# Metode de interpolare bazate pe diferenţe divizate

Radu Trîmbiţaş

24 martie 2020

## 1 Forma Newton a polinomului de interpolare Lagrange

Algoritmul nostru se bazează pe forma Newton a polinomului de interpolare Lagrange:

$$(N_m f)(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{m} f[x_0, \ldots, x_k] \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i), \tag{1}$$

şi formula iterativă:

$$(N_k f)(x) = (N_{k-1} f)(x) + (x - x_0)...(x - x_{k-1}) f[x_0, ..., x_k], \qquad k = 1, ..., m,$$
$$(N_0 f)(x) = f(x_0).$$

Notaţia $f[x_0, \ldots, x_k]$ înseamnă diferenţa divizată de ordinul $k$ a funcţiei $f$ cu nodurile $x_0$, ..., $x_k$.

Calculul diferenţelor divizate se poate face în formă tabelară cu algoritmul:

**Intrare:** $x_0$, $x_1$, ..., $x_m$, $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_m)$, ca primă coloană $Q_{0,0}$, $Q_{1,0}$, ..., $Q_{n,0}$ a tabelei $Q$.

**Ieşire:** numerele $Q_{0,0}$, $Q_{1,1}$, ..., $Q_{n,n}$, unde $Q_{i,i} = f[x_0, ..., x_i]$.

**P1.** for $i = 1, 2, ..., n$ do

for j=1,2,...,n do

$$Q_{i,j} := \frac{Q_{i,j-1} - Q_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$$

**P2.** returnează $Q_{0,0}$, $Q_{1,1}$, ..., $Q_{n,n}$.

**Exemplul 1.** Fie funcţia dată mai jos (tabela 1); dorim să aproximăm $f(1.5)$ utilizând polinomul de interpolare Newton. Diferenţele divizate apar pe prima linie a tabelei. Polinomul Newton corespunzător este

$$\begin{aligned}(N_4 f)(x) = 0.7651977 - 0.4837057(x-1.0) - 0.1087339(x-1.0)(x-1.3)+\\ 0.658784(x-1.0)(x-1.3)(x-1.6)+\\ 0.0018251(x-1.0)(x-1.3)(x-1.6)(x-1.9).\end{aligned}$$

Se verifică uşor că $(N_4 f)(1.5) = 0.5118200$.

| $x_i$ | $f(x_i)$ | $\mathcal{D}^1$ | $\mathcal{D}^2$ | $\mathcal{D}^3$ | $\mathcal{D}^4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.0 | 0.7651977 | -0.4837057 | -0.1087339 | 0.6587840 | 0.0018251 |
| 1.3 | 0.6200860 | -0.5489460 | -0.0494433 | 0.0680685 | |
| 1.6 | 0.4554022 | -0.5786120 | 0.0118183 | | |
| 1.9 | 0.2818186 | -0.5715210 | | | |
| 2.2 | 0.1103623 | | | | |

Tabela 1: Date pentru exemplul 1

Într-o implementare practică a algoritmului este convenabil să se sorteze în prealabil nodurile.

**Intrare:** $x_0$, $x_1$, ..., $x_m$, $f(x_0)$, $f(x_1)$, ..., $f(x_m)$, $x$.

**Ieşire:** Valoarea $P_i$ a polinomului de interpolare Newton.

**P1.** Sortează $x_i$ crescător după $a_i = |x_i - x|$.

**P2.** $D_{0,0} := f(x_i); P_0 := D_{0,0}; S_1 := 1;$

**P3.** for $i = 1, ..., m$ do

**P3.1.** $D_{i,1} := f(x_i);$

**P3.2.** for $j = 0, ..., i-1$ do $y_{i,j} := x_i - x_j$

**P3.3.** for $j = 1, ..., i$ do

$$D_{i,j} := \frac{D_{i,j-1} - D_{i-1,j-1}}{y_{i,i-j+1}}.$$

**P3.4.** $S_i := S_{i-1} * a_{i-1}$; $P_i := P_{i-1} + S_i * D_{i,1}$;

**P3.5.** if $|P_i - P_{i-1}| < \varepsilon$ go to P4.

**P4.** returnează $P_i$.

## 2 Interpolare Hermite

Fie $x_k \in [a,b]$, $k = 0, \ldots, m$, $x_i \neq x_j$ pentru $i \neq j$, $r_k \in \mathbb{N}$, $k = 0, \ldots, m$, şi $f : [a,b] \to R$ astfel încât $\exists\, f^{(j)}(x_k)$, $k = 0, \ldots, m$, $j = 0, \ldots, r_k$. Problema de interpolare Hermite cere determinarea unui polinom $P$ de grad minim, care verifică

