$$

Presupunem că $g \in C^1(\mathbf{R}_+)$, $g(0) = 0$, $g'(0) > \lambda_1$ şi $\lim_{u\to\infty} g(u)/u < \lambda_1$. Să se arate că există o supra-soluţie $\overline{u}$ şi o sub-soluţie $\underline{u} = \varepsilon\phi_1$ cu $0 < \varepsilon\phi_1 \le \overline{u}$. Să se deducă existenţa unei soluţii $u > 0$ pe Ω.

Indicaţie. Fie c cu $\lim_{u\to\infty} g(u)/u < c < \lambda_1$. Atunci există $R > 0$ astfel că $g(u) \le cu$ pentru orice $u > R$. Funcţia g fiind continuă pe $[0, R]$, există $c_0 > 0$ cu $g(u) \le c_0$ pentru orice $u \in [0, R]$. Aşadar, $g(u) \le cu + c_0$, $u \in \mathbf{R}_+$. Atunci $\overline{u} = (-\Delta - cI)^{-1}\,c_0$. Pe de altă parte, din $g'(0) > \lambda_1$ avem $g(u) \ge \lambda_1 u$ pentru orice $u \in [0, \delta]$. Cum $\phi_1 \in L^\infty(\Omega)$ şi $\phi_1 > 0$ pe Ω (vezi Teorema 8.10), există $\varepsilon > 0$ cu $0 < \varepsilon\phi_1 \le \delta$ pe Ω. Atunci $-\Delta(\varepsilon\phi_1) = -\varepsilon\Delta\phi_1 = \varepsilon\lambda_1\phi_1 \le g(\varepsilon\phi_1)$, adică $\underline{u} = \varepsilon\phi_1$ este o sub-soluţie. Pentru a arăta că $\varepsilon\phi_1 \le \overline{u}$ se folosesc relaţiile $-\Delta\overline{u} = c\overline{u} + c_0$ şi $-\Delta(\varepsilon\phi_1) \le g(\varepsilon\phi_1)$ din care se deduce că

$$-\Delta(\overline{u} - \varepsilon\phi_1) - c(\overline{u} - \varepsilon\phi_1) \ge c_0 + c\,\varepsilon\phi_1 - g(\varepsilon\phi_1) \ge 0.$$

Principiul maximului garantează $\overline{u} - \varepsilon\phi_1 \geq 0$.

6) Demonstraţi că în condiţiile Problemei 5, $u \leq \overline{u}$ oricare ar fi u o soluţie a problemei (9.14).

7) Să se verifice că funcţia g din Problema 2 satisface condiţiile Teoremei 9.9 pentru $1 \leq p \leq 2^* - 1$.

8) Să se formuleze rezultate de existenţă de tipul Teoremelor 9.2, 9.4 şi 9.6 pentru cazul în care operatorul B de la $H_0^1(\Omega)$ în $H^{-1}(\Omega)$ este unul general, adică pentru problema

$$\begin{cases} -\Delta u = B(u) + f & \text{pe } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \partial\Omega. \end{cases}$$

A se vedea şi Secţiunea 10.5 care urmează.

Capitolul 10
Probleme de evoluţie neliniare

In Capitolul 4 s-a definit noţiunea de soluţie slabă sau generalizată a problemei Cauchy–Dirichlet pentru ecuaţia căldurii şi pentru ecuaţia undelor şi s-au demonstrat teoremele de existenţă, unicitate şi reprezentare a soluţiilor slabe. Pentru aceasta s-a lucrat cu funcţii cu valori în spaţiul $L^2(\Omega)$. Ca şi în cazul problemei Dirichlet, este util să se extindă noţiunea de soluţie considerând mai general spaţiul $H^{-1}(\Omega)$ în locul lui $L^2(\Omega)$. Importanţa acestei extinderi s-a văzut în Capitolul 9 consacrat problemelor la limită eliptice neliniare şi se va reflecta din nou în secţiunile rezervate problemei Cauchy–Dirichlet pentru ecuaţii neliniare. Ea constă în faptul că permite tratarea unor ecuaţii cu neliniaritate superliniară.

In acest capitol vom prezenta rezultate de tipul celor din Capitolul 4 pentru funcţii cu valori în $H^{-1}(\Omega)$ şi vom stabili rezultate de existenţă pentru probleme neliniare. In plus, vom prezenta teoreme de regularitate a soluţiilor slabe.

10.1 Serii Fourier în $H^{-1}(\Omega)$

Extinderea unor raţionamente făcute în Paragrafele 4.3 şi 4.4 la cazul funcţiilor f cu valori în $H^{-1}(\Omega)$ este posibilă pe baza teoremei care urmează şi care, în esenţă generalizează pentru spaţiul $H^{-1}(\Omega)$, egalitatea lui Parseval şi proprietatea de completitudine a sistemului funcţiilor proprii (ϕ_k).

Teorema 10.1 (i) *Pentru orice* $u \in H^{-1}(\Omega)$, *avem*

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, \phi_k)\, \phi_k \quad (\hat{\imath}n\ H^{-1}(\Omega)) \tag{10.1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} (u, \phi_k)^2 = |u|_{H^{-1}}^2 . \tag{10.2}$$

(ii) *Dacă* $u \in L^2\left(0, T; H^{-1}(\Omega)\right)$, *atunci*

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, \phi_k)\, \phi_k \quad (\hat{\imath}n\ L^2\left(0, T; H^{-1}(\Omega)\right)).$$

Demonstraţie. (i) Se foloseşte faptul că $-\Delta$ este un izomorfism al spaţiilor $H_0^1(\Omega)$ şi $H^{-1}(\Omega)$. Astfel, dacă $u \in H^{-1}(\Omega)$, atunci $(-\Delta)^{-1} u \in H_0^1(\Omega)$ şi egalitatea (10.1) este echivalentă cu

$$(-\Delta)^{-1} u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, \phi_k) (-\Delta)^{-1} \phi_k \quad (\hat{\text{in}}\ H_0^1(\Omega)).$$

Dar $(-\Delta)^{-1} \phi_k = \frac{1}{\lambda_k} \phi_k$ iar $(u, \phi_k) = \left((-\Delta)^{-1} u, \phi_k\right)_{H_0^1}$. Astfel egalitatea de mai sus se poate rescrie ca

$$(-\Delta)^{-1} u = \sum_{k=1}^{\infty} \left((-\Delta)^{-1} u, \frac{\phi_k}{\sqrt{\lambda_k}}\right)_{H_0^1} \frac{\phi_k}{\sqrt{\lambda_k}} \quad (\hat{\text{in}}\ H_0^1(\Omega)).$$

Dar această egalitate este adevărată fiindcă sistemul $\left(\phi_k / \sqrt{\lambda_k}\right)$ este complet în $H_0^1(\Omega)$.

Relaţia (10.2) este echivalentă cu egalitatea lui Parseval în $H_0^1(\Omega)$, pentru funcţia $(-\Delta)^{-1} u$.

(ii) Conform punctului (i),

$$|u(t)|_{H^{-1}}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} (u(t), \phi_k)^2 \quad \text{a.p.t. } t \in [0, T].$$

Problema se reduce la a demonstra convergenţa şirului sumelor parţiale ale acestei serii, în $L^1(0, T)$. Aceasta are loc, pe baza teoremei convergenţei dominate a lui Lebesgue, fiindcă funcţia $|u(.)|_{H^{-1}}^2$ aparţine spaţiului $L^1(0, T)$ şi domină sumele parţiale. ■

10.2 Ecuaţia neomogenă a căldurii în $H^{-1}(\Omega)$

Prezentăm un rezultat al lui J.L. Lions cu privire la existenţa şi unicitatea soluţiei slabe a problemei Cauchy–Dirichlet pentru ecuaţia căldurii.

Teorema 10.2 (Lions) *Dacă $f \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$ şi $g_0 \in L^2(\Omega)$, atunci există o unică funcţie*

$$u \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \cap C\left([0,T];L^2(\Omega)\right) \tag{10.3}$$

astfel încât pentru orice $v \in H_0^1(\Omega)$ funcţia $(u(t),v)_{L^2}$ este absolut continuă pe $[0,T]$ şi

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u(t),v)_{L^2} + (u(t),v)_{H_0^1} = (f(t),v) \quad a.p.t.\ t \in [0,T] \\ u(0) = g_0. \end{cases} \tag{10.4}$$

In plus, pentru orice $t \in [0,T]$, avem

$$\frac{1}{2}|u(t)|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}|g_0|_{L^2}^2 + \int_0^t |u(\tau)|_{H_0^1}^2 d\tau = \int_0^t (f(\tau),u(\tau))\,d\tau. \tag{10.5}$$

Demonstraţie. Procedăm ca în Secţiunea 4.3 şi căutăm funcţia u sub forma (4.8), anume

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\,\phi_k. \tag{10.6}$$

Inlocuind formal în (10.4) obţinem expresia (4.10) a coeficienţilor $u_k(t)$, adică

$$u_k(t) = e^{-\lambda_k t} g_0^k + \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} f_k(s)\,ds$$

unde, de această dată, $f_k(t) = (f(t),\phi_k)$. Amintim că $g_0^k = (g_0,\phi_k)_{L^2}$.

a) Arătăm că seria (10.6) defineşte o funcţie $u \in C\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$. Pentru aceasta este suficient să demonstrăm că această serie este convergentă în $L^2(\Omega)$, uniform în raport cu $t \in [0,T]$. Să considerăm sumele parţiale ale seriei (10.6)

$$s_m(t) = \sum_{k=1}^{m} u_k(t)\,\phi_k.$$

Avem

$$|s_{m+p}(t) - s_m(t)|_{L^2}^2 = \left| \sum_{k=m+1}^{m+p} u_k(t)\, \phi_k \right|_{L^2}^2 = \sum_{k=m+1}^{m+p} u_k^2(t)\,.$$

Astfel problema s-a redus la a demonstra convergenţa uniformă a seriei $\sum_{k=1}^{\infty} u_k^2(t)$ pe intervalul $[0,T]$. Folosind inegalitatea $(a+b)^2 \leq 2\left(a^2+b^2\right)$ găsim

$$\begin{aligned} u_k^2(t) &\leq 2\left[\left(g_0^k\right)^2 + \left(\int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} f_k(s)\, ds\right)^2\right] \qquad (10.7)\\ &\leq 2\left(g_0^k\right)^2 + \frac{1}{\lambda_k}\int_0^t f_k^2(s)\, ds. \end{aligned}$$

Problema se reduce astfel la convergenţa seriilor numerice

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(g_0^k\right)^2 \quad \text{şi} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \frac{1}{\lambda_k} f_k^2(s)\, ds.$$

Egalitatea lui Parseval garantează faptul că prima serie are ca sumă pe $|g_0|_{L^2}^2$, iar (10.2) implică

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} f_k^2(s) = |f(s)|_{H^{-1}}^2\ .$$

Pe de altă parte, din $f \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$, rezultă că funcţia $|f(s)|_{H^{-1}}^2$ aparţine lui $L^1(0,T)$. Teorema convergenţei dominate a lui Lebesgue garantează acum că

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T \frac{1}{\lambda_k} f_k^2(s)\, ds = \int_0^T |f(s)|_{H^{-1}}^2\, ds.$$

Să mai observăm că din (10.7) rezultă

$$|u(t)|_{L^2}^2 \leq 2\,|g_0|_{L^2}^2 + \int_0^t |f(s)|_{H^{-1}}^2\, ds, \quad t \in [0,T]\,. \qquad (10.8)$$

b) Demonstrăm că $u \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$. Avem

$$\begin{cases} \left(s_m'(t), \phi_j\right)_{L^2} + \left(s_m(t), \phi_j\right)_{H_0^1} = \left(f(t), \phi_j\right), \quad j = 1,2,...,m \\ s_m(0) = g_{0m} \end{cases} \qquad (10.9)$$

unde $g_{0m} = \sum_{k=1}^{m} g_0^k \phi_k$. Rezultă

$$\left(s_m'(t), s_m(t)\right)_{L^2} + |s_m(t)|_{H_0^1}^2 = (f(t), s_m(t))$$

sau încă

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|s_m|_{L^2}^2 + |s_m|_{H_0^1}^2 = (f, s_m).$$

Dacă integrăm obţinem

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}|s_m(t)|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}|g_{0m}|_{L^2}^2 + \int_0^t |s_m(\tau)|_{H_0^1}^2 d\tau \\ = &\int_0^t (f(\tau), s_m(\tau))\, d\tau \le \int_0^t |f(\tau)|_{H^{-1}} |s_m(\tau)|_{H_0^1} d\tau. \end{aligned} \tag{10.10}$$

