

UNIVERSITATEA "BABEȘ-BOLYAI" CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

ORIGINEA ȘI EVOLUȚIA CORPURILOR
CEREȘTI CE GRAVITEAZĂ ÎN VECINĂTATEA
ORBITEI TERESTRE

-teză de doctorat-

Ștefan Gh. Berinde

Conducător științific: Prof. Univ. Dr. **Vasile Ureche**

Iunie 2002

Cuprins

Introducere	iii
Abrevieri	vi
1 Descrierea populației de corpuri	1
1.1 Date observaționale	1
1.2 Selecție observațională	4
2 Dinamica apropiierilor strânse	7
2.1 Problema restrânsă a celor trei corpuri	7
2.1.1 Ecuațiile de mișcare	7
2.1.2 Integrala Jacobi	10
2.1.3 Criteriul Tisserand	12
2.1.4 Punctele Lagrange de echilibru	14
2.1.5 Ecuațiile lui Hill	16
2.2 Formalismul geometric a lui Öpik	17
2.2.1 Caracterizarea mișcării	17
2.2.2 Mișcarea în exteriorul sferei de acțiune planetară	18
2.2.3 Mișcarea în interiorul sferei de acțiune planetară	22
2.2.4 O hartă completă a modificării orbitale	24
3 Caracteristici ale evoluției dinamice pe termen lung	29
3.1 Comportament haotic	29
3.1.1 Haos în problema restrânsă circulară plană a celor trei corpuri	29
3.1.2 Exponenți Lyapounov	32
3.1.3 Efectul haosului asupra integrărilor numerice pe termen lung	36
3.2 Mișcări rezonante	37
3.2.1 Rezonanțe ale mișcării medii	37
3.2.2 Rezonanțe seculare	40
3.2.3 Mecanisme de protecție	42
3.3 Clasificări dinamice	45
3.3.1 Clasificarea după distanța minimă de intersecție orbitală	45
3.3.2 Clasificarea SPACEGUARD	47
4 Regiuni sursă și mecanisme dinamice de transport	49
4.1 Centura principală de asteroizi ca sursă a NEA	49
4.1.1 Structura dinamică a centurii de asteroizi	49
4.1.2 Mecanisme de transport spre interiorul sistemului solar	50
4.1.3 Rolul coliziunilor interasteroidale	52
4.1.4 Estimarea masei asteroizilor	60

4.2	Asteroidi NEA de origine cometară	63
4.2.1	Populații de corpuri în sistemul solar exterior	63
4.2.2	Difuzia haotică a corpurilor din centura lui Kuiper spre interiorul sistemului solar	65
5	Metode de estimare a probabilității de impact cu Pământul	71
5.1	Probabilități medii de impact	71
5.1.1	Probabilități extrapolate din frecvența apropiierilor strânse	71
5.1.2	Probabilități mediate de-a lungul orbitei	73
5.2	Probabilități intrinseci de impact	80
5.2.1	Determinarea regiunii de incertitudine orbitală	80
5.2.2	Propagarea regiunii de incertitudine orbitală	84
5.2.3	Analiza posibilității de impact în planul țintă	91
5.2.4	Identificarea și catalogarea apropiierilor strânse	93
5.2.5	Estimarea probabilității intrinseci de impact	94
5.2.6	Eșantionarea iterativă de tip Monte-Carlo	97
5.3	Cuantificarea pericolului de impact	101
5.3.1	Scara Torino	102
5.3.2	Scara Palermo	104
5.3.3	Consecințe ale fenomenului de impact	105
6	Pachetul de programe SolSyIn	109
6.1	Prezentarea pachetului	109
6.2	Metoda de integrare numerică Radau-Everhart	110
6.2.1	Descrierea modelului dinamic utilizat	110
6.2.2	Aspecte matematice	112
6.2.3	Algoritmul numeric	114
6.2.4	Controlul preciziei de integrare	115
6.3	Un exemplu numeric	117
	Listă de figuri	121
	Bibliografie	125
	Indice de termeni	131

Introducere

Sistemul solar este un loc fascinant din Univers. Imaginea sa de acum un secol, dominată de ordine, în care există câteva clase de corpuri cerești bine definite și ierarhic dispuse în spațiu, este astăzi mult schimbată. Numeroasele date observaționale, îmbogățite și de rezultate teoretice, înfățișează “noul” sistem solar ca pe o regiune tumultuoasă, în care milioane de corpuri interplanetare de diferite dimensiuni își urmează propriile destine orbitale, de cele mai multe ori haotice, în care captura gravitațională și procesul colizional sunt o realitate curentă.

Tehnica observațională avansată din zilele noastre transformă micile corpuri interplanetare din misterioasele puncte de lumină de altă dată în corpuri bine individualizate, fiecare cu propriile caracteristici fizice și dinamice, cu propria-i istorie și origine. O parte din aceste corpuri au orbite ce nu demult erau considerate cel puțin ciudate, permițându-le o apropiere de Pământ la distanțe deloc confortabile pentru noi oamenii.

Evoluția geologică a planetei noastre și chiar evoluția vieții de-a lungul timpului, se pare că au fost marcate de prezența acestei populații de corpuri în vecinătatea orbitei terestre. Pericolul unui impact nu a trecut, însă pe lângă efortul depus pentru catalogarea celor mai amenințătoare corpuri, umanitatea a întrezărit în acestea ținte ideale pentru misiuni spațiale de explorare și exploatare a resurselor lor. Și acest vis a devenit deja realitate, odată ce sonda spațială NEAR s-a așezat pe suprafața unuia dintre cei mai reprezentativi membri ai acestei populații, asteroidul Eros. Aceste corpuri poartă cu ele prin spațiu semnamente ale evoluției lor fizice timpurii, de la începutul formării sistemului solar, iar apropierea strânsă cu Pământul fac accesibilă observarea unor astfel de caracteristici, fundamentale pentru studiul cosmogonic al sistemului solar.

Problematika originii și evoluției corpurilor cerești din vecinătatea orbitei terestre este, prin excelență, un domeniu multidisciplinar vast. Lucrarea de față prezintă o sinteză a rezultatelor obținute în ultimii ani în acest domeniu, dezvoltând cu precădere acele părți ce au un bogat conținut matematic și în care autorul și-a adus contribuția.

Capitolul 1 face o prezentare sumară a populației de corpuri studiate, în urma datelor observaționale acumulate până în prezent, și sunt introduse principalele clasificări orbitale. Este subliniată apoi importanța efectului de selecție observațională, dându-se și o estimare a populației reale de corpuri, în cea mai mare parte încă nedescoperită.

Apropierea strânsă cu planetele sunt o caracteristică dinamică fundamentală a acestor corpuri și, din acest motiv, capitolul 2 al lucrării este dedicat în întregime studiului acestui fenomen. Sunt considerate două abordări clasice, una în cadrul problemei restrânse a celor trei corpuri și alta bazată pe formalismul geometric a lui Öpik. După analiza unor rezultate deja cunoscute [Carusi *et al.*, 1990], autorul extinde unele dintre ele, propunând în paragraful 2.2.4 o hartă completă a modificării orbitale în urma unei apropieri strânsă [Berinde, 2001a]. Aceasta constă în determinarea unor formule analitice de legătură între cele șase elemente orbitale ale unui corp dinaintea apropierii de planeta perturbatoare și cele dobândite în urma apropierii, pe baza ipotezelor simplificatoare ale lui Öpik. Această hartă își va găsi aplicabilitatea ulterior, în paragraful 4.2.2, unde se propune un model de difuzie a corpurilor din centura trans-neptuniană spre interiorul sistemului solar, bazat pe efectul cumulat al apropiierilor strânsă cu planetele gigante.