$$P^{(j)}(x_k) = f^{(j)}(x_k), \qquad k = 0, \ldots, m, j = 0, \ldots, r_k.$$

Fie $n + 1 = m + r_0 + ... + r_m = (r_0 + 1) + ... + (r_m + 1)$. Polinomul de interpolare Hermite are expresia:

$$(H_n f)(x) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{r_k} h_{kj}(x) f^{(j)}(x_k), \tag{2}$$

unde $h_{kj}$ sunt polinoamele fundamentale Hermite date de

$$h_{kj}(x) = \frac{(x - x_k)^j}{j!} u_k(x) \sum_{\nu=0}^{r_k - j} \frac{(x - x_k)^\nu}{\nu!} \left[ \frac{1}{u_k(x)} \right]^{(\nu)}_{x = x_k}, \tag{3}$$

şi

$$u(x) = \prod_{k=0}^{m} (x - x_k)^{r_k},$$
$$u_k(x) = \frac{u(x)}{(x - x_k)^{r_k}}.$$

Expresia restului este:

$$(R_n f)(x) = \frac{u(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \qquad \xi \in (\alpha, \beta)$$

unde $\alpha = \min(x, x_0, \ldots, x_m)$, $\beta = \max(x, x_0, \ldots, x_m)$.

Vom da o metodă de calcul a polinomului de interpolare Hermite cu noduri duble dedusă din polinomul de interpolare Newton. Dându-se $x_i$ şi $f(x_i)$, $f'(x_i)$, $i = 0, \ldots, m$, definim secvenţa $z_0$, $z_1$, $\ldots$, $z_{2m+1}$

$$z_{2i} = z_{2i+1} = x_i, \qquad i = 0, \ldots, m.$$

Construim acum tabela de diferenţe divizate a lui $f$ pentru nodurile $z_i$, $i = 0, \ldots, 2m+1$. Deoarece $z_{2i} = z_{2i+1} = x_i$ pentru $i = 0, \ldots, m$, $f[z_{2i}, z_{2i+1}]$ este o diferenţă divizată cu noduri duble şi este egală cu $f'(x_i)$, deci în locul diferenţelor divizate de ordinul I $f[z_0, z_1]$, $f[z_2, z_3]$, ..., $f[z_{2m}, z]$ vom utiliza derivatele $f'(x_0)$, $f'(x_1)$,..., $f'(x_n)$. Celelalte diferenţe divizate se obţin în mod obşnuit, aşa cum arată tabela de mai jos. Acest algoritm se poate extinde şi la alte tipuri de interpolare Hermite. Se pare că metoda este datorată lui Powell.

| $z$ | $\mathcal{D}^0$ | $\mathcal{D}^1$ | $\mathcal{D}^2$ |
|---|---|---|---|
| $z_0 = x_0$ | $f[z_0] = f(x_0)$ | $f[z_0, z_1] = f'(x_0)$ | $f[z_0, z_1, z_2]$ |
| $z_1 = x_0$ | $f[z_1] = f(x_0)$ | $f[z_1, z_2]$ | $f[z_1, z_2, z_3]$ |
| $z_2 = x_1$ | $f[z_2] = f(x_1)$ | $f[z_2, z_3] = f'(x_1)$ | $f[z_2, z_3, z_4]$ |
| $z_3 = x_1$ | $f[z_3] = f(x_1)$ | $f[z_3, z_4]$ | $f[z_3, z_4, z_5]$ |
| $z_4 = x_2$ | $f[z_4] = f(x_2)$ | $f[z_4, z_5] = f'(x_2)$ | |
| $z_5 = x_2$ | $f[z_5] = f(x_2)$ | | |

**Algoritmul de interpolare Hermite.** Calculează coeficienţii polinomului de interpolare Hermite (diferenţele divizate) a lui $f$ cu nodurile duble $x_k \in [a, b]$, $k = 0, ..., m$.

**Intrare.** $x_0, ..., x_m, f(x_0), ..., f(x_m), f'(x_0), ..., f'(x_m)$.

**Ieşire.** Numerele $Q_{0,0}$, $Q_{1,1}$, ..., $Q_{2m+1,2m+1}$ (diferenţele divizate de pe prima linie a tabelei), unde

$$(H_{2m+1}f)(x) = Q_{0,0} + Q_{1,1}(x - x_0) + Q_{2,2}(x - x_0)^2 + Q_{33}(x - x_0)^2(x - x_1) + Q_{44}(x - x_0)^2(x - x_1)^2 + \cdots + Q_{2m+1,2m+1}(x - x_0)^2(x - x_1)^2 \ldots (x - x_{m-1})^2(x - x_m).$$