Folosind inegalitatea lui Hölder şi faptul că $|g_{0m}|_{L^2} \le |g_0|_{L^2}$, deducem că

$$|s_m|_{L^2\left(0,t;H_0^1(\Omega)\right)}^2 - \frac{1}{2}|g_0|_{L^2}^2 \le |f|_{L^2(0,t;H^{-1}(\Omega))} |s_m|_{L^2\left(0,t;H_0^1(\Omega)\right)} \tag{10.11}$$

de unde rezultă mărginirea şirului (s_m) în spaţiul $L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$. Trecând eventual la un subşir putem presupune că $s_m \to \widetilde{u}$ slab în $L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$. Mai departe este cunoscut rezultatul conform căruia dacă un şir converge slab atunci există un şir de combinaţii convexe de ele-mente ale acelui şir care să conveargă tare către aceeaşi limită. Fie (s_m^c) acest şir de combinaţii convexe de elemente ale lui (s_m) care converge tare în $L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$ la $\widetilde{u}$. Trecând eventual din nou la un subşir, putem presupune că $s_m^c(t) \to \widetilde{u}(t)$ în $H_0^1(\Omega)$ (deci şi în $L^2(\Omega)$) a.p.t. $t \in [0,T]$. Cum însă $s_m(t) \to u(t)$ în $L^2(\Omega)$ pentru orice $t \in [0,T]$, rezultă $u(t) = \widetilde{u}(t)$ a.p.t. $t \in [0,T]$. Deci $u \in L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$.

c) Din (10.9) deducem pentru $m \ge j$

$$\begin{aligned} &\left(s_m(t), \phi_j\right)_{L^2} - \left(g_{0m}, \phi_j\right)_{L^2} + \int_0^t \left(s_m(\tau), \phi_j\right)_{H_0^1} d\tau \\ = &\int_0^t \left(f(\tau), \phi_j\right) d\tau. \end{aligned}$$

Dacă se tinde la limită cu $m \to \infty$ se obţine

$$\begin{aligned} &\left(u(t), \phi_j\right)_{L^2} - \left(g_0, \phi_j\right)_{L^2} + \int_0^t \left(u(\tau), \phi_j\right)_{H_0^1} d\tau \\ = &\int_0^t \left(f(\tau), \phi_j\right) d\tau. \end{aligned} \tag{10.12}$$

Cum orive $v \in H_0^1(\Omega)$ este limita în $H_0^1(\Omega)$ a unui şir de combinaţii liniare a elementelor ϕ_k, folosind (10.12) găsim

$$\begin{aligned} & (u(t), v)_{L^2} - (g_0, v)_{L^2} + \int_0^t (u(\tau), v)_{H_0^1} d\tau \\ = & \int_0^t (f(\tau), v)\, d\tau. \end{aligned}$$

Aceasta arată că funcţia $(u(t), v)_{L^2}$ este absolut continuă şi

$$\frac{d}{dt}(u(t), v)_{L^2} + (u(t), v)_{H_0^1} = (f(t), v) \quad \text{a.p.t. } t \in [0, T].$$

d) Egalitatea $u(0) = g_0$ se obţine din $s_m(0) = g_{0m}$ dacă $m \to \infty$.

e) Pentru unicitate, să presupunem că u şi v sunt două funcţii care se bucură de toate proprietăţile din enunţ. Atunci pentru funcţia $w = u - v$ şi orice j avem

$$\left(w(t), \phi_j\right)_{L^2} + \int_0^t \left(w(s), \phi_j\right)_{H_0^1} ds = 0, \quad t \in [0, T].$$

Dar $\left(w(s), \phi_j\right)_{H_0^1} = \lambda_j \left(w(s), \phi_j\right)_{L^2}$. Deci

$$\left(w(t), \phi_j\right)_{L^2} + \lambda_j \int_0^t \left(w(s), \phi_j\right)_{L^2} ds = 0, \quad t \in [0, T].$$

Rezultă că $\left(w(t), \phi_j\right)_{L^2} = Ce^{-\lambda_j t}$. Cum însă $w(0) = 0$, avem $C = 0$, adică $\left(w(t), \phi_j\right)_{L^2} = 0$ pentru orice $t \in [0, T]$. Aşadar $w(t) = 0$ pentru orice $t \in [0, T]$, de unde $u = v$.

f) Demonstraţia relaţiei (10.5). Fie $f^m(t) = \sum_{k=1}^m f_k(t)\, \phi_k$. Atunci, pentru orice m şi j avem

$$\left(s_m'(t), \phi_j\right)_{L^2} + \left(s_m(t), \phi_j\right)_{H_0^1} = \left(f^m(t), \phi_j\right). \tag{10.13}$$

Fie $\varepsilon \in (0, 1]$ un număr oarecare. Din $s_m \to u$ în $C\left([0, T]; L^2(\Omega)\right)$ şi $f^m \to f$ în $L^2\left(0, T; H^{-1}(\Omega)\right)$ rezultă că există M_ε astfel încât pentru $m \geq M_\varepsilon$ să avem

$$\begin{aligned} |s_m - u|_{C([0,T];L^2(\Omega))} & \leq \varepsilon \\ |f^m - f|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} & \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Din $s_m \to u$ slab în $L^2\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right)$, rezultă că există un şir $(s_k^c)_{k \geq 1}$ de combinaţii convexe de elemente ale şirului $(s_m)_{m \geq M_\varepsilon}$ astfel ca $s_k^c \to$

u tare în $L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$ pentru $k \to \infty$. In particular, $s_k^c(t) \to u(t)$ în $H_0^1(\Omega)$ şi deci în $L^2(\Omega)$, a.p.t. $t \in [0,T]$. Fie $\left(\left(f^k\right)^c\right)_{k\geq 1}$ şirul combinaţiilor convexe cu aceiaşi coeficienţi ale elementelor corespunzătoare din şirul $(f^m)_{m\geq M_\varepsilon}$. Este clar că pentru orice $k \geq 1$ au loc estimările

$$\begin{aligned} |s_k^c - u|_{C[0,T];L^2(\Omega)} &\leq \varepsilon \\ \left|\left(f^k\right)^c - f\right|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Trecând eventual la un subşir, putem presupune că $\left(f^k\right)^c \to f_\varepsilon$ slab în $L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$ şi $|s_k^c(0)|_{L^2} \to \gamma_\varepsilon$. Avem

$$\begin{aligned} \left|\gamma_\varepsilon - |g_0|_{L^2}\right| &\leq \varepsilon \\ |f_\varepsilon - f|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Din (10.13) obţinem mai întâi

$$\left((s_k^c)'(t), \phi_j\right)_{L^2} + \left(s_k^c(t), \phi_j\right)_{H_0^1} = \left(\left(f^k\right)^c(t), \phi_j\right),$$

iar apoi

$$\left((s_k^c)'(t), s_k^c(t)\right)_{L^2} + |s_k^c(t)|_{H_0^1}^2 = \left(\left(f^k\right)^c(t), s_k^c(t)\right),$$

de unde, prin integrare, se găseşte că

$$\frac{1}{2}|s_k^c(t)|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}|s_k^c(0)|_{L^2}^2 + \int_0^t |s_k^c(\tau)|_{H_0^1}^2 \, d\tau = \int_0^t \left(\left(f^k\right)^c(\tau), s_k^c(\tau)\right) d\tau.$$

Pentru $k \to \infty$ şi toţi t, cu excepţia unei mulţimi de măsură nulă, obţinem

$$\frac{1}{2}|u(t)|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\gamma_\varepsilon^2 + \int_0^t |u(\tau)|_{H_0^1}^2 \, d\tau = \int_0^t (f_\varepsilon(\tau), u(\tau)) \, d\tau.$$

Avem

$$\left|\gamma_\varepsilon^2 - |g_0|_{L^2}^2\right| \leq \varepsilon\left(\gamma_\varepsilon + |g_0|_{L^2}\right) \leq \varepsilon\left(2|g_0|_{L^2} + 1\right)$$

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T \left(f_\varepsilon(\tau) - f(\tau), u(\tau)\right) d\tau\right| &\leq \int_0^T |f_\varepsilon(\tau) - f(\tau)|_{H^{-1}} |u(\tau)|_{H_0^1} d\tau \\ &\leq |f_\varepsilon - f|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} |u|_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} \\ &\leq \varepsilon\, |u|_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)}.\end{aligned}$$

Rezultă că a.p.t. t, avem

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{2}|u(t)|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}|g_0|_{L^2}^2 + \int_0^t |u(\tau)|_{H_0^1}^2 d\tau - \int_0^t (f(\tau), u(\tau))\, d\tau\right| \\ \leq\ & \frac{1}{2}\left|\gamma_\varepsilon^2 - |g_0|_{L^2}^2\right| + \left|\int_0^T (f_\varepsilon(\tau) - f(\tau), u(\tau))\, d\tau\right| \leq c\,\varepsilon\end{aligned}$$

unde c este o constantă independentă de t şi de ε. Deducem că funcţia din membrul întâi, continuă pe $[0, T]$, este nulă. Astfel relaţia (10.5) este demonstrată. ■

O altă demonstraţie poate fi găsită în lucrarea Temam [54, p. 68]. O a treia demonstraţie bazată pe o teoremă de izomorfism de tipul Teoremei 7.15, poate fi găsită în Lions–Magenes [27, p. 257].

Observaţia 10.1 Egalitatea (10.5) implică

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)|_{L^2}^2 + |u(t)|_{H_0^1}^2 = (f(t), u(t)), \quad \text{a.p.t. } t \in [0, T]. \tag{10.14}$$

Definiţia 10.1 Numim *soluţie* (slabă sau generalizată) a problemei Cauchy–Dirichlet

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{pe } Q \\ u(x, 0) = g_0(x) & \text{pe } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \Sigma \end{cases} \tag{10.15}$$

pentru $f \in L^2\left(0, T; H^{-1}(\Omega)\right)$ şi $g_0 \in L^2(\Omega)$, funcţia u cu proprietăţile (10.3) şi (10.4).

Observaţia 10.2 Dacă u este soluţia slabă a problemei (10.15), atunci u satisface ecuaţia $u' - \Delta u = f$ în sensul teoriei distribuţiilor cu valori în $H^{-1}(\Omega)$ (a se vedea Temam [54, p. 67]).

10.3 Rezultate de regularitate

Vom analiza în detaliu regularitatea soluţiei slabe a problemei Cauchy–Dirichlet pentru ecuaţia căldurii. O privire superficială asupra formulei

(10.6) de reprezentare a soluţiei slabe în cazul omogen $f = 0$, ne sugerează că, dată fiind prezenţa factorilor exponenţiali $e^{-\lambda_j t}$, soluţia ar trebui să posede proprietăţi de regularitate remarcabile. Vom arăta că într-adevăr aşa se întâmplă şi că ecuaţia căldurii are un puternic efect regularizant asupra datei iniţiale g_0. Se va vedea că soluţia $u(x,t)$ este de clasă C^∞ în raport cu x, pentru orice $t > 0$, chiar dacă g_0 este o funcţie discontinuă.

Pentru a discuta regularitatea soluţiei este convenabil să considerăm următoarele subspaţii ale lui $X_0 = L^2(\Omega)$:

$$X_m = \left\{u \in H_0^1(\Omega) : \ \Delta u \in X_{m-1}\right\}, \quad m = 1, 2, ...$$

Este clar că

$$X_m = \left\{u \in H_0^1(\Omega) : \Delta u, \Delta^2 u, ..., \Delta^{m-1} u \in H_0^1(\Omega), \Delta^m u \in L^2(\Omega)\right\}$$

şi

$$... X_{m+1} \subset X_m \subset ... \subset X_1 \subset H_0^1(\Omega).$$

Lema 10.1 (a) *Spaţiul* X_m *înzestrat cu produsul scalar*

$$(u,v)_{X_m} = (\Delta^m u, \Delta^m v)_{L^2}$$

este un spaţiu Hilbert.

(b) *Pentru orice* $u \in X_m$ *are loc următoarea generalizare a egalităţii lui Parseval*

$$|u|_{X_m}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2m} \left(u, \phi_j\right)_{L^2}^2. \tag{10.16}$$

Demonstraţie. (a) Se verifică mai întâi că pentru aplicaţia $(u,v)_{X_m}$ sunt satisfăcute toate axiomele produsului scalar. Astfel, dacă $|u|_{X_m}^2 = (u,u)_{X_m} = 0$, atunci $0 = \Delta^m u = \Delta\left(\Delta^{m-1}u\right)$. Cum $\Delta^{m-1}u \in H_0^1(\Omega)$, pe baza teoremei de existenţă şi unicitate a soluţiei slabe a problemei Dirichlet, avem $0 = \Delta^{m-1}u = \Delta\left(\Delta^{m-2}u\right)$. Din aproape în aproape, se obţine în final $u = 0$.