Evoluția dinamică a corpurilor cerești din vecinătatea orbitei terestre este abordată în capitolul 3. Se subliniază aici, în primul rând, caracterul haotic al acestor mișcări, cu implicații majore asupra caracterului determinist al simulărilor numerice. Aceste simulări constituie, de multe ori, singura modalitatea de a pune în evidență o anumită particularitate dinamică. Sunt descrise apoi fenomenele de rezonanță și mecanismele de protecție împotriva apropiierilor strânse, asociate lor. În urma unui studiu numeric extins, autorul identifică trei categorii de evoluții dinamice ale orbitelor acestor corpuri (paragraful 3.3.1), în funcție de comportamentul dinamic pe termen lung al distanței minime de intersecție orbitală cu Pământul: apropiere orbitală de scurtă durată, apropiere orbitală periodică și apropiere orbitală de lungă durată [Berinde, 1999b]. Apartenența unei orbite asteroidale la una din aceste categorii este o măsură a gradului de pericolozitate al orbitei respective, deoarece frecvența apropiierilor strânse cu planeta noastră, pe un interval dat de timp, va depinde de acest comportament orbital.

Identificarea regiunilor sursă pentru corpurile din vecinătatea orbitei terestre și a mecanismelor dinamice de transport către Pământ reprezintă unul dintre cele mai fascinante domenii de cercetare din cadrul mecanicii cerești, iar rezultatele obținute în ultimii ani sunt răsunătoare. Capitolul 4 prezintă principalele ipoteze și argumente în acest sens, descriind rolul coliziunilor interasteroidale cuplate cu fenomenul de rezonanță, în expedierea de corpuri către Pământ. Componenta de origine cometary a populației de corpuri studiate este descrisă în a doua parte a capitolului. Aici, autorul propune modelul de difuzie haotică amintit mai sus, ce permite obținerea unor rezultate cu caracter statistic privind originea cometelor scurt-periodice în centura trans-neptuniană de corpuri [Berinde, 2001a]. Sunt estimate: frecvența apropiierilor strânse cu planetele gigante, procentul stărilor evolutive finale ale corpurilor în tranziție, precum și diferiți timpi dinamici de viață asociați lor. Aproximativ 42% din corpurile situate inițial în vecinătatea orbitei lui Neptun, ajung în regiunea cometary activă, devenind comete scurt-periodice.

Trebuie recunoscut faptul că un impuls major dat cercetării în acest domeniu îl constituie realul pericol pe care aceste corpuri îl reprezintă față de existența, aparent neperturbată, a civilizației umane pe Pământ. În capitolul 5 autorul își propune o incursiune în problematica determinării probabilității de impact cu Pământul, prezentând trei metode de calcul des utilizate în literatura actuală de specialitate, precum și exemple aplicate pe corpuri reale. Primele două metode de calcul, anume: probabilități extrapolate din frecvența apropiierilor strânse și probabilități mediate de-a lungul orbitei, dau estimări medii ale probabilității de impact, valabile pe intervale mari de timp. A treia metodă, mult mai complexă, izvorăște în mod natural din teoria calculului de orbită și se bazează pe propagarea în timp a regiunii inițiale de incertitudine a corpului în cauză. Propagarea acestei regiuni de incertitudine, în cadrul problemei restrânse circulare a celor trei corpuri, reprezintă contribuția autorului (în paragraful 5.2.2). Astfel, utilizarea formalismului geometric a lui Öpik permite evaluarea dispersiei incertitudinii orbitale a corpului în urma unei apropieri strânse, prin expresii analitice, precum și explicarea unui comportament oscilatoriu a incertitudinii în anomalia mijlocie [Berinde, 2001b], ce este specific multor asteroizi din vecinătatea orbitei terestre.

O componentă majoră în studiul întreprins în capitolul 5 al lucrării o reprezintă metoda de integrare Monte-Carlo, ce permite simularea caracterului neliniar de propagare a regiunii de incertitudine a unui asteroid. O contribuție a autorului este și paragraful 5.2.6, unde se propune o metodă de eșantionare iterativă de tip Monte-Carlo a regiunii inițiale de incertitudine, în vederea determinării impactorilor virtuali și a estimării probabilității intrinseci de impact [Berinde, 2002]. Metoda se bazează pe o analiză de natură topologică în spațiul hexadimensional al elementelor orbitale, ce are menirea de a izola, într-un proces iterativ, mulțimea impactorilor virtuali. Prin evaluarea funcției de repartiție a elementelor orbitale în ultima regiune eșantionată, se va putea obține și o estimare a probabilității de impact. Metoda folosește un număr redus de corpuri de eșantionare, dobândind astfel un caracter practic de aplicabilitate. Ea este exemplificată apoi pe doi asteroizi, 2000 SG₃₄₄ și 2001 BA₁₆. Capitolul se încheie cu prezentarea a două metode

de cuantificare a pericolului de impact (scara Torino și scara Palermo), iar în final se face o evaluare a consecințelor fenomenului de impact la nivelul scoarței terestre.

Progresul științific înregistrat în ultimii ani în acest domeniu se datorează, în mare măsură, dezvoltării tehnicii de calcul. Aceasta a permis abordarea numerică a unor procese dinamice la scară mare de timp, ce sunt intens consumatoare de resurse informatice. O parte din rezultatele expuse în lucrare se bazează pe astfel de simulări numerice și, din acest motiv, a devenit o necesitate realizarea unui pachet de programe pentru manipularea sistemelor dinamice de corpuri. Pachetul de programe SolSyIn, prezentat în capitolul 6 al lucrării, are la bază integratorul numeric Radau-Everhart, optimizat pentru tratarea cu acuratețe a apropiierilor strânse, la care se adaugă o serie de algoritmi numerici, ce sunt folosiți la evaluarea unor parametri dinamici ce intervin pe parcursul lucrării și la generarea graficelor ce descriu evoluții dinamice. Acest software a fost creat de autorul lucrării de față, fiind disponibil pe internet, împreună cu o documentație bogată, la adresa dată în referința bibliografică [Berinde, 2001c].

*

La finalul acestor rânduri, doresc să aduc sincere mulțumiri conducătorului științific prof. univ. dr. Vasile Ureche, pentru încrederea acordată și atenta îndrumare manifestată pe parcursul stagiului de doctorat, precum și pentru sugestiile valoroase ce au contribuit la conturarea tezei în forma sa actuală. De asemenea, multă recunoștință colectivului Catedrei de Mecanică și Astronomie a Facultății noastre și colectivului de cercetători din filiala Cluj a Institutului Astronomic al Academiei Române, în mijlocul cărora am găsit un mediu propice realizării acestei lucrări.

Abrevieri

ECA (Earth-crossing asteroid) - asteroid a cărui orbită “traversează” orbita terestră

LCE (Lyapounov characteristic exponent) - exponent caracteristic Lyapounov

LOV (line of variation) - linia de variație (a regiunii de incertitudine)

NEA (near-Earth asteroid) - asteroid apropiat de Pământ

MOID (minimal orbital intersection distance) - distanța minimă de intersecție orbitală

PHA (potentially hazardous asteroid) - asteroid potențial periculos

UA - unitatea astronomică de distanță (distanța medie Pământ-Soare, aproximativ 150 milioane km)

Capitolul 1

Descrierea populației de corpuri

Conceptul de *vecinătate a orbitei terestre*, sau spațiu din apropierea (orbitei) Pământului (“near-Earth space”) este folosit în literatura de specialitate, de mai bine de două decenii, pentru a desemna acea regiune a sistemului solar unde influența gravitațională a Pământului asupra mișcării heliocentrice a unui corp este semnificativă. Această influență gravitațională este înțeleasă aici ca un fenomen cu acțiune pe termen lung, adică pe intervale de timp mai mari decât perioada de precesie orbitală a corpului.

O definiție riguroasă a conceptului mai sus amintit se poate da în cadrul spațiului elementelor orbitale și anume, prin inegalitățile $q < 1.3$ UA și $Q > 0.983$ UA [Bottke *et al.*, 2000], unde q reprezintă distanța periheliului unei orbite heliocentrice, iar Q distanța afeliului său. Corpurile mici situate pe astfel de orbite spunem că formează populația de corpuri din vecinătatea orbitei terestre, acest prim capitol al lucrării fiind dedicat descrierii particularităților acestei populații.

