ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2008, том 421, № 3, с. 302–304

МАТЕМАТИКА

УДК 517.925.42

К ТЕОРЕМЕ Ю.А. МИТРОПОЛЬСКОГО О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ПРАВЫЕ ЧАСТИ КОТОРЫХ НЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫ

© 2008 г. А. Буйка (A. Buica), Ж. Либре (J. Libre), О. Ю. Макаренков

Представлено академиком Ю.А. Митропольским 07.11.2007 г.

Поступило 07.12.2007 г.

В настоящей работе изучается существование, единственность и асимптотическая устойчивость T-периодических решений системы

$$\dot{x} = \varepsilon g(t, x, \varepsilon), \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр и T-периодическая по первой переменной функция $g \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \times [0, 1], \mathbb{R}^k)$ удовлетворяет условию Липшица по второй переменной. Как обычно, ключевую роль играет усредненная функция

$$g_0(v) = \int_0^T g(\tau, v, 0)d\tau, \tag{2}$$

и мы будем исследовать T-периодические решения системы (1) с начальными условиями вблизи $v_0 \in (g_0)^{-1}(0)$.

В случае, когда функция g непрерывно дифференцируема, т.е. $g \in C^1(R \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$, периодическая часть второй теоремы Н.Н. Боголюбова [2, ч. 1, §5, теорема II] утверждает: *при малых* $\varepsilon > 0$ *условие* $\det(g_0)'(v_0) \neq 0$ *гарантирует существование и единственность T-периодических решений у системы* (1) *в окрестности* v_0, *в то время как предположение о том, что все собственные значения матрицы* $(g_0)'(v_0)$ *имеют отрицательные вещественные части, гарантирует асимптотическую устойчивость этих решений.*

В статье [9] Ю.А. Митропольский обратил внимание на то, что некоторые приложения требуют изучения возмущений g, удовлетворяющих лишь условию Липшица. Для таких функций g при условии $g_0 \in C^3(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^k)$ и предположении о том, что все собственные значения матрицы $(g_0)'(v_0)$ имеют отрицательные вещественные части, Ю.А. Митропольский предложил аналог теоремы Н.Н. Боголюбова, доказав существование и единственность T-периодических решений у системы (1) в окрестности v_0. Далее был существенный прогресс в развитии результата Митропольского о существовании (см. [11] и [8]), и были предложены аналоги его результата о единственности для уравнений с монотонными нелинейностями (см. работы [10, 12]). Однако в условиях Митропольского (т.е. когда g только липшицева) утверждение второй теоремы Боголюбова об асимптотической устойчивости долгое время оставалось недоказанным. Это было сделано недавно в работе А. Буйки и А. Даниилидиса [3] для класса функций $v \mapsto g(t, v, 0)$, дифференцируемых в v_0 для почти всех $t \in [0, T]$, но в [3] предполагается, что собственные векторы матрицы $(g_0)'(v_0)$ ортогональны и функция g удовлетворяет непростому условию о непрерывности дифференциала Кларка.

В следующем разделе статьи, считая g кусочно-дифференцируемой по второй переменной, мы покажем (теорема 2), что предположения Ю.А. Митропольского влекут за собой не только единственность, но и асимптотическую устойчивость T-периодических решений системы (1) в окрестности v_0. Другими словами, мы покажем, что сформулированная выше теорема Н.Н. Боголюбова верна и в случае недифференцируемых функций g. Теорема 2 следует из нашей общей теоремы 1, предположения которой не используют ни дифференцируемости g, ни дифференцируемости g_0.

1. Всюду далее через $\Omega \subset \mathbb{R}^k$ обозначается некоторое открытое множество и δ-окрестность элемента $v \in \mathbb{R}^k$ определяется формулой $B_\delta(v_0) = \{v \in \mathbb{R}^k : \|v - v_0\| \le \delta\}$. Справедлив следующий основной результат.