Pentru completitudine, fie $(v_k)_{k\geq 1}$ un şir fundamental în X_m. Atunci şirul $(\Delta^m v_k)_{k\geq 1}$ este fundamental în $L^2(\Omega)$ şi deci convergent la un element $v^m \in L^2(\Omega)$. Pe baza Teoremei 3.13, există în mod unic funcţiile

$v^{m-1}, v^{m-2}, ..., v^0$ astfel încât $\Delta v^{j-1} = v^j$ pentru $j = m, m-1, ..., 1$. Este clar că $v^0 \in X_m$ şi $v_k \to v^0$ în X_m, pentru $k \to \infty$.

(b) Folosind egalitatea lui Parseval, este suficient să arătăm că

$$\left(\Delta^m u, \phi_j\right)_{L^2} = (-1)^m \lambda_j^m \left(u, \phi_j\right)_{L^2}.$$

Intr-adevăr

$$\begin{aligned}\left(\Delta^m u, \phi_j\right)_{L^2} &= -\left(\Delta^{m-1} u, \phi_j\right)_{H_0^1} = -\lambda_j \left(\Delta^{m-1} u, \phi_j\right)_{L^2} \\ &= \lambda_j \left(\Delta^{m-2} u, \phi_j\right)_{H_0^1} = ... = (-1)^m \lambda_j^m \left(u, \phi_j\right)_{L^2}.\end{aligned}$$

■

Lema 10.2 *Dacă* $f \in L^2\left(0, T; L^2(\Omega)\right)$ *şi* $g_0 \in H_0^1(\Omega)$, *atunci soluţia* u *a problemei* (10.15) *posedă în plus proprietatea*

$$u \in L^2(0, T; X_1).$$

Demonstraţie. Revenim la demonstraţia Teoremei 10.2. Folosind relaţiile

$$\begin{aligned}\left(s_m', \lambda_j \phi_j\right)_{L^2} &= \left(s_m', \phi_j\right)_{H_0^1} \\ \left(s_m, \lambda_j \phi_j\right)_{H_0^1} &= \left(-\Delta s_m, \lambda_j \phi_j\right)_{L^2} = \left(-\Delta s_m, -\Delta \phi_j\right)_{L^2} = \left(s_m, \phi_j\right)_{X_1} \\ \left(f, \lambda_j \phi_j\right)_{L^2} &= \left(f, -\Delta \phi_j\right)_{L^2}\end{aligned}$$

obţinem

$$\left(s_m'(t), s_m(t)\right)_{H_0^1} + |s_m(t)|_{X_1}^2 = (f(t), -\Delta s_m(t))_{L^2}$$

de unde

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|s_m|_{H_0^1}^2 + |s_m|_{X_1}^2 &= (f, -\Delta s_m)_{L^2} \\ &\le |f|_{L^2} |\Delta s_m|_{L^2} \\ &\le \frac{1}{2}\left(|f|_{L^2}^2 + |s_m|_{X_1}^2\right).\end{aligned}$$

Rezultă

$$\frac{d}{dt}|s_m|_{H_0^1}^2 + |s_m|_{X_1}^2 \le |f|_{L^2}^2.$$

Prin integrare se obţine

$$\begin{aligned}|s_m(t)|^2_{H^1_0} + \int_0^t |s_m(s)|^2_{X_1}\, ds &\le |s_m(0)|^2_{H^1_0} + \int_0^t |f(s)|^2_{L^2}\, ds \\ &\le |g_0|^2_{H^1_0} + \int_0^T |f(s)|^2_{L^2}\,.\end{aligned}$$

Aceasta implică mărginitea şirului (s_m) în $L^2(0,T;X_1)$. Ca la punctul b) din demonstraţia Teoremei 10.2, se obţine că $u \in L^2(0,T;X_1)$. ■

Are loc următorul rezultat de regularitate atât în t cât şi în x.

Teorema 10.3 *Fie* $p \in \mathbf{N}$ *şi* $g_0 \in H^1_0(\Omega)$. *Dacă* $g_0 \in X_p$ *şi* $f \in \bigcap_{k=0}^p H^k(0,T;X_{p-k})$, *atunci*

$$u \in \bigcap_{k=0}^{p} C^k([0,T];X_{p-k}) \cap L^2(0,T;X_{p+1})\,.$$

Demonstraţie. Raţionăm prin inducţie în raport cu p. Pentru $p=0$ se afirmă că dacă $g_0 \in H^1_0(\Omega)$ şi $f \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, atunci $u \in C\left([0,T];L^2(\Omega)\right) \cap L^2(0,T;X_1)$, ceea ce este adevărat pe baza Teoremei 10.2 şi a Lemei 10.2.

Presupunem rezultatul adevărat pentru p şi arătăm că el are loc şi pentru $p+1$. Fie $g_0 \in X_{p+1}$ şi $f \in \bigcap_{k=0}^{p+1} H^k(0,T;X_{p+1-k})$. Atunci $\widehat{g}_0 = \Delta g_0 + f(0) \in X_p$ iar $\widehat{f} = f' \in \bigcap_{k=0}^p H^k(0,T;X_{p-k})$. In consecinţă, soluţia $\widehat{u}$ a problemei corespunzătoare datelor $\widehat{g}_0$ şi $\widehat{f}$ are proprietatea

$$\widehat{u} \in \bigcap_{k=0}^{p} C^k([0,T];X_{p-k}) \cap L^2(0,T;X_{p+1})\,. \tag{10.17}$$

Fie

$$u(t) = g_0 + \int_0^t \widehat{u}(s)\, ds.$$

Din $\widehat{u} \in \bigcap_{k=0}^p C^k([0,T];X_{p-k})$ deducem

$$u \in \bigcap_{k=0}^{p} C^{k+1}([0,T];X_{p-k}) = \bigcap_{j=1}^{p+1} C^j([0,T];X_{p+1-j})$$

iar din $\widehat{u} \in L^2(0,T;X_{p+1})$ avem $u \in C([0,T];X_{p+1})$. Deci

$$u \in \bigcap_{k=0}^{p+1} C^k([0,T];X_{p+1-k}).$$

In final se constată că u este soluţia corespunzătoare datelor g_0 şi f, de unde

$$\Delta u = u' - f = \widehat{u} - f \in L^2(0,T;X_{p+1}).$$

Aşadar $u \in L^2(0,T;X_{p+2})$. ■

Vom încheia cu rezultate de regularitate pentru cazul ecuaţiei omogene a căldurii, adică pentru $f = 0$. Soluţia problemei este atunci

$$u(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t} g_0^j \phi_j, \quad t \in [0,T].$$

Am văzut deja că dacă $g_0 \in L^2(\Omega)$, atunci $u \in C\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$. Mai mult decât atât, avem următorul rezultat.

Teorema 10.4 I. (a) *Dacă $g_0 \in L^2(\Omega)$, atunci $u \in C^k((0,T];X_m)$ oricare ar fi $k,m \in \mathbf{N}$.*

(b) *Dacă $g_0 \in X_p$, atunci $u \in C^k([0,T];X_{p-k})$ pentru $0 \le k \le p$.*

(c) *Dacă $g_0 \in \bigcap_{p\in\mathbf{N}} X_p$, atunci $u \in C^\infty([0,T];X_p)$ pentru orice $p \in \mathbf{N}$.*

II. *Presupunem în plus că Ω este de clasă C^∞.*

(d) *Dacă $g_0 \in L^2(\Omega)$, atunci $u \in C^\infty(\overline{\Omega}\times[t_0,T])$ pentru $0 < t_0 < T$.*

(e) *Dacă $g_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ şi sunt satisfăcute condiţiile de compatibilitate*

$$g_0 = 0,\ \Delta^m g_0 = 0 \text{ pe } \partial\Omega,\ \text{pentru orice } m \in \mathbf{N}, \tag{10.18}$$

atunci $u \in C^\infty(\overline{\Omega} \times [0,T])$ (deci u este soluţie clasică).

Demonstraţie. (a) Avem de demonstrat că pentru orice l, seria derivată de ordinul l

$$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^l \lambda_j^l e^{-\lambda_j t} g_0^j \phi_j \tag{10.19}$$

este uniform convergentă în X_m pe orice subinterval $[t_0, T] \subset (0, T]$. De subliniat că funcţiile proprii ϕ_j aparţin tuturor spaţiilor X_m fiindcă

$$\Delta^m \phi_j = (-1)^m \lambda_j^m \phi_j, \quad m \in \mathbf{N}.$$

Pe baza acestei relaţii şi având în vedere expresia normei pe X_m dată de (10.16), convergenţa uniformă a seriei (10.19) de funcţii cu valori în X_m, revine la convergenţa uniformă a seriei de funcţii reale

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2(l+m)} e^{-2\lambda_j t} \left(g_0^j\right)^2. \tag{10.20}$$

Dar, pentru $t \geq t_0$, există $C = C(l, m, t_0) > 0$ astfel încât $\lambda_j^{2(l+m)} e^{-2\lambda_j t} \leq \lambda_j^{2(l+m)} e^{-2\lambda_j t_0} \leq C$, oricare ar fi $j \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$. Aşadar, seria de funcţii (10.20) este majorată de seria numerică convergentă

$$C \sum_{j=1}^{\infty} \left(g_0^j\right)^2 = C \left|g_0\right|_{L^2}^2.$$

(b) Pentru $m = p - k$ şi $l \leq k \leq p$, seria (10.20) se scrie astfel:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2(l-k)} e^{-2\lambda_j t} \left[\lambda_j^{2p} \left(g_0^j\right)^2\right].$$

Cum însă $\lambda_j^{2(l-k)} \leq \lambda_1^{2(l-k)}$ şi $e^{-2\lambda_j t} \leq 1$ pentru toţi $j \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ şi $t \geq 0$, această serie este majorată de seria numerică convergentă

$$\lambda_1^{2(l-k)} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{2p} \left(g_0^j\right)^2 = \lambda_1^{2(l-k)} \left|g_0\right|_{X_p}^2.$$

(c) Rezultă imediat din (b).

(d) Se aplică rezultatul de la punctul (a) şi se ţine seamă de faptul că dacă Ω este de clasă C^∞, atunci, în acord cu Teorema 8.2,

$$X_m \subset H^{2m}(\Omega) \subset C^k(\overline{\Omega}) \tag{10.21}$$

algebric şi topologic, oricare ar fi m şi k satisfăcând $2m > k + n/2$.

(e) Din $g_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ şi (10.18), pe baza Teoremei 7.3, deducem că $g_0 \in \bigcap_{p \in \mathbf{N}} X_p$. Apoi se aplică rezultatil de la punctul (c) şi se ţine cont de incluziunile (10.21). ■

Rezultatele de existenţă şi regularitate pot fi extinse pentru probleme mai generale de forma

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \sum\limits_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(x,t) & \text{pe } Q \\ u(x,0) = g_0(x) & \text{pe } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \Sigma. \end{cases}$$

Este evident că în acest caz λ_j şi ϕ_j vor fi valorile şi funcţiile proprii ale problemei Dirichlet pentru operatorul tare eliptic care înlocuieşte laplaceanul. De asemenea, în demonstraţii, spaţiile X_m vor fi redefinite corespunzător operatorului eliptic considerat.

10.4 Ecuaţia neliniară a căldurii

Problemei mixte Cauchy–Dirichlet

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f & \text{pe } Q \\ u(x,0) = 0 & \text{pe } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \Sigma \end{cases} \tag{10.22}$$

i se poate asocia, în conformitate cu Teorema 10.2 operatorul soluţie

$$S : L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right) \to L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right) \cap C\left([0,T];L^2(\Omega)\right),$$

definit prin: $Sf = u$, unde u este soluţia slabă a problemei (10.22). Teorema de estimare care urmează implică, pe de o parte, dependenţa continuă de f şi de g_0 a soluţiei u a problemei (10.15), iar pe de altă parte garantează neexpansivitatea operatorului soluţie S de la $L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$ în $L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$ şi de la $L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$ în $C\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$.

Teorema 10.5 *Fie $f \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$ şi $g_0 \in L^2(\Omega)$. Dacă u este soluţia problemei* (10.15), *atunci pentru orice $t \in [0,T]$ avem*

$$\begin{aligned} |u|_{C([0,t];L^2(\Omega))} &\leq \sqrt{2|g_0|^2 + |f|^2} \\ |u|_{L^2\left(0,t;H_0^1(\Omega)\right)} &\leq \frac{1}{2}\left(|f| + \sqrt{|f|^2 + 2|g_0|^2}\right) \end{aligned}$$

unde $|f| = |f|_{L^2(0,t;H^{-1}(\Omega))}$ iar $|g_0| = |g_0|_{L^2(\Omega)}$.