1.1 Date observaționale

Populația de corpuri cerești din vecinătatea orbitei terestre conține două categorii de corpuri cu dimensiuni apreciabile: asteroizi și comete. În paragraful 4.2.1 al lucrării sunt enunțate principalele caracteristici ce disting aceste două tipuri de corpuri cerești. Meteorozii (sau corpurile meteorice), care sunt fragmente de dimensiuni mici (de ordinul μm - cm) desprinse din asteroizi sau comete în urma proceselor colizionale sau de natură termică, pot fi considerați din punct de vedere dinamic o componentă a populației respective, însă ei nu fac subiectul lucrării de față.

Asteroizii reprezintă cea mai numeroasă componentă a populației de corpuri din vecinătatea orbitei terestre, fiind numiți în mod colectiv *asteroizi apropiați de Pământ*, sau *asteroizi NEA* (“near-Earth asteroids”). Așa cum vom specifica în paragraful 4.2.1, populația de asteroizi NEA cuprinde și nucleeele cometare stinse, și astfel apare noțiunea de *asteroizi NEA de origine cometară*. Cometele active, în schimb, sunt mult mai puține la număr și mai ușor de identificat observațional, datorită strălucirii lor mari cu ocazia apropierii de periheliu. Cele cu perioadă orbitală scurtă (sub 20 de ani) sunt deja descoperite în mare parte, iar cometele cu perioadă orbitală lungă, sau cele situate pe orbite hiperbolice, ajung foarte rar în sistemul solar interior, și din acest motiv un studiu sistematic al întregii populații este imposibil de realizat.

Având în vedere disproporția dintre cele două categorii de corpuri amintite mai sus, pe parcursul lucrării vom identifica adesea un corp ceresc din vecinătatea orbitei terestre printr-un asteroid NEA. Vom prezenta mai jos principalele date observaționale ale acestei populații de asteroizi.

Scurtă istorie observațională

Primul asteroid NEA descoperit de umanitate este (433) Eros, în anul 1898, după care au urmat câteva descoperiri sporadice, încât în anul 1970 numărul lor a ajuns la 28. Apoi, rata descoperirilor s-a intensificat puțin datorită inițierii unui program observațional dedicat acestor asteroizi, numit NEAT (“Near-Earth Asteroid Tracking”). După anul 1990, intrarea în funcțiune a mai multor programe observaționale (Spacewatch, LINEAR, LONEOS, etc) bazate pe o tehnică observațională avansată (tehnica CCD), a condus la creșterea progresivă a ratei descoperirilor anuale (figura 1.1), precum și la creșterea magnitudinii limită de detectabilitatea a lor, de la 20^m la 29^m . Cei mai mici asteroizi NEA descoperiți au doar câțiva metri, unii dintre ei fiind suspecți că ar fi de origine artificială (sonde spațiale abandonate), având în vedere similitudinea orbitală cu planeta noastră (asteroizii 1991 VG și 2000 SG₃₄₄).

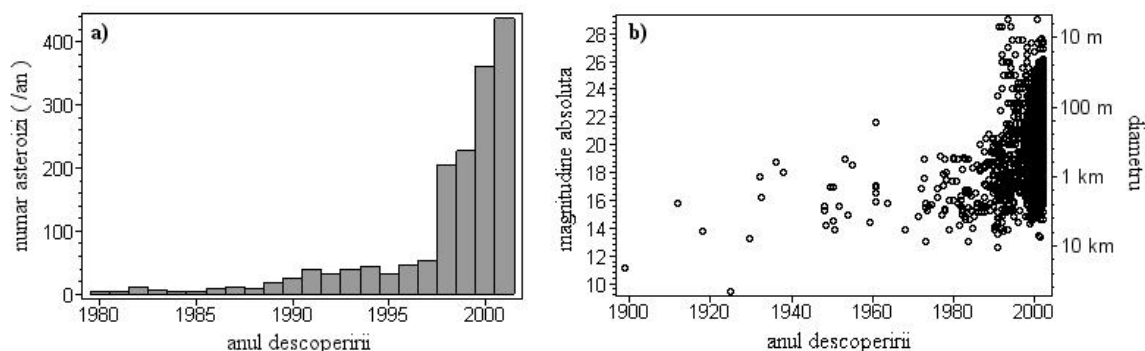


Figura 1.1. a) rata descoperirilor anuale de asteroizi NEA și b) distribuția în timp a acestor descoperiri în raport cu dimensiunea corpurilor.

Rata crescândă a descoperirilor anuale este rezultatul interesului tot mai mare manifestat de comunitatea astronomică internațională față de corpurile cerești ce gravitează în vecinătatea orbitei terestre. În ultimii ani, două evenimente majore au impulsionat cercetarea științifică în acest domeniu: (i) coliziunea dintre cometa Shoemaker-Levy 9 și planeta Jupiter, ce demonstrează că fenomenul colizional în sistemul solar este prezent și în zilele noastre și că energia eliberată într-un astfel de eveniment este imensă (echivalentul a milioane megatone TNT) și (ii) descoperirea unui crater subacvatic de dimensiuni apreciabile (cel puțin 180 km în diametru), numit “Chicxulub”, situat lângă peninsula Yucatan din golful Mexic, mărturie a unui probabil impact de proporții (cu un proiectil de aproape 10 km în diametru) ce a avut loc acum 65 milioane de ani, cauzând dispariția majorității speciilor de viețuitoare de pe Pământ [Sharpton și Marin, 1997].

Nu doar fenomenul colizional este cel care a impulsionat cercetarea în acest domeniu, ci și faptul că asteroizii NEA constituie ținte ideale pentru misiunile spațiale interplanetare, având în vedere particularitățile lor orbitale ce îi fac ușor de abordat, de cele mai multe ori cu un consum de energie mai mic decât cel necesar unei misiuni spațiale Pământ–Lună [Davis *et al.*, 1989]. Acești asteroizi pot fi considerați adevărate “comori orbitale”, apropierea regulată de Pământ oferind șansa exploatării resurselor lor minerale [Berinde *et al.*, 2001]. Primul asteroid NEA descoperit este acum și primul asteroid din vecinătatea orbitei terestre vizitat de o sondă spațială și, de asemenea, primul corp mic din sistemul solar pe suprafața căruia a fost plasat echipament de observație, de către sonda NEAR (“Near-Earth Asteroid Rendezvous”) în anul 2001.

Majoritatea datelor de observație la asteroizii NEA sunt de natură astrometrică, ele având ca scop principal determinarea orbitelor lor și apoi îmbunătățirea continuă a acestora. Date astrometrice precise și răspândite pe intervale mari de timp permit păstrarea la valori mici a incertitudinii lor orbitale (noțiune introdusă în capitolul 5). Acest lucru este esențial pentru

precizarea (și de cele mai multe ori înlăturarea) posibilității unui impact cu planeta noastră. Exemple grăitoare în acest sens sunt asteroizii 1997 XF₁₁ și 1999 AN₁₀, care au fost găsiți inițial ca potențiali impactori cu Pământul, însă îmbunătățirea ulterioară a orbitelor lor a înlăturat pentru un timp această ipoteză. Pe de altă parte, există exemplul asteroidului (29075) 1950 DA, a cărui orbită este determinată cu o precizie fără precedent pentru observațiile astrometrice la asteroizi. Ultimele măsurători radar efectuate cu ocazia apropierei strânse cu Pământul din anul 2001, a scos la lumină posibilitatea producerii unui impact la data de 16 martie 2880, cu o probabilitate deloc neglijabilă, aproximativ 1/300 [Giorgini *et al.*, 2002].

În ultimii ani, datele observaționale fotometrice, spectroscopice și radar, achiziționate cu ocazia apropiierilor strânse cu Pământul, vin să completeze cunoștințele noastre despre caracteristicile fizice ale acestei populații de corpuri. Astfel, se pare că acestea prezintă o largă diversitate mineralogică (structuri pietroase, fieroase sau de origine cometară) cu clase spectrale variate, mărturie a regiunilor sursă de formare diferite din care provin, și a traseelor evolutive distincte ale acestor corpuri [McFadden *et al.*, 1989]. Toate acestea constituie indicii importante în crearea unui scenariu cosmogonic consistent de formare al sistemului solar. Perioadele de rotație sunt în general rapide, evidențind forme neregulate și alungite, specifice fragmentelor colizionale. Din analiza curbelor de lumină s-au pus în evidență structuri binare, formate din două componente în contact, cum este asteroidul (4179) Toutatis, sau din două componente orbitând în jurul centrului comun de masă, la distanțe comparabile cu suma razelor lor, cum este asteroidul (4769) Castalia. Aceste structuri binare apar în urma procesului de coliziune interasteroidală cu reacumularea fragmentelor, proces studiat în capitolul 4 al lucrării.