**P1.** for $i = 0, ..., m$ do paşii P2 şi P3.

**P2.** $z_{2i} := x_i; z_{2i+1} := x_i$; $Q_{2i,0} := f(x_i)$; $Q_{2i+1,0} := f(x_i)$; $Q_{2i+1,1} := f'(x_i)$;

**P3.** if $i \neq 0$ then $Q_{2i,1} = \frac{Q_{2i,0} - Q_{2i-1,0}}{z_{2i} - z_{2i-1}}$.

**P4.** for $i = 2, 3, ..., 2m + 1$ do

for j=2,3,..., i do $Q_{i,j} = \frac{Q_{i,j-1} - Q_{i-1,j-1}}{z_i - z_{i-j}}$

**P5.** Extrage $Q_{0,0}$, $Q_{1,1}$, ..., $Q_{2m+1,2m+1}$. Stop.

**Exemplu**. Fie datele de intrare

| $k$ | $x$ | $f(x)$ | $F\prime(x)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1.3 | 0.6200860 | -0.5220232 |
| 1 | 1.6 | 0.4554022 | -0.5698959 |
| 2 | 1.9 | 0.2818186 | -0.5811571 |

Utilizând diferenţele divizate se obţine(datele de intrare sunt subliniate):

$$\begin{aligned} H_5(1.5) = {} & 0.6200860 + (1.5-1.3)(-0.5220232) + (1.5-1.3)^2(-0.897427) + \\ & (1.5-1.3)^2(1.5-1.6)(0.0663657) + \\ & (1.5-1.3)^2(1.5-1.6)^2(1.5-1.9)(-0.0027738) \\ & = 0.5118277 \end{aligned}$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.3 | <u>0.6200860</u> | <u>-0.5220232</u> | -0.0897427 | 0.0663657 | 0.0026663 | -.0027738 |
| 1.3 | <u>0.6200860</u> | -0.5489460 | -0.0698330 | 0.0679655 | 0.0010020 | |
| 1.6 | <u>0.4554022</u> | <u>-0.5698959</u> | -0.0290937 | 0.0685667 | | |
| 1.6 | <u>0.4554022</u> | -0.5786120 | -0.0084837 | | | |
| 1.9 | <u>0.2818186</u> | <u>-0.5811571</u> | | | | |
| 1.9 | <u>0.2818186</u> | | | | | |

# 3 Probleme

1. Implementaţi o rutină pentru calculul valorilor polinomului de interpolare Hermite cu noduri duble, dându-se punctele în care se face evaluarea, nodurile, valorile funcţiei şi ale derivatei în noduri.

2. Reprezentaţi pe acelaşi grafic $f$ şi polinomul său de interpolare Hermite.

3. Scrieţi o rutină care reprezintă grafic o cubică parametrică Hermite (o curbă care trece prin două puncte date şi are în acele puncte tangente date).

# 4 Probleme practice

1. Pentru $f(x) = e^x$ şi nodurile de interpolare 0, 1, 2, aproximaţi $f(0.25)$ prin interpolare Hermite şi comparaţi rezultatul cu cel obţinut prin interpolare Lagrange. Daţi o delimitare a erorii. Comparaţi cu rezultatul furnizat de software-ul utilizat.

2. Utilizaţi valorile date mai jos pentru a aproxima $\sin 0.34$ utilizând interpolarea Hermite.

| $x$ | $\sin x$ | $(\sin x)' = \cos x$ |
|---|---|---|
| 0.30 | 0.29552 | 0.95534 |
| 0.32 | 0.31457 | 0.94924 |
| 0.35 | 0.34290 | 0.93937 |

Daţi o delimitare a erorii şi comparaţi-o cu eroarea exactă. Adăugaţi datele pentru nodul $x = 0.33$ şi refaceţi calculele.

3. Un automobil care se deplasează pe un drum drept este cronometrat în mai multe puncte. Datele de observaţie se dau în tabela de mai jos. Utilizaţi interpolarea Hermite pentru a prevedea poziţia şi viteza automobilului la momentul $t = 10$.

| Timpul | 0 | 3 | 5 | 8 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|
| Distanţa | 0 | 225 | 383 | 623 | 993 |
| Viteza | 75 | 77 | 80 | 74 | 72 |

# 5 Probleme suplimentare

1. Implementaţi interpolarea Hermite pentru noduri de multiplicitate arbitrară. Intrare: nodurile $x_k$, multiplicităţile $r_k$, valorile $f^{(j)}(x_k)$, $k = 0, \ldots, m$, $j = 0, \ldots, r_k$, punctul (sau punctele) $t$ în care se face evaluarea. Ieşire: valorile polinomului de interpolare în punctul (sau punctele $t$). (Indicaţie: folosiţi pentru valorile funcţie şi derivatelor un tablou de celule.)