In particular, pentru $g_0 = 0$ *şi* $t \in [0, T]$, *au loc inegalităţile*

$$\begin{aligned} |u|_{C([0,t];L^2(\Omega))} &\leq |f|_{L^2(0,t;H^{-1}(\Omega))} \\ |u|_{L^2\left(0,t;H_0^1(\Omega)\right)} &\leq |f|_{L^2(0,t;H^{-1}(\Omega))}. \end{aligned} \tag{10.23}$$

Demonstraţie. Prima inegalitate este chiar relaţia (10.8). Pentru cea de a doua, să observăm că din (10.11) rezultă că

$$|s_m|_{L^2\left(0,t;H_0^1(\Omega)\right)} \leq \frac{1}{2}\left(|f| + \sqrt{|f|^2 + 2\,|g_0|^2}\right)$$

de unde

$$|s_m^c|_{L^2\left(0,t;H_0^1(\Omega)\right)} \leq \frac{1}{2}\left(|f| + \sqrt{|f|^2 + 2\,|g_0|^2}\right).$$

Trecând la limită cu $m \to \infty$ obţinem inegalitatea dorită. ■

Să considerăm acum problema neliniară

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = \Phi(u) & \text{pe } Q \\ u(x,0) = g_0(x) & \text{pe } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \Sigma. \end{cases} \tag{10.24}$$

Are loc următorul principiu de existenţă ce rezultă din teorema de punct fix a lui Banach.

Teorema 10.6 *Fie* $g_0 \in L^2(\Omega)$ *şi*

$$\Phi : C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right) \to L^2\left(0,T; H^{-1}(\Omega)\right)$$

o aplicaţie pentru care există o constantă $a \in \mathbf{R}_+$ *astfel încât inegalitatea următoare are loc oricare ar fi* $u, v \in C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right)$

$$|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)|_{H^{-1}(\Omega)} \leq a\,|u(t) - v(t)|_{L^2(\Omega)} \quad a.p.t.\ t \in [0,T].$$

Atunci există o unică soluţie u a problemei (10.24), *adică o funcţie*

$$u \in L^2\left(0,T; H_0^1(\Omega)\right) \cap C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right)$$

cu proprietatea că pentru orice $v \in H_0^1(\Omega)$ *funcţia* $(u(t), v)_{L^2}$ *este absolut continuă pe* $[0,T]$ *şi*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(u(t), v) + (u(t), v)_{H_0^1} = (\Phi(u)(t), v) \quad a.p.t.\ t \in [0,T] \\ u(0) = g_0. \end{cases}$$

Demonstraţie. Fie u_0 soluţia problemei (10.24) corespunzătoare lui $\Phi = 0$. Avem de rezolvat problema de punct fix

$$u = u_0 + (S \circ \Phi)(u), \quad u \in C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right).$$

Concluzia va rezulta din teorema de punct fix a lui Banach dacă vom arăta că operatorul

$$A : C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right) \to C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right), \quad A(u) = u_0 + (S \circ \Phi)(u)$$

este o contracţie în raport cu o normă convenabil aleasă pe spaţiul $C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right)$. Fie $u, v \in C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right)$. Folosind Teorema 10.5 deducem

$$\begin{aligned} |A(u)(t) - A(v)(t)|_{L^2}^2 &\leq \int_0^t |\Phi(u)(s) - \Phi(v)(s)|_{H^{-1}}^2 \, ds \\ &\leq a^2 \int_0^t |u(s) - v(s)|_{L^2}^2 \, ds. \end{aligned}$$

Fie $\theta > a^2/2$ un număr fixat. Considerăm norma pe $C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right)$

$$\|u\| = \max_{t \in [0,T]} \left(|u(t)|_{L^2(\Omega)} \, e^{-\theta t} \right).$$

Atunci

$$|A(u)(t) - A(v)(t)|_{L^2}^2 \leq a^2 \|u - v\|^2 \int_0^t e^{2\theta s} ds$$

$$\leq \frac{a^2}{2\theta} \|u - v\|^2 e^{2\theta t}.$$

Dacă se împarte la $e^{2\theta t}$ şi se ia maximul când $t \in [0,T]$ se obţine

$$\|A(u) - A(v)\| \leq \frac{a}{\sqrt{2\theta}} \|u - v\|.$$

Cum $a/\sqrt{2\theta} < 1$ operatorul A este o contracţie în raport cu norma $\|.\|$.
■

Exemple

1. Fie $\Psi : L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ o aplicaţie pentru care există o constantă $a \in \mathbf{R}_+$ cu proprietatea

$$|\Psi(u) - \Psi(v)|_{H^{-1}(\Omega)} \leq a \, |u - v|_{L^2(\Omega)}, \quad u, v \in L^2(\Omega). \tag{10.25}$$

Atunci aplicaţia $\Phi : C\left([0,T]\,; L^2(\Omega)\right) \to L^2\left(0,T; H^{-1}(\Omega)\right)$ definită prin

$$\Phi(u)(t) = \Psi(u(t)) \quad \left(u \in C\left([0,T]\,; L^2(\Omega)\right),\ t \in [0,T]\right)$$

satisface condiţiile Teoremei 10.6.

2. Fie $\psi : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie cu proprietatea că $\psi(.,\tau)$ este măsurabilă pentru orice $\tau \in \mathbf{R}$, $\psi(.,0) \in H^{-1}(\Omega)$ şi există $a_0 \in \mathbf{R}_+$ astfel că

$$|\psi(x,\tau_1) - \psi(x,\tau_2)| \le a_0\,|\tau_1 - \tau_2|$$

oricare ar fi $\tau_1, \tau_2 \in \mathbf{R}$, a.p.t. $x \in \Omega$.

Atunci operatorul $\Psi : L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ definit prin

$$\Psi(u) = \psi(., u(.))$$

satisface condiţiile din exemplul anterior.

Intr-adevăr, putem scrie

$$\Psi(u) = \psi(.,0) + \sigma(., u(.))$$

unde $\sigma(x,\tau) = \psi(x,\tau) - \psi(x,0)$. Se observă că funcţia σ se bucură de proprietatea $|\sigma(x,\tau)| \le a_0\,|\tau|$ $(\tau \in \mathbf{R}$, a.p.t. $x \in \Omega)$, de unde, pe baza Teoremei 9.1 rezultă că operatorul de superpoziţie $\sigma(., u(.))$ aplică $L^2(\Omega)$ în $L^2(\Omega)$ şi în plus $|\sigma(., u(.)) - \sigma(., v(.))|_{L^2(\Omega)} \le a_0\,|u - v|_{L^2(\Omega)}$. Scufundarea $L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ fiind continuă va exista o constantă $a \in \mathbf{R}_+$ astfel ca (10.25) să aibă loc.

Lemele care urmează pregătesc aplicarea principiului de punct fix al lui Schauder, mai exact demonstrarea complet continuităţii operatorului soluţie S.

Lema 10.3 (Ascoli–Arzèla) *Fie $(B, |.|_B)$ un spaţiu Banach. O submulţime F a lui $C(0,T;B)$ este relativ compactă dacă şi numai dacă $F(t) = \{f(t) : f \in F\}$ este relativ compactă în B pentru orice $t \in [0,T]$ şi F este echicontinuă, adică pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât $|f(t_1) - f(t_2)|_B \le \varepsilon$ oricare ar fi $f \in F$ şi $t_1, t_2 \in [0,T]$ cu $|t_1 - t_2| \le \delta$.*

Pentru demonstraţie a se vedea O'Regan–Precup [35, p. 72].

Lema 10.4 (Lions) *Fie X, B şi Y spaţii Banach astfel încât au loc scufundările:*

$$X \subset B \ \ \textit{compactă şi} \ \ B \subset Y \ \ \textit{continuă.}$$

Atunci, pentru orice $\eta > 0$ *există* $N \geq 0$ *astfel ca*

$$|u|_B \leq \eta\, |u|_X + N\, |u|_Y \quad \text{pentru orice } u \in X. \tag{10.26}$$

Demonstraţie. Pentru orice $n \in \mathbf{N}$, considerăm mulţimea $U_n = \{u \in B : |u|_B < \eta + n\, |u|_Y\}$. Mulţimile U_n sunt deschise în B, $U_n \subset U_{n+1}$ şi $B = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} U_n$. Sfera unitate Σ a lui X fiind relativ compactă în B, există un N astfel ca $\Sigma \subset U_N$. Deci $|v|_B < \eta\, |v|_X + N\, |v|_Y$ pentru orice $v \in X$ cu $|v|_X = 1$. Inegalitatea pentru un $u \in X$ oarecare se deduce imediat dacă se ia $v = u/\, |u|_X$. ■

Lema 10.5 *Fie* X, B *şi* Y *ca în Lema* 10.4. *Dacă mulţimea* F *este mărginită în* $L^p(0,T;X)$ *şi relativ compactă în* $L^p(0,T;Y)$, *unde* $1 \leq p \leq \infty$, *atunci* F *este relativ compactă în* $L^p(0,T;B)$.

Demonstraţie. Pentru un $\varepsilon > 0$ dat, există o submulţime $\{f_j\}$ a lui F astfel încât pentru orice $f \in F$, există un f_j cu $|f - f_j|_{L^p(0,T;Y)} \leq \varepsilon$. Inegalitatea (10.26) implică

$$\begin{aligned} |f - f_j|_{L^p(0,T;B)} &\leq \eta\, |f - f_j|_{L^p(0,T;X)} + N\, |f - f_j|_{L^p(0,T;Y)} \\ &\leq \eta\, c + N\varepsilon \end{aligned}$$

unde c este diametrul lui F în $L^p(0,T;X)$. Pentru un $\varepsilon' > 0$ oarecare, dacă alegem $\eta = \varepsilon'/\,(2c)$ şi $\varepsilon = \varepsilon'/\,(2N)$, obţinem $|f - f_j|_{L^p(0,T;B)} \leq \varepsilon$. Aceasta garantează faptul că F este relativ compactă în $L^p(0,T;B)$. ■

Teorema 10.7 *Operatorul soluţie* S *este complet continuu de la* $L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$ *în* $L^2(0,T;L^p(\Omega))$ *pentru* $(2^*)' \leq p < 2^*$ *dacă* $n \geq 3$ *şi pentru orice* $p \geq 1$ *dacă* $n = 1$ *sau* $n = 2$.

Demonstraţie. In condiţiile asupra lui p avem $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$, unde prima scufundare este compactă iar cea de a doua este continuă. Conform Lemei 10.5 este suficient să ne convingem că pentru orice submulţime mărginită M a lui $L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$, $S(M)$ este mărginită în $L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)$ (ceea ce este adevărat pe baza Teoremei 10.5) şi relativ compactă în $L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$. Vom demonstra mai mult, anume că $S(M)$ este relativ compactă în $C\left([0,T];H^{-1}(\Omega)\right)$. Din (10.23) vedem că $S(M)$ este mărginită în $C\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$. Atunci, pentru orice $t \in [0,T]$, mulţimea $S(M)(t)$ este mărginită în $L^2(\Omega)$ şi deci relativ compactă în $H^{-1}(\Omega)$. Rămâne să ne convingem că $S(M)$ este echicontinuă în $C\left([0,T];H^{-1}(\Omega)\right)$.

Pentru început să observăm că $S(M)' = \{u' : u \in S(M)\}$ este mărginită în $L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$. Intr-adevăr, dacă $u = S(f)$, $f \in M$, atunci $u'(t) = \Delta u(t) + f(t)$, de unde $|u'(t)|_{H^{-1}} \leq |\Delta u(t)|_{H^{-1}} + |f(t)|_{H^{-1}}$. Cum însă Δ este o izometrie între spaţiile $H_0^1(\Omega)$ şi $H^{-1}(\Omega)$, avem $|\Delta u(t)|_{H^{-1}} = |u(t)|_{H_0^1}$. Atunci

$$\begin{aligned} |u'|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} &\leq |u|_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} + |f|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \\ &\leq 2\,|f|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \end{aligned}$$

de unde mărginirea lui $S(M)'$ în $L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$.

Mai departe, din

$$u(t_1) - u(t_2) = \int_{t_2}^{t_1} u'(s)\,ds$$

deducem

$$|u(t_1) - u(t_2)|_{H^{-1}} \leq \left|\int_{t_2}^{t_1} \left|u'(s)\right|_{H^{-1}} ds\right| \leq \sqrt{|t_1 - t_2|}\,\left|u'\right|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}$$

de unde rezultă echicontinuitatea lui $S(M)$ în $C\left([0,T];H^{-1}(\Omega)\right)$. ■

Cititorul interesat de rezultatele de compacitate pentru spaţiile $L^p(0,T;B)$ este îndemnat să citească excelentul articol al lui J. Simon, *Compact sets in the space* $L^p(0,T;B)$, Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique, Vol. 4, fasc. 4, 1985; şi *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) **146** (1987), 65-96.