Cometele care ajung în vecinătatea orbitei terestre se caracterizează prin viteze heliocentrice mari (datorită orbitelor lor puternic alungite) și din acest motiv, ele dobândesc viteze relative de impact mari, fiind capabile de distrugerii majore în cazul producerii unui impact cu Pământul, în ciuda structurii interne slabe a lor. Această structură slabă (formată din gheață, silicați și material organic) s-a pus în evidență prin observarea fragmentării unor nuclee cometare cu ocazia apropierei strânse a acestora de o planetă, inclusiv de planeta noastră. Caracteristicile fizice ale cometelor sunt mult mai puțin cunoscute decât cele ale asteroizilor, observațiile directe asupra unui nucleu cometar fiind dificile. Până în prezent, doar nucleul cometei Halley a fost observat, el fiind ținta mai multor misiuni spațiale cu ocazia ultimei apariții a cometei, în anul 1986. S-a evidențiat atunci un nucleu întunecat și cu formă neregulată, caracteristici ce ar putea fi specifice asteroizilor de origine cometară. [Weissman *et al.*, 1989]

Realizarea conexiunii dinamice dintre orbita unui curent meteoric și cea a unei comete, sau a conexiunii mineralogice dintre un meteorit căzut pe Pământ și un asteroid din vecinătatea orbitei terestre (numite corpuri părinte) constituie și ele probleme de larg interes în cercetarea mondială actuală.

Clasificări orbitale

Un asteroid NEA a cărui orbită “traversează” orbita Pământului (în sensul că uneori acesta se află în interiorul orbitei terestre, alteori în exteriorul său) poartă numele de *asteroid ECA* (“Earth-crossing asteroid”) [Rabinowitz *et al.*, 1994]. Datorită variațiilor seculare ale elementelor orbitale (în special precesiei argumentului periheliului) aceste orbite intersectează periodic orbita terestră, devenind potențiale traiectorii colizionale cu planeta noastră. În literatura de specialitate se dă uneori un sens mai clar acestei noțiuni și anume, ECA sunt acei asteroizi NEA capabili să intersecteze secțiunea eficace de coliziune a Pământului pe parcursul evoluției lor dinamice pe termen lung în vecinătatea orbitei terestre. Această definiție nu reușește însă să indice exact apartenența unui asteroid la această populație, deoarece nu există o metodă practică general valabilă pentru a pune în evidență, într-o manieră deterministă, o astfel de particularitate dinamică.

Din punct de vedere al geometriei orbitei, se disting trei grupuri de asteroizi NEA: grupul *Atens*, caracterizat prin semiaxa mare $a < 1$ UA și printr-o distanță la afeliu $Q > 0.983$ UA, grupul *Apollos*, caracterizat prin $a > 1$ UA și printr-o distanță la periheliu $q < 1.017$ UA, și grupul *Amors*, caracterizat prin $1.017 < q < 1.3$ UA. [Dvorak, 1999]. Regiunile din planul elementelor orbitale (e, a) , corespunzătoare acestor trei grupuri, sunt reprezentate în figura 1.3.

După cum se observă, această clasificare este raportată la orbita Pământului, deoarece distanțele de 1.017 UA, respectiv de 0.983 UA, reprezintă distanțele la afeliul, respectiv la periheliul orbite terestre. Asteroizii de tip *Atens* și *Apollos* au orbite ce traversează orbita terestră (sunt de tip ECA conform definiției acceptate mai sus), însă orbitele celor din prima categorie pătrund mai adânc în interiorul orbitei terestre ($1.017 - q > Q - 0.983$). Folosind relația (2.61) din capitolul următor, obținem că asteroizii *Apollos* se caracterizează prin viteze heliocentrice la nivelul orbitei terestre mai mari decât vitezele asteroizilor de tip *Atens* (sau decât viteza Pământului). Orbitele asteroizilor de tip *Amors* sunt situate în întregime în exteriorul orbitei terestre. Fără îndoială, există și asteroizi cu orbite situate în întregime în interiorul orbitei terestre ($Q < 0.983$ UA), însă datorită unui puternic efect de selecție observațională, până în prezent nu a fost descoperit nici un astfel de corp.

Numele celor trei grupe provin de la asteroizii (2062) *Aten*, (1862) *Apollo* și (1221) *Amor*, a căror orbite sunt considerate de referință. Evoluția dinamică pe termen lung a unor asteroizi NEA le permite acestora migrația dintr-o grupă într-alta sau chiar pierderea calității de asteroid NEA, cum de altfel numeroși asteroizi din centura principală pot pătrunde în vecinătatea orbitei terestre, împrăștiind populația de asteroizi NEA (capitolul 4).

1.2 Selecție observațională

Toate descoperirile de asteroizi NEA se fac cu telescoape de la sol care pot investiga doar un volum finit de spațiu în jurul Pământului. Acele corpuri ale căror orbite le permit acestora să se apropie în mod frecvent de planeta noastră vor fi descoperite cu precădere. Deoarece dimensiunea spațiului de căutare depinde de strălucirea corpurilor ce fac subiectul observației, populația asteroizilor NEA va conține îndeosebi corpuri de dimensiuni mai mari și cu un albedo ridicat.

Asteroizii NEA de dimensiuni mici sunt descoperiți doar atunci când trec foarte aproape de Pământ (spre exemplu, asteroidul 1994 XM_1 a fost descoperit pe când se afla la distanța minimă de 0.00069 UA, de 4 ori mai mică decât distanța până la orbita Lunii) și pot fi observați doar o perioadă scurtă de timp. Uneori este nevoie de așteptarea unei noi apropieri de Pământ (aparitii multiple), pentru ca orbita lor să poată fi îmbunătățită cu noi date de observație.

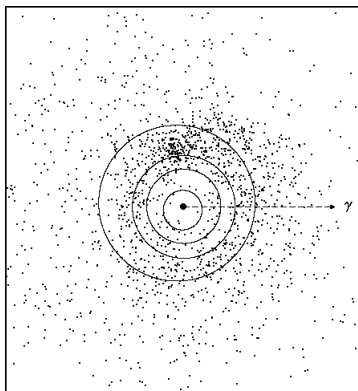


Figura 1.2. Proiecția în planul eclipticii, la data de 1 ianuarie 2002, a pozițiilor celor peste 1600 de asteroizi NEA descoperiți până la data respectivă.

Figura 1.2 prezintă o imagine instant în planul eclipticii a proiecției tuturor asteroizilor NEA descoperiți (peste 1600), la data de 1 ianuarie 2002, împreună cu orbitele planetelor Mercur, Venus, Pământ și Marte. Se remarcă aglomerarea asteroizilor NEA descoperiți mai recent în jurul poziției Pământului, marcând astfel efectul de selecție observațională amintit mai sus. Același efect de selecție este vizibil și în planul (e, a) al elementelor orbitale (figura 1.3), în care majoritatea asteroizilor se aglomerează în jurul curbei $q = 1$ UA.

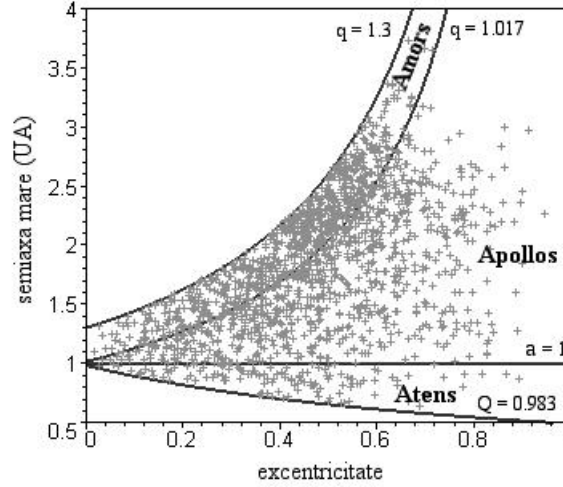


Figura 1.3. Distribuția în planul elementelor orbitale (e, a) a asteroizilor NEA descoperiți până în prezent și locația grupurilor Atens, Apollos și Amors.

