Interpolare Lagrange

Radu Trîmbiţaş

20 martie 2020

1 Forma clasică

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x_i \in [a,b]$, $i = 0,\ldots,m$. Dacă $x_i \neq x_j$, pentru $i \neq j$, atunci există un polinom unic de gradul m (numit polinomul de interpolare Lagrange), astfel încât:

$$(L_m f)(x_i) = f(x_i), i = 0,\ldots,m.$$

Formula de interpolare Lagrange este

$$f = L_m f + R_m f,$$

unde L_m este polinomul de interpolare Lagrange:

$$\left(L_m f\right)(x) = \sum_{k=0}^{m} \ell_k(x) f(x_k), \tag{1}$$

ℓ_k sunt polinoamele fundamentale de interpolare Lagrange

$$\ell_k(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{m} (x - x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{m} (x_k - x_j)}, \tag{2}$$

iar R_m este termenul rest:

$$\left(R_m f\right)(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_m)}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x). \tag{3}$$

Dacă valorile funcţiei sunt tabelate, evaluarea lui ℓ_k necesită $2(n-1)$ înmulţiri, o împărţire şi $2n$ scăderi. Întreaga evaluare necesită $2n(n+1)$ * |/ şi $n(2n+3)$ +|-.

2 Algoritmul lui Aitken

Uneori gradul este necunoscut sau precizia dorită poate fi atinsă utilizând un număr mai mic de noduri. Să introducem notaţiile:

$$\begin{aligned}
\left(L_{m-1}f\right)_{1,m}(x) &= \sum_{k=1}^{m} \ell_k(x) f(x_k), \\
\left(L_{m-1}f\right)_{0,m-1}(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} \ell_k(x) f(x_k), \qquad (4)\\
\left(L_{m}f\right)_{0,m}(x) &= \sum_{k=0}^{m} \ell_k(x) f(x_k).
\end{aligned}$$

Algoritmul lui Aitken se bazează pe relaţia

$$\left(L_m f\right)_{0,m}(x) = \frac{\begin{vmatrix} \left(L_{m-1}f\right)_{1,m}(x) & x_0 - x \\ \left(L_{m-1}f\right)_{0,m-1}(x) & x_m - x \end{vmatrix}}{x_m - x_0}.$$

Metoda generează tabela următoare:

$$\begin{array}{llllllll}
x_0 & f_{0,0} & & & & & & \\
x_1 & f_{1,0} & f_{1,1} & & & & & \\
x_2 & f_{2,0} & f_{2,1} & f_{22} & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & & \\
x_i & f_{i,0} & f_{i,1} & f_{i,2} & \dots & f_{i,i} & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \\
x_n & f_{n,0} & f_{n,1} & f_{n,2} & \dots & f_{n,i} & \dots & f_{n,n}
\end{array}$$

unde $f_{i,0} = f(x_i), \quad i = 0, ..., m$, şi

$$f_{i,j+1} = \frac{1}{x_i - x_j} \begin{vmatrix} f_{j,j} & x_j - x \\ f_{i,j} & x_i - x \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Se verifică uşor că $(L_i f)(x) = f_{i+1,i+1}$, $i = 0, \dots, n-1$, datorită ecuaţiei (**??**). Dacă interpolarea Lagrange converge, atunci $(f_{i,i})_{i\in\mathbb{N}}$ converge către $f(x)$ şi $|f_{i,i} - f_{i-1,i-1}| \to 0$ când $i \to \infty$, deci relaţia $|f_{i,i}$ - $f_{i-1,i-1}| \le \varepsilon$ ar putea fi utilizată drept criteriu de oprire.

Algoritmul poate fi accelerat dacă sortăm nodurile crescător după distanţa lor la x, i.e. $|x_i - x| \le |x_j - x|$, dacă $i < j$.

Intrare: $m \in N$, x, x_i, $f_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, m$, $\varepsilon > 0$.
*Ie*şire: $f_{i,i}$.
P1. Sortează x_i crescător după $a_i = |x - x_i|$.
P2. For $i = 0, ..., m$ set $f_{i,1} := f(x_i)$.
P3. For $i = 1, ..., m$ do

P3.1. For $j = 0, ..., i-1$ do
$y_{i,j} := x_i - x_j$;
$f_{i,j+1} := ((x - x_i) * f_{jj} - (x - x_j) * f_{ij})/y_{ij}$;
P3.2. If $|f_{i,i} - f_{i-1,i-1}| \leq \varepsilon$ go to P4.
P4. Extrage $f_{i,i}$.