Are loc următorul principiu de existenţă ce rezultă din teorema de punct fix a lui Schauder. Condiţia Lipschitz asupra termenului neliniar Φ este slabită până la o condiţie de creştere cel mult liniară.

Teorema 10.8 *Fie $g_0 \in L^2(\Omega)$ şi*

$$\Phi : L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \to L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$$

o aplicaţie continuă pentru care există o constantă $a \in \mathbf{R}_+$ astfel încât inegalitatea următoare are loc oricare ar fi $u \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$

$$|\Phi(u)(t) - \Phi(0)(t)|_{H^{-1}} \leq a\,|u(t)|_{L^2}\,, \quad a.p.t.\ t \in [0,T]\,.$$

Atunci există cel puţin o soluţie a problemei (10.24).

Demonstraţie. Ne interesează un punct fix pentru operatorul

$$A : L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \to L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \quad A(u) = u_0 + (S\circ\Phi)(u).$$

Teorema 10.7 şi faptul că Φ este un operator mărginit, garantează complet continuitatea lui A. Rămâne să arătăm că există o submulţime D mărginită, închisă şi convexă a lui $L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ invariantă pentru A.

Fie $u \in C\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$. Ca în demonstraţia Teoremei 10.6, pentru $\theta > a^2/2$ se obţine

$$\|A(u) - A(0)\| \leq \frac{a}{\sqrt{2\theta}}\|u\|.$$

Rezultă

$$\|A(u)\| \leq \|A(0)\| + \frac{a}{\sqrt{2\theta}}\|u\|.$$

Alegând $\theta > a^2/2$ şi un număr pozitiv $R \geq \|A(0)\| / \left(1 - a/\sqrt{2\theta}\right)$ deducem că A invariază mulţimea $D_0 = \{u \in C\left([0,T];L^2(\Omega)\right) : \|u\| \leq R\}$. Fie D închiderea lui D_0 în $L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$. Este clar că D este o submulţime nevidă, convexă, închisă şi mărginită a lui $L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$. In plus, folosind continuitatea lui A de la spaţiul $L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$ în el însuşi, se constată imediat că A invariază pe D. Teorema de punct fix a lui Schauder poate fi acum aplicată. ■

Exemple

1. Fie $\Psi : L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ o aplicaţie continuă pentru care există o constantă $a \in \mathbf{R}_+$ cu proprietatea

$$|\Psi(u) - \Psi(0)|_{H^{-1}} \leq a\,|u|_{L^2}, \quad u \in L^2(\Omega). \tag{10.27}$$

Atunci aplicaţia $\Phi : L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \to L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$ definită prin

$$\Phi(u)(t) = \Psi(u(t)) \quad \left(u \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right),\ t \in [0,T]\right)$$

satisface condiţiile Teoremei 10.8.

2. Fie $\psi : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie cu proprietatea că $\psi(.,\tau)$ este măsurabilă pentru orice $\tau \in \mathbf{R}$, $\psi(x,.)$ este continuă a.p.t. $x \in \Omega$, $\psi(.,0) \in H^{-1}(\Omega)$ şi există $a_0 \in \mathbf{R}_+$ astfel că

$$|\psi(x,\tau) - \psi(x,0)| \leq a_0\,|\tau|$$

oricare ar fi $\tau \in \mathbf{R}$, a.p.t. $x \in \Omega$.

Atunci operatorul $\Psi : L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ definit prin

$$\Psi(u) = \psi(., u(.))$$

satisface condiţiile din exemplul anterior.

Incheiem cu un rezultat referitor la o problemă superliniară.

Teorema 10.9 *Fie* $n \geq 3$, $g_0 \in L^2(\Omega)$, $f \in H^{-1}(\Omega)$ *şi* $\psi : \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *o funcţie cu proprietatea că* $\psi(., u)$ *este măsurabilă pentru orice* $u \in \mathbf{R}$, $\psi(x, .)$ *este continuă a.p.t.* $x \in \Omega$, $\psi(., 0) = 0$ *şi există* $a, \alpha \in \mathbf{R}_+$ *cu* $1 \leq \alpha < 2^* - 1$ *astfel că*

$$|\psi(x, u)| \leq a\,|u|^a \tag{10.28}$$

oricare ar fi $u \in \mathbf{R}$, *a.p.t.* $x \in \Omega$. *In plus presupunem că*

$$u\,\psi(x, u) \leq 0 \tag{10.29}$$

pentru orice $u \in \mathbf{R}$, *a.p.t.* $x \in \Omega$. *Atunci există cel puţin o soluţie a problemei* (10.24), *unde* $\Phi(u)(t) = \psi(., u(t)) + f$

Demonstraţie. Fie $p = \alpha(2^*)'$. Din $1 \leq \alpha < 2^* - 1 = 2^*/(2^*)'$ rezultă $(2^*)' \leq p < 2^*$. Atunci Teorema 10.7 garantează că operatorul S este complet continuu de la $L^2\left(0, T; H^{-1}(\Omega)\right)$ în $L^2(0, T; L^p(\Omega))$. Ne interesează un punct fix pentru operatorul

$$A : L^2(0, T; L^p(\Omega)) \to L^2(0, T; L^p(\Omega)), \quad A(u) = u_0 + (S \circ \Phi)(u).$$

Să observăm că $A(u) = u_0 + S(f) + S(\Phi_0(u))$, unde $\Phi_0(u)(t) = N_\psi(u(t))$ iar N_ψ este operatorul de superpoziţie asociat lui ψ. Ipoteza (10.28) garantează via Teorema 9.1 faptul că operatorul N_ψ este bine definit, continuu şi mărginit de la $L^p(\Omega)$ în $L^{(2^*)'}(\Omega)$ şi $|N_\psi(v)|_{L^{(2^*)'}} \leq a\,|v|_{L^p}^\alpha$. Deducem că operatorul Φ_0 este bine definit, continuu şi mărginit de la $L^2(0, T; L^p(\Omega))$ în $L^2\left(0, T; L^{(2^*)'}(\Omega)\right)$ şi în consecinţă, de la $L^2(0, T; L^p(\Omega))$ în $L^2\left(0, T; H^{-1}(\Omega)\right)$. Aşadar A este complet continuu.

Mai departe vom arăta că există $R > 0$ astfel ca $|u|_{L^2(0,T;L^p(\Omega))} < R$ oricare ar fi u o soluţie a ecuaţiei $u = \lambda A(u)$ şi $\lambda \in (0, 1)$.

Intr-adevăr, dacă $u = \lambda A(u)$, atunci din (10.14) deducem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|u(t)|_{L^2}^2 + |u(t)|_{H_0^1}^2 &= \lambda(\psi(.,u(t)) + f,\, u(t)) \\ &\leq \lambda(f, u(t)) \\ &\leq |f|_{L^{(2^*)'}}\, |u(t)|_{L^{2^*}} \\ &\leq c\,|u(t)|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

Integrând obţinem

$$\int_0^T |u(t)|_{H_0^1}^2\, dt \leq c' \left(\int_0^T |u(t)|_{H_0^1}^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} + c''$$

unde constantele c' şi c'' nu depind de u şi λ. Deci $|u|_{L^2\left(0,T;H_0^1(\Omega)\right)} \leq C$, de unde, fiindcă $H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$, se obţine imediat o estimare de tipul $|u|_{L^2(0,T;L^p(\Omega))} < R$.

Concluzia rezultă acum pe baza principiului lui Leray–Schauder. ■

Exemplu

Funcţia $\psi(x,u) = -|u|^{\alpha-1} u$ $(u \in \mathbf{R})$ unde $1 \leq \alpha < 2^* - 1$ satisface condiţiile Teoremei 10.9.

10.5 Ecuaţia neomogenă a undelor în $H^{-1}(\Omega)$

Generalizarea Teoremei 4.5 pentru funcţii f cu valori în $H^{-1}(\Omega)$ este următorul rezultat conţinut în monografia Lions–Magenes [27, p. 311].

Teorema 10.10 (Lions–Magenes) *Dacă* $f \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$, $g_0 \in L^2(\Omega)$ *şi* $g_1 \in H^{-1}(\Omega)$, *atunci există o unică funcţie* u *astfel încât*

$$\begin{aligned} u &\in C\left([0,T];L^2(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T];H^{-1}(\Omega)\right) \\ u(0) &= g_0,\ \ u'(0) = g_1 \end{aligned}$$

$$\int_0^T (u,h)_{L^2(\Omega)}\, dt = \int_0^T (f,v)\, dt + (g_1, v(0)) - \left(g_0, v'(0)\right)_{L^2(\Omega)} \tag{10.30}$$

pentru orice funcţie $h \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, *unde* $v \in C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$ *este soluţia problemei*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v = h & \textit{pe } Q \\ v(x,T) = \frac{\partial v}{\partial t}(x,T) = 0 & \textit{pe } \Omega \\ v = 0 & \textit{pe } \Sigma. \end{cases} \tag{10.31}$$

a cărei existenţă este garantată de Teorema 4.5.

Demonstraţie. Se caută soluţia sub forma

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t)\,\phi_k \tag{10.32}$$

unde

$$\begin{aligned} u_k(t) &= g_0^k \cos\sqrt{\lambda_k}t + \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} g_1^k \sin\sqrt{\lambda_k}t \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t f_k(s) \sin\sqrt{\lambda_k}(t-s)\,ds, \end{aligned}$$

$f_k(t) = (f(t), \phi_k)$, $g_0^k = (g_0, \phi_k)_{L^2}$ şi $g_1^k = (g_1, \phi_k)$. Să considerăm sumele parţiale ale seriei (10.32), adică

$$s_m(t) = \sum_{k=1}^{m} u_k(t)\,\phi_k.$$

Fie de asemenea

$$\begin{aligned} g_{0m} &= \sum_{k=1}^{m} g_0^k \phi_k, \quad g_{1m} = \sum_{k=1}^{m} g_1^k \phi_k \\ f^m(t) &= \sum_{k=1}^{m} \left(f(t), \phi_j\right) \phi_j. \end{aligned}$$

Pentru a demonstra că $u \in C\left([0,T]; L^2(\Omega)\right)$ şi $u' \in C\left([0,T]; H^{-1}(\Omega)\right)$, vom arăta că şirurile $(s_m(t))$ şi $(s'_m(t))$ converg în $L^2(\Omega)$, respectiv $H^{-1}(\Omega)$, uniform în raport cu $t \in [0,T]$. Pentru aceasta să notăm

$$\begin{aligned} s_{mp}(t) &= s_{m+p}(t) - s_m(t) \\ f^{mp}(t) &= f^{m+p}(t) - f^m(t) \\ g_{0mp} &= g_{0(m+p)} - g_{0m} \\ g_{1mp} &= g_{1(m+p)} - g_{1m}. \end{aligned}$$

Facem convenţia că $s_{0p} = s_p$, $f^{0p} = f^p$, $g_{00} = 0$ şi $g_{10} = 0$. Avem $s_{mp} \in C^1\left([0,T]; H_0^1(\Omega)\right)$, $s''_{mp} \in L^2\left(0,T; H_0^1(\Omega)\right)$ şi

$$\begin{cases} s''_{mp} - \Delta s_{mp} = f^{mp} \\ s_{mp}(0) = g_{0mp},\ s'_{mp}(0) = g_{1mp}. \end{cases} \tag{10.33}$$

In (10.33), efectuând produsul scalar în $L^2(\Omega)$, cu $(-\Delta)^{-1} s'_{mp}(t)$ obţinem

$$\left(s''_{mp}, (-\Delta)^{-1} s'_{mp}\right)_{L^2} + \left(-\Delta s_{mp}, (-\Delta)^{-1} s'_{mp}\right)_{L^2} = \left(f^{mp}, (-\Delta)^{-1} s'_{mp}\right)_{L^2}.$$

Cum însă

$$\begin{aligned}\left(s''_{mp}, (-\Delta)^{-1} s'_{mp}\right)_{L^2} &= \left((-\Delta)^{-1} s''_{mp}, (-\Delta)^{-1} s'_{mp}\right)_{H_0^1} \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|(-\Delta)^{-1} s'_{mp}\right|^2_{H_0^1} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|s'_{mp}\right|^2_{H^{-1}}\end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned}\left(-\Delta s_{mp}, (-\Delta)^{-1} s'_{mp}\right)_{L^2} &= \left(s_{mp}, (-\Delta)^{-1} s'_{mp}\right)_{H_0^1} \\ &= \left(s_{mp}, s'_{mp}\right)_{L^2} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|s_{mp}\right|^2_{L^2}\end{aligned}$$

deducem că

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\left|s'_{mp}\right|^2_{H^{-1}} + \left|s_{mp}\right|^2_{L^2}\right) = \left(f^{mp}, (-\Delta)^{-1} s'_{mp}\right)_{L^2}. \tag{10.34}$$