Corectarea efectului de selecție observațională permite estimarea din datele de observație actuale a populației reale de asteroizi NEA. Această estimare se face în termenii distribuției orbitale și a distribuției după dimensiune a acestor corpuri.

Presupunem că nu există o distribuție preferențială a argumentului periheliului ω și a longitudinii nodului orbitei Ω , aceste mărimi înregistrând variații seculare în intervalul $[0, 2\pi]$. Distribuția orbitală căutată poate fi astfel definită în termenii unei probabilități diferențiale $P(a, e, I)$ da de dI de a găsi obiectul în elementul de volum din spațiul elementelor orbitale $[a, a + da] \times [e, e + de] \times [I, I + dI]$, unde notațiile sunt cele cunoscute. Dacă $P_o(a, e, I)$ notează distribuția orbitală observată și $P_s(a, e, I)$ cuantifică efectul de selecție observațională pentru fiecare tip de orbită, atunci distribuția reală se obține din raportul

$$P(a, e, I) = \frac{P_o(a, e, I)}{P_s(a, e, I)}. \quad (1.1)$$

calculat pentru fiecare element de volum. O estimare a corecțiilor $P_s(a, e, I)$ este dată în lucrarea [Rabinowitz, 1993], ea fiind obținută în urma simulării unei campanii observaționale asupra unei populații virtuale de asteroizi NEA, distribuiți uniform în spațiul elementelor orbitale. Într-o primă aproximație, se obține că distribuția căutată $P(a, e, I)$ este separabilă după cele trei variabile, astfel $P(a, e, I) = P(a, e)P(I)$.

Figura 1.4 prezintă distribuția numărului cumulat $N(< H)$ al asteroizilor NEA descoperiți până la data de 1 ianuarie 2002, care au magnitudinea absolută mai mică decât H . Distribuția respectivă se poate alcătui și în funcție de diametrul corpului, conversia între cele două mărimi fizice făcându-se pe baza modelului fotometric dezvoltat în paragraful 4.1.4 al lucrării. Pe aceeași figură este reprezentată și o estimare a numărului real al asteroizilor NEA, cu un factor de incertitudine 2, urmând modelul de distribuție după dimensiune descris în paragraful 4.1.3 [Rabinowitz *et al.*, 1994]. Se desprinde concluzia că limita de completitudine de 100% a desco-

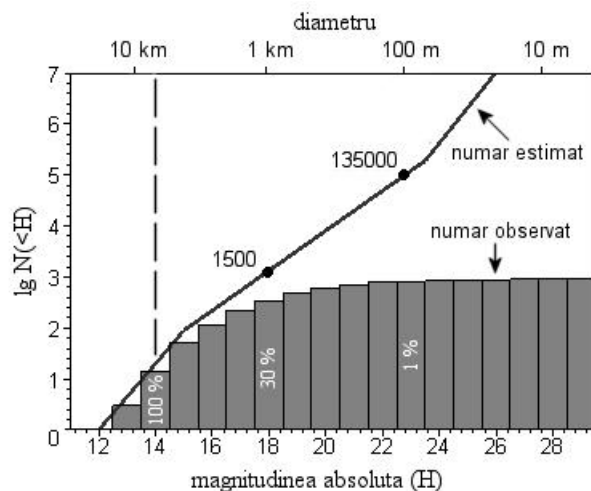


Figura 1.4. Numărul cumulat al asteroizilor NEA descoperiți până în prezent (1 ianuarie 2002) și estimarea numărului total de corpuri a întregii populații, în funcție de magnitudinea absolută a acestora (sau echivalent, în funcție de diametrul lor).

peririlor este atinsă pentru valori ale magnitudinii absolute $H \lesssim 14$ [Bottke *et al.*, 2000], cărora le corespund diametre $D \gtrsim 7$ km.

Se estimează un număr de 1500 de asteroizi NEA cu diametre mai mari de 1 km, pentru care limita de completitudine a ajuns în prezent la 30% și în jur de 135000 de asteroizi NEA cu diametre mai mari de 100 m, pentru care limita de completitudine este de doar 1% [Rabinowitz *et al.*, 1994]. Cu aceste date, se poate evalua acum timpul mediu dintre două coliziuni consecutive cu Pământul ale asteroizilor NEA, adoptând pentru probabilitatea anuală medie de impact valoarea de 4×10^{-9} /an/obiect (paragraful 5.1.2). Tabelul următor prezintă rezultatele obținute [Morrison, 1992].

Diametru asteroid	Timp mediu dintre două coliziuni consecutive cu Pământul
$D > 10$ m	câțiva ani
$D > 100$ m	1000 de ani
$D > 1$ km	10^5 ani
$D > 10$ km	10^8 ani

Tabelul 1.1. Timpul mediu dintre două coliziuni consecutive cu Pământul ale asteroizilor NEA.

Estimări mai recente [Bottke *et al.*, 2000], revizuiesc numărul total al asteroizilor NEA mai mari de 1 km în diametru la aproximativ 900, caz în care limita de completitudine a descoperirilor lor ajunge la 40%. Pentru valori ale magnitudinii absolute $15 < H < 22$, proporția de asteroizi pe cele trei grupe definite anterior este estimată la 6% pentru tipul Atens, 65% pentru tipul Apollos și 29% pentru tipul Amors.

Un potențial impact cu Pământul, având consecințe distructive la scară globală, provine de la asteroizii NEA cu diametre de cel puțin 1 km (paragraful 5.3) și în special de la populația de asteroizi încă nedescoperiți. Din acest motiv, strategiile observaționale actuale au ca obiectiv principal realizarea completitudinii de 100% a descoperirilor de asteroizi NEA cu $H < 18$.

Capitolul 2

Dinamica apropiierilor strânse

Când un corp, în mișcarea sa heliocentrică, pătrunde în interiorul sferei de acțiune gravitațională a unei planete, spunem că acesta a realizat o apropiere strânsă cu planeta respectivă. Apropierea strânsă sunt o caracteristică fundamentală a dinamicii corpurilor din vecinătatea orbitei terestre. Din acest motiv, vom dedica capitolul de față studiului dinamicii acestui fenomen. Problema restrânsă a celor trei corpuri ne oferă principalele rezultate calitative în această direcție [Murray și Dermott, 1999], iar apoi, cu ajutorul formalismului geometric al lui Öpik, introdus în lucrarea [Öpik, 1963] și dezvoltat ulterior de alții [Carusi *et al.*, 1990], vom deduce aproximații analitice ce descriu modificarea orbitală în urma unei astfel de apropieri strânse.

2.1 Problema restrânsă a celor trei corpuri

2.1.1 Ecuațiile de mișcare

Vom porni de la binecunoscutele ecuații vectoriale ale mișcării “absolute” în problema generală a celor trei corpuri, față de un sistem de referință inerțial oarecare [Ureche, 1982]

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^3 m_j \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}^3}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

unde indicii 1, 2 și 3 notează mărimile asociate celor trei corpuri, \mathbf{r}_i sunt vectorii lor de poziție, $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$, $r = |\mathbf{r}|$, m_i notează masele corpurilor, iar G este constanta atracției universale.

Problema restrânsă a celor trei corpuri studiază mișcarea unei particule de masă neglijabilă în câmpul gravitațional a două corpuri masive: un corp central (adesea identificat cu Soarele) și un corp perturbator (o planetă) ce gravitează în jurul acestuia. Pe mai departe vom folosi unitățile de măsură din Sistemul Constantelor Astronomice [Anuarul Astr., 2001], anume: unitatea astronomică de timp este ziua solară medie (egală cu 86400 secunde de timp), unitatea astronomică de masă este masa Soarelui, iar unitatea astronomică de lungime este unitatea astronomică de distanță - UA (aproximativ egală cu semiaxa mare a orbitei terestre). În acest sistem de măsură, masa corpului central este egală cu unitatea, masa corpului perturbator, m_p , este exprimată în fracțiuni din masa centrală, iar G va nota acum constanta gravitațională heliocentrică.