Department of Applied Mathematics, Babes–Bolyai University, Cluj-Napoca, Romania

Departament de Matemàtiques, Universitat Autònoma de Barcelona, Spain

Научно-исследовательский институт математики Воронежского государственного университета

Т е о р е м а 1. *Пусть* $g \in C^0(\mathbb{R} \times \Omega \times [0, 1], \mathbb{R}^k)$ *и* $v_0 \in \Omega$. *Предположим, что выполнены следующие четыре условия.*

(i) $\|g(t, v_1, \varepsilon) - g(t, v_2, \varepsilon)\| \le L\|v_1 - v_2\|$ *для некоторого* $L > 0$ *и всех* $t \in [0, T]$, $v_1, v_2 \in \Omega$, $\varepsilon \in [0, 1]$.

(ii) *для каждого* $\gamma > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что*

$$\left\| \int_0^T g(\tau, v_1 + u(\tau), \varepsilon)d\tau - \int_0^T g(\tau, v_2 + u(\tau), \varepsilon)d\tau - \right.$$
$$\left. - \int_0^T g(\tau, v_1, 0)d\tau + \int_0^T g(\tau, v_2, 0)d\tau \right\| \le \gamma\|v_1 - v_2\|$$

при всех $u \in C^0([0, T], \mathbb{R}^k)$, $\|u\| \le \delta$, $v_1, v_2 \in B_\delta(v_0)$ *и* $\varepsilon \in [0, \delta]$.

(iii) $g_0(v_0) = 0$, *где* g_0 – *усредненная функция, определяемая формулой* (2).

(iv) *Существуют* $q \in [0, 1)$, α, $\delta_0 > 0$ *и норма* $\|\cdot\|_0$ *в* $\mathbb{R}^k$ *такие, что* $\|v_1 + \alpha g_0(v_1) - v_2 - \alpha(g_0(v_2)\|_0 \le \|v_1 - - v_2\|_0$ *для всех* $v_1, v_2 \in B_{\delta_0}(v_0)$.

Тогда существует $\delta_1 > 0$ *такое, что для каждого* $\varepsilon \in (0, \delta_1]$ *система* (1) *имеет в точности одно* *T-периодическое решение* x_ε, *удовлетворяющее условию* $x_\varepsilon(0) \in B_{\delta_1}(v_0)$). *Более того, решение* x_ε *является асимптотически устойчивым и* $x_\varepsilon(0) \to v_0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

В случае, когда решение $x(\cdot, v, \varepsilon)$ системы (1) с начальным условием $x(0, v, \varepsilon) = v$ определено на отрезке $[0, T]$, отображение $v \mapsto x(T, v, \varepsilon)$ называется отображением Пуанкаре системы (1). Доказательство существования, единственности и устойчивости T-периодических решений системы (1) в теореме 1 сводятся к изучению соответствующих свойств неподвижных точек этого отображения. Более подробно, чтобы доказать теорему 1, записываем $x(T, v, \varepsilon)$ в виде

$$x(T, v, \varepsilon) = v + \varepsilon g_\varepsilon(v),$$
$$g_\varepsilon(v) = \int_0^T g(\tau, x(\tau, v, \varepsilon), \varepsilon)d\tau,$$

и показываем, что функция g_ε удовлетворяет равномерно по $\varepsilon > 0$ условию Липшица в шаре $B_{\delta_0}(v_0)$, где $\delta_0 > 0$ – фиксированное малое число, а также следующему аналогу свойства (ii): *каждому* $\gamma > 0$ *соответствует* $\delta \in [0, \delta_0]$ *такое, что*

$$\|g_\varepsilon(v_1) - g_0(v_1) - g_\varepsilon(v_2) + g_0(v_2)\| \le \gamma\|v_1 - v_2\|$$

при всех $v_1, v_2 \in B_\delta(v_0)$ *и* $\varepsilon \in [0, \delta]$.

