Aproximare prin metoda celor mai mici pătrate

Radu T. Trîmbiţaş

25 mai 2020

Fie $f \in L_w^2[a,b]$ şi $\Phi \leq L_w^2[a,b]$ de dimensiune $n+1$. Dorim să găsim o aproximantă $\varphi^* \in \Phi$ astfel încât $\|\varphi^* - f\|^2 \leq \|\varphi - f\|^2, \forall \varphi \in \Phi$.

Scriem

$$\varphi^*(x) = a_0\varphi_0(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x), \tag{1}$$

unde $\{\varphi_k | k = 0, \ldots, n\}$ este o bază a lui Φ.

Coeficienţii sunt soluţiile ecuaţiilor normale

$$a_0(\varphi_0, \varphi_k) + a_1(\varphi_1, \varphi_k) + \cdots + a_n(\varphi_n, \varphi_k) = (f, \varphi_k), \quad k = 0, \ldots, n. \tag{2}$$

Dacă sistemul $\{\varphi_k | k = 0, \ldots, n\}$ este ortogonal, coeficienţii se pot obţine cu ajutorul formulelor

$$a_k = \frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)}, \quad k = 0, \ldots, n. \tag{3}$$

Aproximanta poate fi continuă sau discretă, în funcţie de măsura aleasă în definiţia produsului scalar. În cazul continuu produsul scalar are forma

$$(g, h) = \int_a^b w(x)g(x)h(x)dx,$$

iar in cazul discret

$$(g, h) = \sum_{k=0}^{N} w_k g(x_k)h(x_k).$$

Să consideram relaţia de recurenţă pentru polinoamele ortogonale monice

$$\pi_{k+1}(x) = (x - \alpha_k)\pi_k(x) - \beta_k \pi_{k-1}(x), k = 0, 1, 2, \ldots$$
$$\pi_0(x) = 1, \pi_{-1}(x) = 0,$$

unde

$$\beta_0 = \int_a^b w(x) f(x) dx = \mu_0.$$

Coeficienţii din relaţia de recurenţă (2) au expresia

$$\alpha_k = \frac{(x\pi_k, \pi_k)}{(\pi_k, \pi_k)}, \beta_k = \frac{(\pi_k, \pi_k)}{(\pi_{k-1}, \pi_{k-1}}.$$

Reamintim câteva dintre polinoamele ortogonale clasice şi coeficienţii din relaţiile lor de recurenţă:

Polinoamele	Notaţia	Pondere	interval	α_k	β_k
Legendre	$P_n(l_n)$	1	[-1,1]	0	2 $(k{=}0)$ $(4{-}k^{-2})^{-1}$ $(k{>}0)$
Cebîşev #1	T_n	$(1{-}t^2)^{-\frac{1}{2}}$	$[-1,1]$	0	π $(k{=}0)$ $\frac{1}{2}$ $(k{=}1)$ $\frac{1}{4}$ $(k{>}0)$
Cebîşev #2	$U_n(Q_n)$	$(1{-}t^2)^{\frac{1}{2}}$	$[-1,1]$	0	$\frac{1}{2}\pi$ $(k{=}0)$ $\frac{1}{4}$ $(k{>}0)$
Jacobi	$P_n^{(\alpha,\beta)}$	$(1{-}t)^\alpha(1{+}t)^\beta$ $\alpha{>}{-1},\ \beta{>}{-1}$	$[-1,1]$		
Laguerre	$L_n^{(\alpha)}$	$t^\alpha e^{-t}$ $\alpha{>}{-1}$	$[0,\infty)$	$2k{+}\alpha{+}1$	$\Gamma(1{+}\alpha)$ $(k{=}0)$ $k(k{+}\alpha)$ $(k{>}0)$
Hermite	H_n	e^{-t^2}	$\mathbb{R}$	0	$\sqrt{\pi}$ $(k{=}0)$ $\frac{1}{2}k$ $(k{>}0)$