Adesea vom considera cazul particular al problemei circulare, în care cele două corpuri masive evoluează pe orbite circulare în jurul centrului comun de masă. De asemenea, obținerea unor rezultate pe parcursul acestui capitol presupune neglijarea masei corpului perturbator ($m_p \ll 1$). Toate aceste modele simplificate își găsesc deseori aplicabilitatea în cazul sistemelor de corpuri întâlnite în sistemul nostru solar, de genul “Soare–planetă perturbator–asteroid”.

Dacă mărimile asociate planetei le indexăm cu indicele “p”, iar mărimile asociate corpului infinitezimal sunt libere de indici, sistemul de ecuații vectoriale ce descrie mișcarea relativă la corpul central, în problema restrânsă a celor trei corpuri, este compus din ecuația de mișcare relativă kepleriană planetei față de corpul central și ecuația mișcării perturbate a corpului infinitezimal:

$$\begin{cases} \frac{d^2 \mathbf{r}_p}{dt^2} = -G \frac{(1 + m_p)}{r_p^3} \mathbf{r}_p \\ \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -G \frac{1}{r^3} \mathbf{r} + G m_p \left(\frac{1}{d^3} (\mathbf{r}_p - \mathbf{r}) - \frac{1}{r_p^3} \mathbf{r}_p \right), \end{cases} \quad (2.2)$$

unde $d = |\mathbf{r}_p - \mathbf{r}|$ notează distanța de la corpul infinitezimal la planetă, iar $r = |\mathbf{r}|$ semnifică distanța de la corpul infinitezimal la cel central.

Considerăm în continuare cazul circular, în care distanța dintre cele două corpuri masive este constantă (egală cu semiaxa orbitei planetare a_p). Devine astfel natural să considerăm mișcarea corpului infinitezimal într-un sistem de referință corotațional legat de configurația “corp central– planetă”. Fie, pentru început, un sistem inerțial fix OXYZ cu centrul în centrul comun de masă al corpurilor masive, astfel încât planul OXY coincide cu planul de mișcare al celor două corpuri masive față de centrul comun de masă, iar axa OX trece prin centrele celor două corpuri la momentul inițial (figura 2.1). Fie (x_*, y_*, z_*) , (x_p, y_p, z_p) și (x, y, z) coordonatele corpului central, ale planetei și, respectiv, ale corpului infinitezimal în acest sistem. Ecuațiile de mișcare ale celui din urmă vor fi

$$\begin{cases} \ddot{x} = G \frac{x_* - x}{r^3} + G m_p \frac{x_p - x}{d^3} \\ \ddot{y} = G \frac{y_* - y}{r^3} + G m_p \frac{y_p - y}{d^3} \\ \ddot{z} = G \frac{z_* - z}{r^3} + G m_p \frac{z_p - z}{d^3}, \end{cases} \quad (2.3)$$

unde expresiile distanțelor mutuale ce intervin (figura 2.1), sunt

$$\begin{cases} r^2 = (x_* - x)^2 + (y_* - y)^2 + (z_* - z)^2 \\ d^2 = (x_p - x)^2 + (y_p - y)^2 + (z_p - z)^2. \end{cases} \quad (2.4)$$

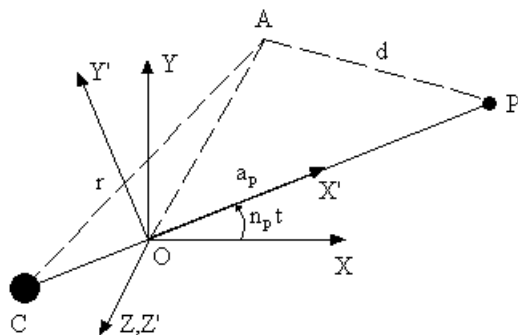


Figura 2.1. Sistemul de referință fix OXYZ și cel corotațional OX'Y'Z', unde OXY este planul de mișcare relativă a corpului perturbator P față de corpul central C, din problema restrânsă circulară a celor trei corpuri (A notează corpul infinitezimal).

Fie acum sistemul de referință corotațional $OX'Y'Z'$ ce coincide cu cel fix la momentul inițial și se rotește cu o viteză unghiulară egală cu mișcarea medie diurnă a planetei

$$n_p = \sqrt{G(1+m_p)} \cdot a_p^{-\frac{3}{2}} \quad (2.5)$$

în jurul axei OZ' . În acest sistem corpul central și planeta sunt fixe, având coordonatele

$$(\xi_*, \eta_*, \zeta_*) = \left(-a_p \frac{m_p}{1+m_p}, 0, 0\right), \quad (\xi_p, \eta_p, \zeta_p) = \left(a_p \frac{1}{1+m_p}, 0, 0\right), \quad (2.6)$$

așa cum rezultă din raportul distanțelor la centrul comun de masă, iar corpul infinezimal va avea coordonatele (ξ, η, ζ) . Legătura lor cu cele din sistemul fix este dată de

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos n_p t & -\sin n_p t & 0 \\ \sin n_p t & \cos n_p t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Expresiile (2.4) ale distanțelor mutuale se vor rescrie acum astfel

$$\begin{cases} r^2 = (\xi - \xi_*)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \left(\xi + a_p \frac{m_p}{1+m_p}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 \\ d^2 = (\xi - \xi_p)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \left(\xi - a_p \frac{1}{1+m_p}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2. \end{cases} \quad (2.8)$$

Derivând ecuația matriceală (2.7) în raport cu timpul, se obține

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos n_p t & -\sin n_p t & 0 \\ \sin n_p t & \cos n_p t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi} - n_p \eta \\ \dot{\eta} + n_p \xi \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

iar după o a doua derivare

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos n_p t & -\sin n_p t & 0 \\ \sin n_p t & \cos n_p t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\xi} - 2n_p \dot{\eta} - n_p^2 \xi \\ \ddot{\eta} + 2n_p \dot{\xi} - n_p^2 \eta \\ \ddot{\zeta} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Termenii $-2n_p \dot{\eta}$ și $2n_p \dot{\xi}$ provin din accelerația Coriolis, iar termenii $-n_p^2 \xi$ și $-n_p^2 \eta$ provin din accelerația centrifugă, ei fiind introduși în urma trecerii la sistemul de coordonate corotațional.

Înlocuind expresiile date de (2.10) în (2.3), deducem

$$\begin{cases} (\ddot{\xi} - 2n_p \dot{\eta} - n_p^2 \xi) \cos n_p t - (\ddot{\eta} + 2n_p \dot{\xi} - n_p^2 \eta) \sin n_p t = \\ G \left[\frac{\xi_* - \xi}{r^3} + m_p \frac{\xi_p - \xi}{d^3} \right] \cos n_p t + G \left[\frac{1}{r^3} + m_p \frac{1}{d^3} \right] \eta \sin n_p t, \\ (\ddot{\xi} - 2n_p \dot{\eta} - n_p^2 \xi) \sin n_p t + (\ddot{\eta} + 2n_p \dot{\xi} - n_p^2 \eta) \cos n_p t = \\ G \left[\frac{\xi_* - \xi}{r^3} + m_p \frac{\xi_p - \xi}{d^3} \right] \sin n_p t - G \left[\frac{1}{r^3} + m_p \frac{1}{d^3} \right] \eta \cos n_p t, \\ \ddot{\zeta} = -G \left[\frac{1}{r^3} + m_p \frac{1}{d^3} \right] \zeta. \end{cases} \quad (2.11)$$

Multiplicând prima relație cu $\cos n_p t$, iar a doua cu $\sin n_p t$ și adunându-le, iar apoi multiplicând din nou prima relație cu $-\sin n_p t$, iar a doua cu $\cos n_p t$ și adunându-le împreună, se obțin ecuațiile de mișcare în sistemul corotațional

$$\begin{cases} \ddot{\xi} - 2n_p \dot{\eta} - n_p^2 \xi = -G \left[\frac{\xi - \xi_*}{r^3} + m_p \frac{\xi - \xi_p}{d^3} \right] \\ \ddot{\eta} + 2n_p \dot{\xi} - n_p^2 \eta = -G \left[\frac{1}{r^3} + m_p \frac{1}{d^3} \right] \eta \\ \ddot{\zeta} = -G \left[\frac{1}{r^3} + m_p \frac{1}{d^3} \right] \zeta. \end{cases} \quad (2.12)$$