Integrând găsim

$$\begin{aligned}&\left|s'_{mp}(t)\right|^2_{H^{-1}} + \left|s_{mp}(t)\right|^2_{L^2} \\ =\ &\left|g_{1mp}\right|^2_{H^{-1}} + \left|g_{0mp}\right|^2_{L^2} + 2\int_0^t \left(f^{mp}(\tau), (-\Delta)^{-1} s'_{mp}(\tau)\right)_{L^2} d\tau.\end{aligned}$$

Folosind $|g_{0m}|_{L^2} \le |g_0|_{L^2}$, $|g_{1m}|_{H^{-1}} \le |g_1|_{H^{-1}}$, deducem

$$\begin{aligned}&\left|s'_{mp}(t)\right|^2_{H^{-1}} + \left|s_{mp}(t)\right|^2_{L^2} \\ \le\ &\left|g_{1mp}\right|^2_{H^{-1}} + \left|g_{0mp}\right|^2_{L^2} + 2\int_0^t \left|f^{mp}\right|_{H^{-1}} \left|(-\Delta)^{-1} s'_{mp}\right|_{H_0^1} d\tau \\ =\ &\left|g_{1mp}\right|^2_{H^{-1}} + \left|g_{0mp}\right|^2_{L^2} + 2\int_0^t \left|f^{mp}\right|_{H^{-1}} \left|s'_{mp}\right|_{H^{-1}} d\tau \\ \le\ &\left|g_{1mp}\right|^2_{H^{-1}} + \left|g_{0mp}\right|^2_{L^2} + 2\left|f^{mp}\right|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\left(\int_0^t \left|s'_{mp}\right|^2_{H^{-1}} d\tau\right)^{1/2}.\end{aligned} \tag{10.35}$$

Rezultă că

$$\begin{aligned}\left|s'_{mp}(t)\right|^2_{H^{-1}} \le\ &\left|g_{1mp}\right|^2_{H^{-1}} + \left|g_{0mp}\right|^2_{L^2} \\ &+2\left|f^{mp}\right|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\left(\int_0^t \left|s'_{mp}\right|^2_{H^{-1}} d\tau\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Notăm

$$\varphi(t) = \left|s'_{mp}(t)\right|^2_{H^{-1}}, \ a = |g_{1mp}|^2_{H^{-1}} + |g_{0mp}|^2_{L^2}, \ b = 2\,|f^{mp}|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}.$$

Deci

$$\varphi(t) \le a + b\left(\int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau\right)^{1/2}.$$

Rezultă că

$$\varphi(t)^2 \le 2\left(a^2 + b^2\int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau\right) =: \psi(t).$$

Avem

$$\psi'(t) = 2b^2\varphi(t) \le 2b^2\sqrt{\psi(t)}$$

de unde, prin integrare,

$$\sqrt{\psi(t)} \le \sqrt{\psi(0)} + b^2T = a\sqrt{2} + b^2T.$$

Deci

$$\left|s'_{mp}(t)\right|^2_{H^{-1}} \le \left(|g_{1mp}|^2_{H^{-1}} + |g_{0mp}|^2_{L^2}\right)\sqrt{2} + 4T\,|f^{mp}|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}.$$

Aceasta împreună cu (10.35) conduce la concluzia că există o constantă c depinzând numai de T astfel ca

$$|s_{mp}(t)|^2_{L^2} + \left|s'_{mp}(t)\right|^2_{H^{-1}} \le c\left(|g_{1mp}|^2_{H^{-1}} + |g_{0mp}|^2_{L^2} + |f^{mp}|^2_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\right) \tag{10.36}$$

Concluzia rezultă acum dacă se ţine seamă de

$$g_{0m} \to g_0 \text{ în } L^2(\Omega), \ g_{1m} \to g_1 \text{ în } H^{-1}(\Omega), \ f^m \to f \text{ în } L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$$

(vezi Teorema 10.1). Fie $u \in C\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$ limita şirului (s_m) şi $v \in C\left([0,T];H^{-1}(\Omega)\right)$ limita şirului (s'_m). Din

$$(s_m(t), w)_{L^2} = (g_{0m}, w)_{L^2} + \int_0^t \left(s'_m(\tau), w\right)d\tau, \ w \in H_0^1(\Omega),$$

prin trecere la limită, obţinem

$$(u(t), w)_{L^2} = (g_0, w)_{L^2} + \int_0^t (v(\tau), w)\, d\tau.$$

Deci $v = u'$. Trecând la limită în (10.36) cu $p \to \infty$ şi $m = 0$, obţinem

$$|u(t)|_{L^2}^2 + |u'(t)|_{H^{-1}}^2 \leq c\left(|g_1|_{H^{-1}}^2 + |g_0|_{L^2}^2 + |f|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}^2\right). \tag{10.37}$$

Mai departe, pentru un cuplu $[h, v]$ ca în enunţ, din (10.33) se obţine

$$\begin{aligned} &\int_0^T (s_m, h)_{L^2(\Omega)}\, dt \\ = &\int_0^T (f^m, v)\, dt + (g_{1m}, v(0)) - \left(g_{0m}, v'(0)\right)_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

din care, trecând la limită, se deduce (10.30).

In final, pentru unicitate, să presupunem că u_1 şi u_2 posedă toate proprietăţile din Teorema 10.10. Atunci pentru $h = u = u_1 - u_2$ avem

$$\int_0^T |u|_{L^2}^2\, dt = 0,$$

de unde $u = 0$. De notat că unicitatea poate fi stabilită şi folosind inegalitatea (10.37). ■

Definiţia 10.2 Numim *soluţie* (slabă sau generalizată) a problemei Cauchy–Dirichlet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = f & \text{pe } Q \\ u(x, 0) = g_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g_1(x) & \text{pe } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \Sigma \end{cases} \tag{10.38}$$

pentru $f \in L^2\left(0, T; H^{-1}(\Omega)\right)$, $g_0 \in L^2(\Omega)$ *şi* $g_1 \in H^{-1}(\Omega)$, funcţia u definită în Teorema 10.10.

Observaţia 10.3 Dacă $f \in L^2\left(0, T; H^{-1}(\Omega)\right)$, $g_0 \in H_0^1(\Omega)$ şi $g_1 \in L^2(\Omega)$, atunci soluţia slabă u a problemei (10.38) satisface:

$$u \in C\left([0, T]; H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0, T]; L^2(\Omega)\right)$$

$$\begin{aligned}
|u(t)|_{H_0^1}^2 &\leq 3\left(|g_0|_{H_0^1}^2+|g_1|_{L^2}^2+t\int_0^t|f(s)|_{H^{-1}}^2\,ds\right) \quad (10.39)\\
\left|u'(t)\right|_{L^2}^2 &\leq 3\left(|g_0|_{H_0^1}^2+|g_1|_{L^2}^2+t\int_0^t|f(s)|_{H^{-1}}^2\,ds\right).
\end{aligned}$$

Este suficient să se constate că în lumina Teoremei 10.1, argumentele folosite la paşii a) şi b) din demonstraţia Teoremei 4.5 rămân valabile. Estimările (10.39) se deduc imediat din formulele (4.22) şi (4.23) din Secţiunea 4.4.

10.6 Perturbaţii neliniare ale ecuaţiei undelor

In acord cu Teorema 10.10 şi cu Observaţia 10.3, problemei Cauchy–Dirichlet

$$\begin{cases}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\Delta u=f & pe\ Q\\
u(x,0)=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0 & pe\ \Omega\\
u=0 & pe\ \Sigma
\end{cases}$$

i se poate asocia operatorii

$$\begin{aligned}
S_0 &: L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)\to C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)\cap C^1\left([0,T];L^2(\Omega)\right)\\
S &: L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)\to C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\right)\\
S_0 f &= u,\ \ Sf=\left[u,u'\right]
\end{aligned}$$

unde

$$u(t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\,\phi_k$$

$$u_k(t)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_0^t f_k(s)\sin\sqrt{\lambda_k}\,(t-s)\,ds.$$

Teorema care urmează exprimă, pe de o parte, dependenţa continuă de date a soluţiei problemei Cauchy–Dirichlet pentru ecuaţia undelor, iar pe de altă parte, implică faptul că operatorul liniar S este continuu de la $L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$ în $C\left([0,T];L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)\right)$.

Teorema 10.11 *Fie* $f \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$, $g_0 \in L^2(\Omega)$ *şi* $g_1 \in H^{-1}(\Omega)$. *Dacă* u *este soluţia problemei* (10.38), *atunci pentru orice* $t \in [0,T]$, *avem*

$$|u|^2_{C([0,t];L^2(\Omega))} + |u'|^2_{C([0,t];H^{-1}(\Omega))} \tag{10.40}$$

$$\leq c\left(|g_0|^2_{L^2} + |g_1|^2_{H^{-1}} + |f|^2_{L^2(0,t;H^{-1}(\Omega))}\right) \tag{10.41}$$

unde c *este o constantă ce depinde numai de* T.

Demonstraţie. Rezultatul este o consecinţă directă a inegalităţii (10.37) care se aplică fiecărui subinterval $[0,t]$ al lui $[0,T]$. ■

Considerăm acum problema neliniară

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = \Phi\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) & \text{pe } Q \\ u(x,0) = g_0(x), \ \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g_1(x) & \text{pe } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \Sigma. \end{cases} \tag{10.42}$$

In cele ce urmează vom nota cu F_0 şi F spaţiile $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ şi $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ înzestrate cu normele

$$|w|_{F_0} = \left(|u|^2_{H_0^1(\Omega)} + |v|^2_{L^2(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$|w|_F = \left(|u|^2_{L^2(\Omega)} + |v|^2_{H^{-1}(\Omega)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

puntru $w = [u,v]$.

Rezultatul care urmează se deduce din teorema de punct fix a lui Banach şi este analogul Teoremei 10.6.

Teorema 10.12 *Fie* $g_0 \in L^2(\Omega)$, $g_1 \in H^{-1}(\Omega)$ *şi*

$$\Phi : C([0,T];F) \to L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$$

o aplicaţie pentru care există o constantă $a \in \mathbf{R}_+$ *astfel încât următoarea inegalitate este adevărată oricare ar fi* $u,v \in C([0,T];F)$

$$|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)|_{H^{-1}(\Omega)} \leq a\,|u(t) - v(t)|_F \quad a.p.t. \ t \in [0,T].$$

Atunci există o unică soluţie u a problemei (10.42), *adică*

$$u \in C\left([0,T];L^2(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T];H^{-1}(\Omega)\right),\ u(0)=g_0,\ u'(0)=g_1,$$

$$\begin{aligned}\int_0^T (u,h)_{L^2(\Omega)}\,dt &= \int_0^T \left(\Phi\left(u,u'\right),v\right)dt \\ &+ (g_1, v(0)) - \left(g_0, v'(0)\right)_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

pentru orice funcţie $h \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, *unde* $v \in C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)$ $\cap C^1\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$ *este soluţia problemei* (10.31).

Demonstraţie. Fie u_0 soluţia problemei (10.42) corespunzătoare lui $\Phi = 0$ şi fie $w_0 = [u_0, u_0']$. Avem de rezolvat problema de punct fix

$$w = w_0 + (S \circ \Phi)(w),\ \ w \in C([0,T];F).$$

Concluzia va rezulta din teorema de punct fix a lui Banach dacă vom arăta că operatorul

$$A : C([0,T];F) \to C([0,T];F),\ \ A(w) = w_0 + (S\circ\Phi)(w)$$

este o contracţie în raport cu o normă convenabil aleasă pe spaţiul $C([0,T];F)$. Fie $w_1, w_2 \in C([0,T];F)$. Aplicăm (10.41) lui $f := \Phi(w_1)$ $-\Phi(w_2)$. Atunci

$$\begin{aligned}|A(w_1)(t) - A(w_2)(t)|_F^2 &\leq c\int_0^t |\Phi(w_1)(s) - \Phi(w_2)(s)|_{H^{-1}(\Omega)}^2\,ds \\ &\leq ca^2\int_0^t |w_1(s) - w_2(s)|_F^2\,ds.\end{aligned}$$

Fie $\theta > ca^2/2$ un număr fixat. Consideră norma pe $C([0,T];F)$

$$\|w\| = \max_{t\in[0,T]}\left|e^{-\theta t}w(t)\right|_F.$$

Atunci

$$\begin{aligned}|A(w_1)(t) - A(w_2)(t)|_F^2 &\leq ca^2\|w_1 - w_2\|^2\int_0^t e^{2\theta s}ds \\ &= \frac{ca^2}{2\theta}\|w_1 - w_2\|^2 e^{2\theta t}\end{aligned}$$

de unde se obţine

$$\|A(w_1) - A(w_2)\| \leq \sqrt{\frac{ca^2}{2\theta}} \|w_1 - w_2\|.$$

Cum $\sqrt{\frac{ca^2}{2\theta}} < 1$ operatorul A este o contracţie în raport cu norma $\|.\|$.
■

Exemple

1. Fie $\Psi : F \to H^{-1}(\Omega)$ o aplicaţie pentru care există o constantă $a \in \mathbf{R}_+$ cu proprietatea

$$|\Psi(w_1) - \Psi(w_2)|_{H^{-1}(\Omega)} \leq a |w_1 - w_2|_F, \quad w_1, w_2 \in F. \tag{10.43}$$

Atunci aplicaţia $\Phi : C([0,T]; F) \to L^2\left(0, T; H^{-1}(\Omega)\right)$ definită prin

$$\Phi(w)(t) = \Psi(w(t)) \quad (w \in C([0,T]; F), \ t \in [0,T])$$

satisface condiţiile Teoremei 10.12.