Это, в свою очередь, позволяет сделать вывод о том, что если константа Липшица функции $I + \varepsilon g_0$ не превосходит $1 - \varepsilon\tilde{q}$ (где $\tilde{q}$ – некоторая константа), то константа Липшица функции $I + \varepsilon g_\varepsilon$ не превосходит при малых $\varepsilon > 0$ единицы и доказательство теоремы 1 заканчивается применением леммы об асимптотически устойчивых неподвижных точках оператора Пуанкаре (см., например, [6, лемма 9.2]). Оказывается, в условиях теоремы 1 константа Липшица функции $I + \varepsilon g_0$ действительно не превосходит $1 - \varepsilon\tilde{q}$, где $\tilde{q} = \dfrac{1 - q}{\alpha}$.

Поскольку, вообще говоря, проверка условий (ii) и (iv) теоремы 1 не всегда проста в приложениях, мы предлагаем следующее ее следствие, которое использует новое свойство кусочной дифференцируемости (v) вместо (ii) и оперирует свойствами матрицы $(g_0)'(v_0)$ вместо константы Липшица функции g_0. Для любого множества $M \subset [0, T]$, измеримого в смысле Лебега, через $\mathrm{mes}(M)$ обозначается его мера Лебега.

Т е о р е м а 2. *Пусть для* $g \in C^0(\mathbb{R} \times \Omega \times [0, 1], \mathbb{R}^k)$ *выполнено предположение* (i). *Пусть* g_0 – *усредненная функция, данная формулой* (2), *и* $v_0 \in \Omega$ *удовлетворяет условию* $g_0(v_0) = 0$. *Предположим, что*:

(v) *для любого* $\tilde{\gamma} > 0$ *существует* $M \subset [0, T]$, *измеримое в смысле Лебега и удовлетворяющее условию* $\mathrm{mes}(M) < \tilde{\gamma}$, *а также* $\tilde{\delta} > 0$ *такое, что при каждом* $v \in \Omega$ *таком, что* $\|v - v_0\| \le \tilde{\delta}$, $t \in [0, T]\backslash M$ *и* $\varepsilon \in [0, \tilde{\delta}]$ *функция* $g(t, \cdot, \varepsilon)$ *является дифференцируемой в точке* v *и* $\|g'_v(t, v, \varepsilon) - g'_v(t, v_0, 0)\| \le \tilde{\gamma}$.

Пусть, наконец,

(vi) *функция* g_0 *непрерывно дифференцируема в окрестности точки* v_0, *и все вещественные части матрицы* $(g_0)'(v_0)$ *являются отрицательными.*

Тогда существует $\delta_1 > 0$ *такое, что для каждого* $\varepsilon \in (0, \delta_1]$ *система* (1) *имеет в точности одно T-периодическое решение* x_ε, *удовлетворяющее свойству* $x_\varepsilon(0) \in B_{\delta_1}(v_0)$. *Более того, решение* x_ε *является асимптотически устойчивым и* $x_\varepsilon(0) \to v_0$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Для доказательства теоремы 2 необходимо заметить, что свойство (v) влечет за собой свойство (ii), в то время как свойство (vi) влечет за собой свойство (iv). Второе из двух наблюдений целиком основано на лемме 2.2 книги [5, с. 91].

2. Перейдем к приложению анонсированного результата. В работе [4] Хоган установил существование предельного цикла для негладкого осциллятора Ван дер Поля $\ddot{u} + \varepsilon(|u| - 1)\dot{u} + u = 0$. Пользуясь результатом предыдущего раздела,

мы получим резонансные кривые, определяющие расположение асимптотически устойчивых периодических решений в возмущенном уравнении

$$\ddot{u} + \varepsilon(|u| - 1)\dot{u} + (1 + a\varepsilon)u + \varepsilon\lambda\sin t, \tag{3}$$

где a – расстройка и $\varepsilon\lambda_0\sin t$ – внешняя сила.