Aceste ecuații se pot scrie în termenii gradientului unei funcții scalare U , astfel

$$\begin{cases} \ddot{\xi} - 2n_p \dot{\eta} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \\ \ddot{\eta} + 2n_p \dot{\xi} = \frac{\partial U}{\partial \eta} \\ \ddot{\zeta} = \frac{\partial U}{\partial \zeta}, \end{cases} \quad (2.13)$$

unde $U = U(\xi, \eta, \zeta)$ este dată de

$$U = G \frac{1}{r} + G m_p \frac{1}{d} + \frac{n_p^2}{2} (\xi^2 + \eta^2). \quad (2.14)$$

În această ecuație termenii $1/r$ și $1/d$ reprezintă potențialul gravitațional asociat corpurilor masive din sistem, iar termenul $(\xi^2 + \eta^2)$ reprezintă potențialul centrifugal datorat sistemului corotațional de referință. U se va numi potențial total, însă trebuie notat faptul că acesta nu este un potențial adevărat în sens fizic, deoarece energia totală a sistemului nu se conservă, așa cum vom arăta ulterior.

2.1.2 Integrala Jacobi

În acest paragraf vom deduce două expresii ale integralei Jacobi, prima în coordonate relative la corpul central [Tisserand, 1896], iar a doua în coordonate corotaționale [Murray și Dermott, 1999].

Astfel, pentru început înmulțim vectorial a doua ecuație din (2.2) cu \mathbf{r} și obținem

$$\frac{d}{dt} \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = G m_p (\mathbf{r} \times \mathbf{r}_p) \left(\frac{1}{d^3} - \frac{1}{r_p^3} \right). \quad (2.15)$$

Aceeași ecuație o vom înmulți acum scalar cu $d\mathbf{r}/dt$, iar după o aranjare prealabilă a termenilor obținem

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 - \frac{G}{r} \right] = G m_p \left[\frac{1}{d^3} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{r}_p - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{r} \right) - \frac{1}{r_p^3} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{r}_p \right]. \quad (2.16)$$

Dacă a_p notează semiaxa orbitei planetare, va fi utilă evaluarea

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{d} - \frac{\mathbf{r} \mathbf{r}_p}{a_p^3} \right) = \frac{1}{d^3} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{r}_p - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{r} \right) - \frac{1}{a_p^3} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{r}_p - \frac{1}{d^3} \frac{d\mathbf{r}_p}{dt} \mathbf{r}_p + \frac{d\mathbf{r}_p}{dt} \mathbf{r} \left(\frac{1}{d^3} - \frac{1}{a_p^3} \right), \quad (2.17)$$

unde s-a ținut seama de egalitatea

$$\frac{dd}{dt} = \frac{1}{d}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_p) \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} - \frac{d\mathbf{r}_p}{dt} \right). \quad (2.18)$$

Înmulțind ecuația (2.17) cu Gm_p și scăzând-o din (2.16), primim

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 - \frac{G}{r} \right] - Gm_p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{d} - \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}_p}{a_p^3} \right) &= Gm_p \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt} \mathbf{r}_p \left(\frac{1}{a_p^3} - \frac{1}{r_p^3} \right) + \frac{1}{d^3} \frac{d\mathbf{r}_p}{dt} \mathbf{r}_p \right] - \\ &Gm_p \frac{d\mathbf{r}_p}{dt} \mathbf{r} \left(\frac{1}{d^3} - \frac{1}{a_p^3} \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

În acest moment vom face uz de ipoteza circularității orbitei planetare, caz în care primul termen din membrul drept al ecuației (2.19) se anulează în virtutea egalităților evidente $r_p = a_p$ și $(d\mathbf{r}_p/dt)\mathbf{r}_p = 0$.

Vom încerca în continuare să legăm al doilea termen al membrului drept din (2.19) de relația (2.15). Fără a restrânge generalitatea problemei putem presupune că sistemul de referință la care sunt raportate ecuațiile mișcării relative (2.2) este astfel orientat încât coordonatele planetei la orice moment de timp vor fi $(a_p \cos l_p, a_p \sin l_p, 0)$, unde l_p notează longitudinea planetei pe orbită. Desigur, avem relația $dl_p/dt = n_p$. Cu toate aceste precizări și introducând vectorul $\mathbf{n} = (0, 0, n_p)$, este ușor de verificat relația următoare

$$\mathbf{n} \cdot \frac{d}{dt} \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = -Gm_p \frac{d\mathbf{r}_p}{dt} \mathbf{r} \left(\frac{1}{d^3} - \frac{1}{a_p^3} \right). \quad (2.20)$$

Uzând de (2.20), ecuația (2.19) devine prin integrare o integrală primă a sistemului (2.2)

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 - 2G \left[\frac{1}{r} + m_p \left(\frac{1}{d} - \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}_p}{a_p^3} \right) \right] - 2\mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = -C_J \text{ (constant)}. \quad (2.21)$$

Aceasta este o primă formă a *integralei lui Jacobi* din problema restrânsă circulară a celor trei corpuri.

În continuare vom considera ecuațiile de mișcare în coordonate corotaționale date de (2.13). Înmulțind aici prima relație cu $\dot{\xi}$, a doua relație cu $\dot{\eta}$, iar a treia cu $\dot{\zeta}$ și adunându-le, deducem

$$\dot{\xi}\ddot{\xi} + \dot{\eta}\ddot{\eta} + \dot{\zeta}\ddot{\zeta} = \frac{\partial U}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial U}{\partial \zeta} \dot{\zeta} = \frac{dU}{dt}. \quad (2.22)$$

Integrând, obținem

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 = 2U - C_J, \quad (2.23)$$

și folosind relația (2.14) rezultă

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 - 2G \left(\frac{1}{r} + m_p \frac{1}{d} \right) - n_p^2 (\xi^2 + \eta^2) = -C_J. \quad (2.24)$$

Aceasta este *integrala Jacobi* în coordonate corotaționale. Ea poate fi transcrisă, de asemenea, față de sistemul de referință inerțial, folosind transformările (2.7) și (2.9). Notând

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos n_p t & \sin n_p t & 0 \\ -\sin n_p t & \cos n_p t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \sin n_p t & -\cos n_p t & 0 \\ \cos n_p t & \sin n_p t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

vom avea transformările $(\xi, \eta, \zeta) = (x, y, z) \mathbf{A}^T$ și $(\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \mathbf{A}^T - n_p(x, y, z) \mathbf{B}^T$. Astfel rezultă

$$\begin{aligned} \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 &= (\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}) (\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta})^T = \\ &= (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \mathbf{A}^T \mathbf{A} (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T - n_p (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \mathbf{A}^T \mathbf{B} (x, y, z)^T - \\ &= n_p(x, y, z) \mathbf{B}^T \mathbf{A} (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})^T + n_p^2(x, y, z) \mathbf{B}^T \mathbf{B} (x, y, z)^T \\ &= \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + n_p^2(x^2 + y^2) + 2n_p(\dot{x}y - \dot{y}x), \end{aligned} \quad (2.26)$$

unde am folosit faptul că matricele \mathbf{A} și \mathbf{B} sunt ambele ortogonale și deci transpusele lor sunt și inversele lor. Din (2.7) rezultă, de asemenea, că $\xi^2 + \eta^2 = x^2 + y^2$ și astfel relația (2.24) devine

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - 2G \left(\frac{1}{r} + m_p \frac{1}{d} \right) = 2n_p(x\dot{y} - y\dot{x}) - C_J, \quad (2.27)$$

de unde, introducând mărimile vectoriale $\mathbf{r}_o = (x, y, z)$ și $\mathbf{n} = (0, 0, n_p)$, rezultă

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{r}_o}{dt} \right)^2 - G \left(\frac{1}{r} + m_p \frac{1}{d} \right) = \mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{r}_o \times \frac{d\mathbf{r}_o}{dt} \right) - \frac{1}{2} C_J. \quad (2.28)$$

Aceasta este o altă formă a *integrarei lui Jacobi*, în care termenul din stânga semnifică energia totală pe unitatea de masă a particulei, energie care, conform cu membrul drept variabil, nu se conservă. Acest lucru explică de ce în problema restrânsă circulară a celor trei corpuri, energia totală nu se conservă.