2. Fie $\psi : \Omega \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ o funcţie cu proprietatea că $\psi(., \tau)$ este măsurabilă pentru orice $\tau \in \mathbf{R}^2$, $\psi(., 0) \in H^{-1}(\Omega)$ şi există $a_0 \in \mathbf{R}_+$ astfel că

$$|\psi(x, \tau_1) - \psi(x, \tau_2)| \leq a_0 |\tau_1 - \tau_2|$$

oricare ar fi $\tau_1, \tau_2 \in \mathbf{R}^2$, a.p.t. $x \in \Omega$.

Atunci operatorul $\Psi : F \to H^{-1}(\Omega)$ definit prin

$$\Psi(w) = \psi(., w(.))$$

satisface condiţiile din exemplul anterior.

Intr-adevăr, putem scrie

$$\Psi(w) = \psi(., 0) + \sigma(., w(.))$$

unde $\sigma(x, \tau) = \psi(x, \tau) - \psi(x, 0)$. Se observă că funcţia σ se bucură de proprietatea $|\sigma(x, \tau)| \leq a_0 |\tau|$ $\left(\tau \in \mathbf{R}^2, \text{a.p.t. } x \in \Omega\right)$, de unde, pe baza Teoremei 9.1 rezultă că operatorul de superpoziţie $\sigma(., w(.))$ aplică $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ în $L^2(\Omega)$ şi în plus

$$|\sigma(., w_1(.)) - \sigma(., w_2(.))|_{L^2(\Omega)} \leq a_0 |w_1 - w_2|_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)}.$$

Scufundarea $L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ fiind continuă va exista o constantă $a \in \mathbf{R}_+$ astfel ca (10.25) să aibă loc.

Teorema 10.13 (i) *Operatorul* S_0 *este complet continuu de la spaţiul* $L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$ *în* $C([0,T];L^p(\Omega))$ *pentru* $(2^*)' \leq p < 2^*$ *dacă* $n \geq 3$ *şi pentru orice* $p \geq 1$ *dacă* $n = 1$ *sau* $n = 2$.

(ii) *Operatorul* S *este complet continuu de la* $L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$ *în* $C\left([0,T];L^p(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)\right)$ *pentru* $(2^*)' \leq p < 2^*$ *dacă* $n \geq 3$ *şi pentru orice* $p \geq 1$ *dacă* $n = 1$ *sau* $n = 2$.

Demonstraţie. Observăm mai întâi că funcţia $u = S_0 f$ este soluţia problemei (10.38) cu $g_0 = g_1 = 0$. Deci suntem în situaţia că $g_0 \in H_0^1(\Omega)$ şi $g_1 \in L^2(\Omega)$, pentru care este valabilă Observaţia 10.3.

(i) Vom demonstra că pentru orice submulţime mărginită M a lui $L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$, mulţimea $S_0(M)$ este mărginită în $C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)$ şi relativ compactă în $C\left([0,T];H^{-1}(\Omega)\right)$, după care vom aplica Lema 10.5. Mai departe, estimările (10.39) implică mărginirea lui $S_0(M)$ în $C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)$ şi echicontinuitatea lui $S_0(M)$ în $C\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$. De unde concluzia dorită.

(ii) Se constată că $S(M)'$ este mărginită în $C\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$, echicontinuă în $C\left([0,T];H^{-1}(\Omega)\right)$ şi $\left(S(M)'\right)(t)$ este relativ compactă în $H^{-1}(\Omega)$ dată fiind scufundarea compactă $L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$. ■

Prezentăm acum un principiu general de existenţă pentru problema perturbată (10.42) ce se deduce imediat din teorema lui Leray–Schauder.

Teorema 10.14 *Fie* $g_0 \in H_0^1(\Omega)$ *şi* $g_1 \in L^2(\Omega)$. *Presupunem că* $(2^*)' \leq p < 2^*$ *dacă* $n \geq 3$ *şi* $p \geq 1$ *dacă* $n = 1$ *sau* $n = 2$ *şi*

$$\begin{aligned} \Phi_0 &: C([0,T];L^p(\Omega)) \to L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right) \\ \Phi_1 &: C([0,T];F) \to L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right) \end{aligned}$$

satisfac următoarele condiţii:

(a) Φ_0 *este continuu şi mărginit.*

(b) Φ_1 *este continuu şi mărginit.*

(c) *există* $R > 0$ *astfel ca*

$$|u|_{C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right)} \leq R \;\; \text{şi} \;\; \left|u'\right|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \leq R$$

oricare ar fi u *o soluţie a problemei*

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = \lambda \Phi\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) & \text{pe } Q \\ u(x,0) = g_0(x), \;\; u_t(x,0) = g_1(x) & \text{pe } \Omega \\ u = 0 & \text{pe } \Sigma \end{cases} \tag{10.44}$$

şi oricare ar fi $\lambda \in (0,1)$.

Atunci problema (10.42) *are cel puţin o soluţie.*

Demonstraţie. Problema (10.42) este echivalentă cu problema de punct fix în $f \in L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$

$$f = \Phi_0(u_0 + S_0 f) + \Phi_1\left(u_0 + S_0 f, (u_0 + S_0 f)'\right) \tag{10.45}$$

unde u_0 este soluţia problemei (10.38) corespunzătoare lui $f = 0$. Intradevăr, f este o soluţie a ecuaţiei operatoriale (10.45) dacă şi numai dacă $u = u_0 + S_0 f$ este soluţie a problemei (10.42).

Operatorul S_0 fiind complet continuu de la $L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$ în $C([0,T];L^p(\Omega))$, iar Φ_0 fiind continuu şi măginit de la $C([0,T];L^p(\Omega))$ în $L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$, avem că aplicaţia $\Phi_0(u_0 + S_0 f)$ este complet continuă de la spaţiul $L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$ în el însuşi.

Avem $\Phi_1\left(u_0 + S_0 f, (u_0 + S_0 f)'\right) = \Phi_1(w_0 + Sf)$, unde $w_0 = [u_0, u_0']$. Din Teorema 10.13 (ii) şi din (b) rezultă că aplicaţia $\Phi_1(w_0 + Sf)$ este complet continuă de la $L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$ în el însuşi.

Concluzia rezultă pe baza principiului lui Leray-Schauder dacă observăm că (c) garantează mărginirea în $L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$ a mulţimii tuturor soluţiilor posibile ale ecuaţiilor

$$f = \lambda\left[\Phi_0(u_0 + S_0 f) + \Phi_1(w_0 + Sf)\right], \quad \lambda \in (0,1). \tag{10.46}$$

Aceasta are loc fiindcă f este o soluţie a lui (10.46) dacă şi numai dacă $u = u_0 + S_0 f$ este soluţie a problemei (10.44). Atunci, (c) împreună cu proprietăţile de mărginire ale operatorilor Φ_0 şi Φ_1 implică, via relaţia

$$f = \lambda\left[\Phi_0(u) + \Phi_1\left(u, u'\right)\right]$$

existenţa unei margini pentru f. ■

Incheiem cu un rezultat de existenţă pentru o clasă de probleme superliniare.

Teorema 10.15 *Fie* $g_0 \in H_0^1(\Omega)$, $g_1 \in L^2(\Omega)$ *şi fie*

$$\Phi_0(u)(t) = -\sigma\,|u(t)|^{q-2}\,u(t)$$

unde $2 \le q \le 2 + \frac{2}{n-2}$ *dacă* $n \ge 3$, $q \ge 2$ *dacă* $n = 1$ *sau* $n = 2$ *şi fie* $\sigma \in \mathbf{R}_+$. *Presupunem că* Φ_1 *satisface condiţia* (b) *din Teorema* 10.14 *şi că* $\Phi_1(C([0,T];F_0)) \subset L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$. *In plus presupunem că*

$$|\Phi_1(w)(t)|_{L^2(\Omega)} \le h_0(t) + a_0\,|w(t)|_{F_0}$$

oricare ar fi $w \in C([0,T];F_0)$, *unde* $h_0 \in L^2(0,T;\mathbf{R}_+)$ *şi* $a_0 \in \mathbf{R}_+$. *Atunci problema* (10.42) *are cel puţin o soluţie* $u \in C\left([0,T];H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0,T];L^2(\Omega)\right)$.

Demonstraţie. Fie $p = (q-1)(2^*)' \ (n \geq 3)$. Din $2 \leq q \leq 2 + \frac{2}{n-2} < 2^*$ se deduce că $(2^*)' \leq p < 2^*$. Pe de altă parte, dacă $u \in L^2(0,T;L^p(\Omega))$, atunci $|u(t)|^{q-1} \in L^{(2^*)'}(\Omega)$. Deci operatorul Φ_0 este bine definit, continuu şi mărginit de la spaţiul $L^2(0,T;L^p(\Omega))$ în $L^2\left(0,T;H^{-1}(\Omega)\right)$.

Fie acum u o soluţie oarecare a problemei (10.44), fie $w = [u,u']$ şi fie

$$f = \lambda\left[\Phi_0(u) + \Phi_1\left(u,u'\right)\right].$$

Din $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ avem $\Phi_0(u)(t) \in L^{\frac{2^*}{q-1}}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ fiindcă $2 \leq \frac{2^*}{q-1}$. Cum, din ipoteză, $\Phi_1(u,u')(t) \in L^2(\Omega)$, avem că $f(t) \in L^2(\Omega)$. Rezultă că $f \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$. Cu notaţiile din demonstraţia Teoremei 10.10, avem

$$s_m''(t) - \Delta s_m(t) = f^m(t)$$

de unde, după multiplicarea cu $s_m'(t)$ în sensul lui $L^2(\Omega)$ şi integrare, obţinem

$$\left|s_m'(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} + |s_m|^2_{H_0^1(\Omega)} = 2\int_0^t \left(f^m(s), s_m'(s)\right)_{L^2(\Omega)} ds.$$

Trecând la limită cu $m \to \infty$ găsim

$$\left|u'(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} + |u(t)|^2_{H_0^1(\Omega)} = 2\int_0^t \left(f(s), u'(s)\right)_{L^2(\Omega)} ds.$$

Dar

$$\left(\Phi_0(u)(s), u'(s)\right) = -\sigma\frac{1}{q}\frac{d}{ds}|u(s)|^q_{L^q(\Omega)}.$$

Deci

$$\int_0^t \left(\Phi_0(u)(s), u'(s)\right)_{L^2(\Omega)} ds = -\sigma\frac{1}{q}|u(t)|^q_{L^q(\Omega)} \leq 0.$$

In consecinţă

$$\begin{aligned}
|w(t)|^2_{F_0} &= \left|u'(t)\right|^2_{L^2(\Omega)} + |u(t)|^2_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq 2\int_0^t \left(\Phi_1\left(u,u'\right)(s), u'(s)\right)_{L^2(\Omega)} ds \\
&\leq 2\int_0^t \left(h_1(s) + a_0|w(s)|_{F_0}\right)\left|u'(s)\right|_{L^2(\Omega)} ds
\end{aligned}$$

unde $h_1(t) = h_0(t) + |\Phi_1(0)(t)|_{L^2(\Omega)}$. Mai departe

$$\begin{aligned} |w(t)|_{F_0}^2 &\leq \int_0^t \left[h_1^2(s) + (1 + 2a_0) |w(s)|_{F_0}^2 \right] ds \\ &= c + b \int_0^t |w(s)|_{F_0}^2 \, ds. \end{aligned}$$

Aici $c = |h_1|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}$ şi $b = 1+2a_0$. Inegalitatea lui Gronwall implică existenţa unei constante $R > 0$ cu $|w(t)|_{F_0} \leq R$, adică condiţia (c) din Teorema 10.14 este satisfăcută. Concluzia rezultă acum din Teorema 10.14. ■

Pentru alte metode şi rezultate privind ecuaţiile de evoluţie semilinia-re, recomandăm lucrările Barbu [3], Cazenave [7], Cazenave–Haraux [8], Lions [26], Temam [54] şi Vrabie [59].