3 Interpolare Lagrange baricentrică

Forma clasică a interpolării Lagrange are următoarele dezavantaje:

1. fiecare evaluare a lui $p(x)$ necesită $\Theta(m^2)$ adunări şi înmulţiri;
2. adăugarea unei noi perechi de date (x_{m+1}, f_{m+1}) necesită reluarea tuturor calculelor.
3. procesul de calcul este numeric instabil.

Metoda lui Newton, odată ce s-a generat tabele de diferenţe divizate, necesită un timp $\Theta(m)$, dar este instabilă.

3.1 O formulă Lagrange îmbunătăţită

Notăm cu $f_i = f(x_i)$. Vom rescrie formulele (1)+(2) astfel ca $(L_m f)(x)$ să poată fi evaluat şi actualizat cu $O(m)$ operaţii. Introducând

$$\ell(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_m) \tag{6}$$

ℓ_j se poate scrie ca $\ell_j(x) = \ell(x)/(x - x_j)$. Definind ponderile baricentrice prin

$$w_j = \frac{1}{\prod\limits_{k \neq j} (x_j - x_k)}, \qquad j = 0, \dots, m, \tag{7}$$

adică, $w_j = 1/\ell'(x_j)$, putem scrie ℓ_j sub forma

$$\ell_j(x) = \ell(x) \frac{w_j}{x - x_j}.$$

Acum PIL se scrie

$$(L_m f)(x) = \ell(x) \sum_{j=0}^{m} \frac{w_j}{x - x_j} f_j. \tag{8}$$

Avantajul este că putem calcula interpolantul Lagrange cu o formulă ce necesită $O(m^2)$ flops pentru calculul unor cantităţi independente de x, numerele w_j, urmate de $O(m)$ flops pentru evaluarea lui p, odată ce aceste numere sunt cunoscute.

Din (8) rezultă că actualizarea polinomului de interpolare la inserţia unui nod nou necesită următoarele calcule:

- se împarte fiecare w_j, $j = 0..m$, prin $x_j - x_{m+1}$ (un flop pentru fiecare punct), cu un cost de $m + 1$ flops;
- se calculează w_{m+1} cu formula (7) cu alte $m + 1$ flops.

3.2 Metoda baricentrică

Interpolând funcţia constantă 1 obţinem

$$1 = \sum_{j=0}^{m} \ell_j(x) = \ell(x) \sum_{j=0}^{m} \frac{w_j}{x - x_j.} \tag{9}$$

Împărţind (8) cu expresia de mai sus şi simplificând cu $\ell(x)$, obţinem

$$p(x) = \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{m} \frac{w_j}{x - x_j} f_j}{\displaystyle\sum_{j=0}^{m} \frac{w_j}{x - x_j}}, \tag{10}$$

numită *formula baricentrică.*

La fel ca în (8), în (10) se poate adăuga o nouă pereche de date (x_{m+1}, f_{m+1}) şi actualiza w_j în $O(m)$ flops.

3.3 Distribuţii remarcabile

În cazul unor noduri particulare se pot da formule explicite pentru ponderile baricentrice w_j. Pentru noduri echidistante în intervalul $[-1, 1]$, la distanţa $h = 2/m$, se obţine $w_j = (-1)^m \binom{m}{j} / (h^m m!)$, care după anularea (simplificarea) factorilor independenţi de j ne dă

$$w_j = (-1)^j \binom{m}{j}. \tag{11}$$

Acelaşi rezultat se obţine şi pentru un interval arbitrar $[a, b]$, deoarece formula originală pentru w_j se înmulţeşte cu $2^m (b - a)^{-m}$, dar acest factor poate fi înlăturat prin simplificare.

Familia de *puncte Cebîşev* se poate obţine proiectând puncte egal spaţiate pe cercul unitate pe intervalul $[-1, 1]$. Pornind de la formula

$$w_j = \frac{1}{\ell'(x_j)}, \tag{12}$$

se pot obţine formule explicite pentru ponderile w_j.

