Teorema de punct fix a lui Banach

Principiul contracției

Radu Trîmbițaș

UBB

6 aprilie 2020

Introducere

În matematică, teorema de punct fix a lui Banach [1] (cunoscută și sub numele de teorema aplicației contractive sau principiul contracției) este un instrument important în teoria spațiilor metrice. Ea garantează existența și unicitatea punctelor fixe ale unor clase de aplicații ale unui spațiu metric în el însuși și furnizează o metodă constructivă de determinare a acelor puncte fixe.

Definiție

Fie (X, d) un spațiu metric. O aplicație $T : X \to X$ se numește contracție pe X, dacă există $q \in [0, 1)$ astfel încît oricare ar fi $x, y \in X$

$$d\left(T(x), T(y)\right) \leq q d(x, y). \tag{1}$$

Definiție

Fie $T : X \to X$. Punctul $x \in X$ se numește punct fix al lui T dacă $T(x) = x$.

Enunțul

Teoremă (Banach, 1922)

Fie (X, d) un spațiu metric complet nevid și $T : X \to X$ o contracție. Atunci T admite un punct fix unic $x^* \in X$ (i.e. $T(x^*) = x^*$). Mai mult, x^* poate fi determinată prin metoda aproximațiilor succesive: se pornește de la un element arbitrar $x_0 \in X$ și se definește șirul $\{x_n\}$ prin $x_n = T(x_{n-1})$; atunci $x_n \to x^*$.

Observație

Inegalitățile următoare sunt echivalente și descriu viteza de convergență:

$$\begin{aligned} d\left(x^*, x_n\right) &\leq \frac{q^n}{1-q} d\left(x_1, x_0\right) \\ d\left(x^*, x_{n+1}\right) &\leq \frac{q}{1-q} d\left(x_{n+1}, x_n\right) \\ d\left(x^*, x_{n+1}\right) &\leq q d\left(x^*, x_n\right). \end{aligned}$$

Demonstrație I

- Demonstrația este din [2].
- Din inegalitatea triunghiului, $\forall x, y \in X$

$$\begin{aligned} d(x,y) &\leq d\left(x, T(x)\right) + d\left(T(x), T(y)\right) + d(T(y), y) \\ &\leq d\left(x, T(x)\right) + qd\left(x, y\right) + d(T(y), y). \end{aligned}$$

- Exprimând $d(x,y)$ avem

$$d(x,y) \leq \frac{d\left(x, T(x)\right) + d(T(y), y)}{1-q} \tag{2}$$

- x, y puncte fixe $\Rightarrow d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$ (deci unicitatea)

Demonstrație II

- Fie T^n prin compunerea lui T cu ea însăși de n ori; observăm prin inducție că ea satisface condiția (1) cu constanta q^n. Rămîne să arătăm că pentru orice $x_0 \in X$, șirul $\{T^n(x_0)\}$ este fundamental și converge către un punct $x^* \in X$, care, așa cum s-a observat mai sus, este punct fix al lui T. Dacă în inegalitatea (2) înlocuim x cu $T^n(x_0)$ și y cu $T^m(x_0)$, obținem

$$\begin{aligned}
d\left(T^n(x_0), T^m(x_0)\right) &\leq \frac{d(T(T^n(x_0)), T^n(x_0)) + d(T(T^m(x_0))\,, T^m(x_0))}{1-q} \\
&= \frac{d(T^n(T(x_0)), T^n(x_0)) + d(T^m(T(x_0)), T^m(x_0))}{1-q} \\
&\leq \frac{q^n d(T(x_0), x_0) + q^m d(T(x_0), x_0)}{1-q} \\
&= \frac{q^n + q^m}{1-q} d(T(x_0), x_0)
\end{aligned}$$

Demonstrație III

- Deoarece $q < 1$, ultima expresie converge către zero cînd $n, m \to \infty$, deci $\{T^n(x_0)\}$ este Cauchy.
- Făcînd $m \to \infty$, se obține delimitarea

$$d\left(T^n(x_0), x^*\right) \leq \frac{q^n}{1-q} d(T(x_0), x_0).$$

Figura: Stefan Banach (1892 - 1945) a fondat analiza funcțională modernă și a avut contribuții majore în teoria spațiilor liniare topologice, teoria măsurii, integrare, serii ortogonale.

Bibliografie

- Banach, S., Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales, *Fund. Math.* **3**(1922), 133–181.
- Palais, R., A simple proof of the Banach contraction principle, *J. fixed point theory appl.* 2 (2007), 221–223