Tabela 1: Polinoame ortogonale

Observaţia 1 *Pentru polinoamele Jacobi avem*

$$\alpha_k = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2k + \alpha + \beta)(2k + \alpha + \beta + 2)}$$

şi

$$\beta_0 = 2^{\alpha+\beta+1} B(\alpha+1, \beta+1),$$
$$\beta_k = \frac{4k(k+\alpha)(k+\alpha+\beta)(k+\beta)}{(2k+\alpha+\beta-1)(2k+\alpha+\beta)^2(2k+\alpha+\beta+1)}, \quad k > 0.$$

Probleme propuse.

1. Să se gasească aproximanta discretă prin metoda celor mai mici pătrate pentru ponderea w(x)=1 şi baza $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

2. Un asteroid ce orbitează în jurul Soarelui a putut fi observat timp de câteva zile înainte să dispară. Iată 10 observaţii

$x_{1:5}$	-1.024940	-0.949898	-0.866114	-0.773392	-0.671372
$x_{6:10}$	-0.559524	-0.437067	-0.302909	-0.159493	-0.007464
$y_{1:5}$	-0.389269	-0.322894	-0.265256	-0.216557	-0.177152
$y_{6:10}$	-0.147582	-0.128618	-0.121353	-0.127348	-0.148895

Se doreşte calcularea traiectoriei pe baza acestor observaţii pentru a putea prevedea situaţia când orbita va fi din nou vizibilă. Se presupune un model elipsoidal pentru orbită

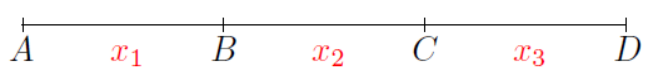
$$x^2 = ay^2 + bxy + cx + dy + e.$$

El ne conduce la un sistem supradeterminat, care trebuie rezolvat în sensul celor mai mici pătrate pentru a determina parametrii a, b, c, d, e. Realizaţi o estimare a erorii şi un test de încredere în model. Faceţi acelaşi lucru pentru modelul parabolic

$$x^2 = ay + e.$$

Care este mai probabil?

3. La măsurarea unui segment de drum, presupunem că am efectuat 5 măsurători



$$AD = 89m, \ AC = 67m, \ BD = 53m, \ AB = 35m \text{ şi } CD = 20m,$$

Să se determine lungimile segmentelor $x_1 = AB$, $x_2 = BC$ şi $x_3 = CD$.

4. Datele următoare dau populaţia SUA (în milioane) determinată la recensăminte de US Census, între anii 1900 şi 2010. Dorim să modelăm populaţia şi să o estimăm pentru anii 1975 şi 2010.

An	Populaţia	An	Populaţia
1900	75.995	1960	179.320
1910	91.972	1970	203.210
1920	105.710	1980	226.510
1930	123.200	1990	249.630
1940	131.670	2000	281.420
1950	150.700	2010	308.790

Modelaţi populaţia printr-un model polinomial de gradul 3

$$y = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3,$$

şi printr-un model exponenţial

$$y = K e^{\lambda t}.$$

Probleme suplimentare

1. Să se gasească aproximanta discretă prin metoda celor mai mici pătrate pentru ponderea $w(x) = 1$ şi baza formata din polinoamele Cebîşev de speţa I. Produsul scalar are forma

$$(g, h) = \sum_{k=1}^{n+1} g(\xi_k) h(\xi_k),$$

unde $\xi_k,\ k = 1, \ldots, n+1$ sunt rădăcinile polinomului Cebîşev de speţa I T_{n+1}.

2. Se dă un polinom prin coeficienţii săi relativ la o bază ortogonală $\{\pi_j\}$:

$$p(t) = \sum_{i=0}^{n} c_i \pi_i(t).$$

Să se dea o metodă de evaluare analoagă schemei lui Horner. (*Indicaţie*: se va folosi relaţia de recurenţă şi coeficienţii ei.)