Punctele Cebîşev de speţa I sunt date de

$$x_j = \cos \frac{(2j + 1)\,\pi}{2m + 2}, \qquad j = 0, \ldots, m.$$

Simplificând factorii independenţi de j se obţine

$$w_j = (-1)^j \sin \frac{(2j + 1)\,\pi}{2m + 2}. \tag{13}$$

Punctele Cebîşev de speţa II sunt date de

$$x_j = \cos \frac{j\pi}{m}, \qquad j = 0, \dots, m,$$

iar ponderile corespunzătoare sunt

$$w_j = (-1)^j \, \delta_j, \qquad \delta_j = \begin{cases} 1/2, & j = 0 \text{ sau } j = m, \\ 1, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Dăm codul MATLAB pentru interpolarea Lagrange baricentrică

```
function ff=baryLagrange(x,y,xx)
%BARYLAGRANGE - barycentric Lagrange interpolation
%call ff=baryLagrange(x,y,xi)
%x -  nodes
%y - function values
%xx - interpolation points
%ff - values of interpolation polynomial


%compute weights
n=length(x)-1;
w=ones(1,n+1);
for j=1:n+1
    c(j)=prod(x(j)-x([1:j-1,j+1:n+1]));
end
c=1./c;
numer = zeros(size(xx));
denom = zeros(size(xx));
exact = zeros(size(xx));
for j=1:n+1
    xdiff = xx-x(j);
    temp = c(j)./xdiff;
    numer = numer+temp*y(j);
    denom = denom+temp;
    exact(xdiff==0) = j;
end
ff = numer ./ denom;
jj = find(exact);
ff(jj) = y(exact(jj));
```

În cazul nodurilor Cebîşev de speţa a doua sursa MATLAB este

```
function ff=ChebLagrange(y,xx,a,b)
%CHEBLAGRANGE - Lagrange interpolation for Chebyshev points- barycentric
%call ff=ChebLagrange(y,xx,a,b)
%y - function values;
```

```
%xx - evaluation points
%a,b - interval
%ff - values of Lagrange interpolation polynomial

n = length(y)-1;
if nargin==2
    a=-1; b=1;
end
c = [1/2; ones(n-1,1); 1/2].*(-1).^((0:n)');
x = sort(cos((0:n)'*pi/n))*(b-a)/2+(a+b)/2;
numer = zeros(size(xx));
denom = zeros(size(xx));
exact = zeros(size(xx));
for j=1:n+1
    xdiff = xx-x(j);
    temp = c(j)./xdiff;
    numer = numer+temp*y(j);
    denom = denom+temp;
    exact(xdiff==0) = j;
end
ff = numer ./ denom;
jj = find(exact);
ff(jj) = y(exact(jj));
```

Probleme

1. Implementaţi o rutină pentru calculul valorilor polinomului de interpolare Lagrange când se dau punctele, nodurile şi valorile funcţiei în noduri.

2. Reprezentaţi grafic polinoamele fundamentale când se dau gradul şi nodurile.

3. Reprezentaţi pe acelaşi grafic f şi $L_m f$.

4. Dându-se x, f, m şi nodurile, aproximaţi $f(x)$ utilizând interpolarea Lagrange.

5. Implementaţi metoda baricentrică.

Probleme practice

1. Datele de mai jos dau populaţia SUA în perioada 1900 – 2000 (în milioane de locuitori)

t	y
1900	75.995
1910	91.972
1920	105.711
1930	123.203
1940	131.669
1950	150.697
1960	179.323
1970	203.212
1980	226.505
1990	249.633
2000	281.422
2010	308.786

Approximaţi populaţia din 1975 şi 2018.

2. Fie
$$f(x) = e^{x^2-1}.$$
Aproximaţi $f(1.25)$ utilizând valorile lui f în 1, 1.1, 1.2, 1.3 şi 1.4 şi daţi o delimitare a erorii.

3. Aproximaţi $\sqrt{115}$ cu 3 zecimale exacte prin interpolare Lagrange.

4. Daţi contraexemple pentru convergenţa interpolării Lagrange şi studiaţi-le grafic:

   (a) contraexemplul lui Runge $f : [-5, 5] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$;

   (b) contraexemplul lui Bernstein $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$;

   ambele cu noduri echidistante şi noduri Cebîşev de speţa a doua.