Следуя классической работе Андронова и Витта [1], мы интересуемся зависимостью амплитуды 2π-периодических решений уравнения (3) от a и λ при условии, что $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Другими словами, мы решаем задачу о том, каким A и ϕ соответствуют 2π-периодические решения уравнения (3), сходящиеся при $\varepsilon \to 0$ к

$$u(t) = A\sin(t + \phi), \quad \dot{u}(t) = A\cos(t + \phi). \tag{4}$$

Условие (v) теоремы 2 для уравнения (3) (после приведения к виду (1)) оказывается выполненным при любых $a, \lambda_0 \in \mathbb{R}$, а условие отличия определителя матрицы $(g_0)'((A\sin\phi, A\cos\phi))$ от нуля, необходимое для справедливости (vi), приводит к алгебраическому уравнению

$$A^2\left(a^2 + \left(1 - \frac{4}{3\pi}|A|\right)^2\right) = \lambda^2. \tag{5}$$

Условие же отрицательности вещественных частей собственных значений матрицы $(g_0)'(M, N)$ записывается в виде системы двух неравенств

$$\pi^2(1 + a^2) + \frac{32}{9}(M^2 + N^2) - 4\pi\sqrt{M^2 + N^2} > 0, \tag{6}$$

$$2(\pi - 2\sqrt{M^2 + N^2}) < 0. \tag{7}$$

Таким образом, теорема 2 позволяет утверждать, что асимптотически устойчивые 2π-периодические решения уравнения (3) рождаются при малых $\varepsilon > 0$ из решения $u(t) = A\sin(t + \phi)$, где A, $M = A\sin\phi$, $N = A\cos\phi$ удовлетворяют условиям (5)–(7).

Отметим, что соответствующие условия для классического уравнения Ван дер Поля $\ddot{u} + \varepsilon(u^2 - 1)\dot{u} + (1 + a\varepsilon)u = \varepsilon\lambda\sin t$ имеют вид (см. формулы (5.21), (16.6) и (16.7) в книге Малкина [7])

$$A^2\left(a^2 + \left(1 - \frac{A^2}{4}\right)^2\right) = \lambda^2,$$

$$1 + a^2 - (M^2 + N^2) + \frac{3}{16}(M^2 + N^2)^2 > 0,$$

$$2 - (M^2 + N^2) < 0$$

соответственно.

Авторы благодарны профессору А.И. Перову и В.Н. Тхаю за обсуждение результатов работы на их семинарах.

Исследования второго автора частично поддержаны грантом MTM2005-06098-C02-01 MEC/FEDER и грантом 2005SGR 00550 CICYT, исследования третьего автора частично поддержаны грантом BF6M10 Министерства образования РФ и РФФИ (грант 06–01–72552).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андронов А.А., Витт А.А.* // ЖПФ. 1930. Т. 6. № 4. С. 3–17.
2. *Боголюбов Н.Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. Львов: АН Укр. ССР, 1945.
3. *Buica A., Daniilidis A.* // Proc. Amer. Math. Soc. 2007. V. 135. № 10. P. 3317–3327.
4. *Hogan S.J.* // J. Sound Vibration. 2003. V. 263. № 2. P. 467–471.
5. *Красносельский М.А.* Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматлит, 1962.
6. *Красносельский М.А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Физматлит, 1966.
7. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехтеориздат, 1956.
8. *Mawhin J.* // Bull. Soc. Roy. Sci. Liège. 1969. V. 38. P. 308–398.
9. *Митропольский Ю.А.* // Укр. мат. журн. 1969. Т. 11. № 4. С. 366–379.
10. *Перов А.И.* Периодические колебания. Воронеж: ВГУ, 1973.
11. *Самойленко А.М.* // Укр. мат. журн. 1963. Т. 15. № 3. С. 328-332.
12. *Трубников Ю.В., Перов А.И.* Дифференциальные уравнения с монотонными нелинейностями. Минск: Наука и техника, 1986.