Bibliografie

[1] R.A. Adams, *Sobolev Spaces,* Academic Press, New York, 1975.

[2] J.-P. Aubin, *Analyse fonctionnelle appliquée* I-II, Presses Universitaires de France, Paris, 1987.

[3] V. Barbu, *Probleme la limită pentru ecuaţii cu derivate parţiale,* Editura Academiei Române, Bucureşti, 1993; *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems,* Kluwer, Dordrecht–Boston–London, 1998.

[4] J.-M. Bony, *Théorie des distributions et analyse de Fourier,* École Polytechnique, Palaiseau, 1997.

[5] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications,* Masson, Paris, 1983; *Analiză funcţională. Teorie şi aplicaţii,* Editura Academiei Române, Bucureşti, 2002.

[6] H. Brezis, F. Browder, Partial differential equations in the 20th century, *Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique* **17** (1998), fasc. 4, 1-85; *Adv. Math.* **135** (1998), 76-144.

[7] T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger Equations,* Courant Lecture Notes in Mathematics Vol. 10, Amer. Math. Soc., Providence, 2003.

[8] T. Cazenave, A. Haraux, *An Introduction to Semilinear Evolution Equations,* Oxford University Press, New York, 1998.

[9] R. Dautray, J.L. Lions, *Analyse mathématique et calcul numérique* I-IX, Masson, Paris, 1988.

[10] E. DiBenedetto, *Partial Differential Equations,* Birkhäuser, Basel, 1995.

[11] J. Dieudonné, *Éléments d'Analyse,* Guathier–Villars, Paris, 1968.

[12] G. Dincă, *Metode variaţionale şi aplicaţii,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1980.

[13] Yu.V. Egorov, M.A. Shubin (Eds.), *Partial Differential Equations* I*: Foundations of the Classical Theory* (Encyclopedia of Mathematical Sciences; v. 30), Springer, Berlin, 1992.

[14] G.B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations,* Princeton Univ. Press and Univ. of Tokyo Press, Princeton, 1976.

[15] I.M. Gelfand, G.E. Şilov, *Funcţii generalizate,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1983.

[16] D. Gilbarg, N.S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order,* Spinger, Berlin, 1983.

[17] A. Haimovici, *Ecuaţiile fizicii matematice,* Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1966.

[18] D. Hărăguş, *Ecuaţii cu derivate parţiale,* Editura Universităţii de Vest, Timişoara, 2001.

[19] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators* I-II, Springer, Berlin, 1982-1983.

[20] P. Jebelean, *Metode de analiză neliniară cu aplicaţii în probleme la limită cu p-Laplacian*, Editura Universităţii de Vest, Timişoara, 2001.

[21] V. Iftimie, *Ecuaţii cu derivate parţiale*, Universitatea din Bucureşti, 1980.

[22] F. John, *Partial Differential Equations,* Springer, Berlin, 1982.

[23] C. Kalik, *Ecuaţii cu derivate parţiale,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1980.

[24] L. Kantorovitch, G. Akilov, *Analyse fonctionnelle,* Mir, Moscou, 1981; *Analiză funcţională,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1986.

[25] A.W. Leung, *Systems of Nonlinear Partial Differential Equations. Applications to Biology and Engineering,* Kluwer, Dordrecht–Boston–London, 1989.

[26] J.L. Lions, *Quelques méthodes de resolution des problèmes aux limites non-linéaires,* Dunod, Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[27] J.L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non-homogènes et applications,* Dunod, Paris, 1968.

[28] J.D. Logan, *Applied Partial Differential Equations,* Springer, Berlin, 1998.

[29] S.G. Mihlin, *Ecuaţii liniare cu derivate parţiale,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1983.

[30] V. Mikhaïlov, *Équations aux dérivées partielles,* Mir, Moscou, 1980.

[31] S. Mizohata, *Theory of Partial Differential Equations,* Cambridge University Press, Cambridge, 1973.

[32] J.D. Murray, *Mathematical Biology,* Springer, New York, 1987.

[33] J. Nečas, *Introduction to the Theory of Nonlinear Elliptic Equations,* Teubner, Leipzig, 1983.

[34] L. Nirenberg, *Lectures on Linear Partial Differential Equations.* Regional Conf. Ser. Math. 17, Amer. Math. Soc., Providence, 1973.

[35] D. O'Regan, R. Precup, *Theorems of Leray–Schauder Type and Applications,* Gordon and Breach, Amsterdam, 2001.

[36] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations,* Springer, Berlin, 1983.

[37] V.P. Pikulin, S.I. Pohozaev, *Equations in Mathematical Physics. A Practical Course,* Birkhäuser, Basel, 2001.

[38] R. Precup, *Ecuaţii integrale neliniare,* Universitatea Babeş–Bolyai, Cluj, 1993.

[39] R. Precup, *Ecuaţii cu derivate parţiale*, Transilvania Press, Cluj, 1997.

[40] R. Precup, *Methods in Nonlinear Integral Equations,* Kluwer, Dordrecht–Boston–London, 2002.

[41] M.H. Protter, H.F. Weinberger, *Maximum Principle in Differential Equations,* Springer, Berlin, 1984.

[42] P.H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory and Applications to Differential Equations,* CBMS Regional Conference Series Math., Vol. 65, Amer. Math. Soc., Providence, 1986.

[43] J. Rauch, *Partial Differential Equations,* Springer, Berlin, 1991.

[44] V. Rădulescu, *Treatment Methods of the Elliptic Problems,* Universitatea din Craiova, 1998.

[45] I.A. Rus, Maximum priciples for elliptic systems, în *Optimization, Optimal Control and Partial Differential Equations* (Eds. V. Barbu, J.F. Bonnans, D. Tiba), Birkhäuser, Basel, 1992, p. 37-45.

[46] S. Sburlan, *Topological and Functional Methods for Partial Differential Equations* (Survey Series in Math., Analysis:1), Universitatea Ovidius, Constanţa, 1995.

[47] L. Schwartz, *Théorie des distributions,* Hermann, Paris, 1957-1959.

[48] L. Schwartz, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques,* Hermann, Paris, 1965; 1993.

[49] N. Shimakura, *Partial Differential Operators of Elliptic Type,* American Mathematical Society, Providence, 1992.

[50] S.L. Sobolev, *Ecuaţiile fizicii matematice,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1955.

[51] M. Struwe, *Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems,* Springer, Berlin, 1990.

[52] P. Szilágyi, *Ecuaţiile fizicii matematice,* Universitatea Babeş–Bolyai, Cluj, 1972.

[53] M. Taylor, *Partial Differential Equations* I-III, Springer, Berlin, 1996.

[54] R. Temam, *Infinite-Dimentional Dynamical Systems in Mechanics and Physics,* Springer, Berlin, 1988.

[55] A.N. Tihonov, A.A. Samarski, *Ecuaţiile fizicii matematice,* Editura Tehnică, Bucureşti, 1956.

[56] D. Trif, *Ecuaţii cu derivate parţiale,* Universitatea Babeş–Bolyai, Cluj, 1993.

[57] V.S. Vladimirov, *Ecuaţiile fizicii matematice,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1976.

[58] V.S. Vladimirov ş.a., *Culegere de probleme de ecuaţiile fizicii matematice,* Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1981.

[59] I.I. Vrabie, *Compactness Methods for Nonlinear Evolutions,* Longman Scientific & Technical, Harlow, 1987.

Notaţii

Partea I:

$\mathbf{R}^n$	Spaţiul euclidian de dimensiune n; produsul scalar: $(x,y) = x \cdot y = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j$; norma: $\lvert x\rvert = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}$.
$B_r(x)$	Bila deschisă din $\mathbf{R}^n$, cu centrul x şi raza r.
$B_r(x;X)$	Bila deschisă a spaţiului normat X, de centru x şi rază r.
ω_n	Măsura sferei unitate a spaţiului $\mathbf{R}^n$, $\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$.
D^α	Operatorul $\frac{\partial^{\lvert\alpha\rvert}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $\lvert\alpha\rvert = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j$.
∇	Operatorul gradient: $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$.
$\frac{\partial u}{\partial \upsilon}$	$= (\nabla u, \upsilon)$, $\upsilon \in \mathbf{R}^n$, $\lvert\upsilon\rvert = 1$.
Δ	Operatorul lui Laplace (laplaceanul): $\Delta u = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$.
$C^k(\Omega)$	Spaţiul funcţiilor continuu diferenţiabile până la ordinul k pe deschisul $\Omega \subset \mathbf{R}^n$.
$C^k(\overline{\Omega})$	Spaţiul funcţiilor $u \in C^k(\Omega)$ ale căror derivate până la ordinul k admit prelungiri continue pe $\overline{\Omega}$.
$C_0^1(\overline{\Omega})$	$= \{u \in C^1(\overline{\Omega}) : u = 0 \text{ pe } \partial\Omega\}$ ($\Omega \subset \mathbf{R}^n$ deschis, mărginit) $(u,v)_{0,1} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx$; $\lvert u\rvert_{0,1} = \left(\int_\Omega \lvert\nabla u\rvert^2 dx\right)^{1/2}$.
$H_0^1(\Omega)$	Completatul spaţiului $\left(C_0^1(\overline{\Omega}), \lvert.\rvert_{0,1}\right)$.
$H^1(\Omega)$	Completatul spaţiului $\{u \in C^1(\Omega) : u, \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2(\Omega)\}$ în raport cu norma $a(u,u)^{1/2} = \left[\int_\Omega \left(\lvert\nabla u\rvert^2 + u^2\right) dx\right]^{1/2}$.
$L^p(\Omega)$	$= \{u : \Omega \to \mathbf{R} : u$ este măsurabilă şi $\lvert u\rvert^p$ este integrabilă$\}$ cu norma $\lvert u\rvert_{L^p} = \left(\int_\Omega \lvert u\rvert^p dx\right)^{1/p}$ $(1 \le p < \infty)$.

$L^{\infty}(\Omega)$	$=\{u:\Omega\to\mathbf{R}: u$ măsurabilă şi esenţial mărginită$\}$
	norma: $\lvert u\rvert_{L^{\infty}}=\inf\{M: \ \lvert u(x)\rvert\le M$ a.p.t. $x\in\Omega\}$.
$\mathcal{S}$	Spaţiul Schwartz
X	Spaţiu Banach cu norma $\lvert . \rvert_X$
$C^k([0,T];X)$	Spaţiul funcţiilor $u:[0,T]\to X$ continuu
	diferenţiabile până la ordinul k pe $[0,T]$.
$L^p(0,T;X)$	Spaţiul funcţiilor măsurabile $u:[0,T]\to X$ cu
	$\lvert u\rvert_{L^p(0,T;X)}:=\left(\int_0^T \lvert u(t)\rvert_X^p\,dt\right)^{1/p}<\infty.$

Partea II:

$\mathcal{D}(\Omega)$	$=C_0^{\infty}(\Omega)$, spaţiul funcţiilor infinit diferenţiabile
	pe Ω, cu suport compact inclus în Ω.
$\mathcal{E}(\Omega)$	$=C^{\infty}(\Omega)$.
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Spaţiul distribuţiilor pe Ω (dualul lui $\mathcal{D}(\Omega)$).
$\mathcal{E}'(\Omega)$	Spaţiul distribuţiilor cu suport compact.
$\mathcal{S}'$	Spaţiul distribuţiilor temperate.
$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$	Spaţiul funcţiilor u măsurabile pe Ω, cu $u\in L^1(\Omega')$
	pentru orice Ω' deschis şi mărginit, $\overline{\Omega'}\subset\Omega$.
$H^m(\Omega)$	$=\{u\in L^2(\Omega): D^{\alpha}u\in L^2(\Omega)$ pentru $\lvert\alpha\rvert\le m\}$
	$(u,v)_{H^m}=\sum\limits_{\lvert\alpha\rvert\le m}(D^{\alpha}u,D^{\alpha}v)_{L^2}$; $\lvert u\rvert_{H^m}=(u,u)_{H^m}^{1/2}$.
$H_0^m(\Omega)$	Inchiderea lui $C_0^{\infty}(\Omega)$ în $H^m(\Omega)$.
$H^{-m}(\Omega)$	Dualul spaţiului $H_0^m(\Omega)$

Contents

Radu Precup, Lecţii de ecuaţii cu derivate parţiale (*Lectures on Partial Differential Equations*), House of the Book of Science, Cluj, 2004.

Index