Integrala Jacobi este singura integrală primă a problemei. Din acest motiv, nu se pot obține soluții analitice complete ale sale, însă o serie de rezultate calitative sunt accesibile.

2.1.3 Criteriul Tisserand

Dacă corpul infinitezimal este situat departe de corpul perturbator, atunci mișcarea sa se poate asimila cu una kepleriană în jurul corpului central, caracterizată prin setul de elemente orbitale $(a, e, I, \Omega, \omega, M)$, notațiile fiind cele consacrate [Murray și Dermott, 1999]. Integrala Jacobi va putea fi transcrisă în funcție de aceste elemente orbitale, după cum vom arăta în cele ce urmează.

Revenind la relația (2.21) și exprimând viteza și momentul cinetic ale corpului infinitezimal funcție de elementele orbitale, în modul următor

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 = G \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad \mathbf{n} \cdot \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = G \frac{\sqrt{1+m_p}}{a_p} \sqrt{\frac{a}{a_p} (1-e^2)} \cdot \cos I, \quad (2.29)$$

deducem expresia

$$\frac{1}{a} + 2 \frac{\sqrt{1+m_p}}{a_p} \sqrt{\frac{a}{a_p} (1-e^2)} \cdot \cos I + m_p \left(\frac{2}{d} + \frac{d^2 - r^2 - a_p^2}{a_p^3} \right) = G^{-1} C_J, \quad (2.30)$$

care este integrala Jacobi scrisă în funcție de elementele orbitale kepleriene. O expresie similară, însă în termenii variabilei unghiulare l_p , este dedusă în lucrarea [Tisserand, 1896].

Dacă neglijăm masa corpului perturbator ($m_p \approx 0$), atunci relația anterioară devine

$$\frac{a_p}{a} + 2 \sqrt{\frac{a}{a_p} (1-e^2)} \cdot \cos I = T \text{ (constant)}, \quad (2.31)$$

cunoscută sub numele de relația sau *criteriul Tisserand*. Acest criteriu a stat la baza reidentificării cometelor periodice transjoviene după pasajul acestora în apropierea planetelor gigante.

El arată că o anumită combinație dintre a , e și I este un invariant al mișcării în problema restrânsă circulară a celor trei corpuri, adică atât setul de elemente orbitale (a, e, I) dinaintea apropierii de planetă, cât și setul de elemente orbitale (a', e', I') de după pasaj, verifică relația (2.31) cu un același T (număr adimensional). Această lege este verificată doar aproximativ (ea fiind complet violată în imediata vecinătate a planetei perturbatoare), datorită ipotezelor simplificatoare pe care s-a construit, însă așa cum se observă din simularea reprezentată în figura 2.2, ea a fost un criteriu destul de bun de reidentificare a orbitelor cometare puternic perturbate.

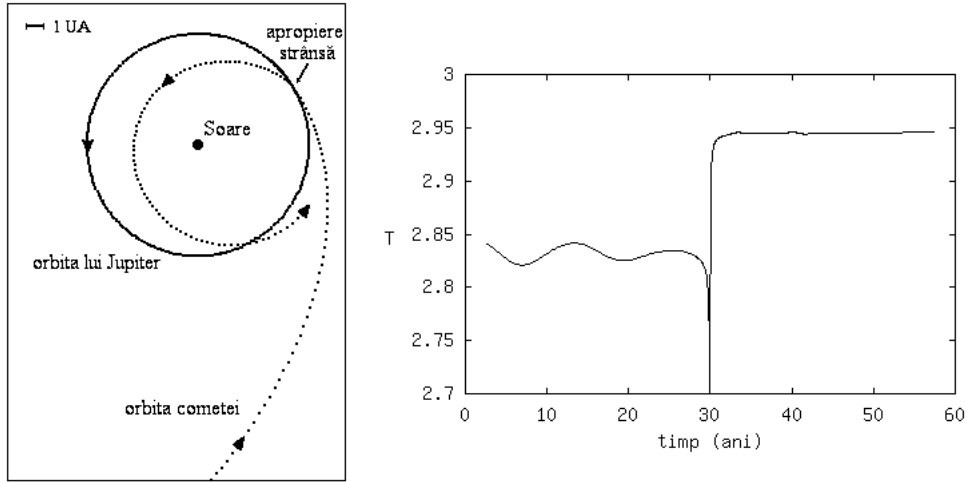


Figura 2.2. Cvasi-invariabilitatea parametrului Tisserand. Modificarea drastică a orbitei unei comete fictive în urma apropierii strânse cu planeta Jupiter și variația parametrului Tisserand pe parcursul a 60 de ani. Elementele inițiale orbitale sunt $a \approx 22.6$ UA, $e \approx 0.78$ și $I \approx 4^\circ.6$, iar în final $a \approx 3.5$ UA, $e \approx 0.44$ și $I \approx 8^\circ.6$.

Criteriul Tisserand se poate deduce și din considerente geometrice, fără a face apel la ecuațiile de mișcare din problema restrânsă circulară a celor trei corpuri, așa cum vom arăta într-un paragraf următor.

Dacă corpul infinitesimal realizează apropieri strânse și cu un al doilea corp perturbator (situat pe o orbită circulară de semiaxă a'_p , coplanară cu orbita primului corp perturbator), atunci se poate scrie o relație Tisserand corespunzătoare, de forma (2.31), cu parametrul T' . Eliminând termenul comun $2[a(1 - e^2)]^{1/2}$ din cele două relații valabile, rezultă

$$T = \left(\frac{a'_p}{a_p}\right)^{\frac{1}{2}} T' + \left[1 - \left(\frac{a'_p}{a_p}\right)^{\frac{3}{2}}\right] \frac{a_p}{a}. \quad (2.32)$$

În urma apropierii de a doua planetă perturbatoare, T' se conservă, iar T se modifică astfel

$$dT = a_p \left[1 - \left(\frac{a'_p}{a_p}\right)^{\frac{3}{2}}\right] d\left(\frac{1}{a}\right) \quad (2.33)$$

Relația (2.33) ne dă o modalitate de a evalua variația constantei lui Tisserand funcție de variația energiei orbitale $d(1/a)$ a corpului infinitesimal în urma perturbației exercitate de un alt corp [Everhart, 1973].

2.1.4 Punctele Lagrange de echilibru

Chiar dacă problema restrânsă circulară a trei corpuri nu este integrabilă, totuși pot fi găsite câteva soluții particulare. Ne vom opri în cele ce urmează la soluții ale mișcării în jurul punctelor Lagrange de echilibru. Aceste puncte de echilibru sunt caracterizate de viteză nulă și accelerație nulă în sistemul de referință corotațional. Cum aceste puncte trebuie să fie situate în planul de mișcare al celor două corpuri masive, ne vom rezuma în continuare la mișcarea plană. Astfel, din ecuațiile (2.8) deducem

$$r^2 + m_p d^2 = (1 + m_p)(\xi^2 + \eta^2) + a_p^2 \frac{m_p}{1 + m_p}, \quad (2.34)$$

de unde, potențialul total U se scrie

$$U = G \frac{1}{a_p} \left(\frac{a_p}{r} + \frac{r^2}{2a_p^2} \right) + G m_p \frac{1}{a_p} \left(\frac{a_p}{d} + \frac{d^2}{2a_p^2} \right) - G \frac{1}{2a_p} \frac{m_p}{1 + m_p}. \quad (2.35)$$

Avantajul acestei expresii pentru U este acela că dependența explicită de variabilele ξ și η a fost înlăturată și astfel următoarele derivate parțiale vor fi mai ușor de calculat.

Folosind (2.13) și impunând condițiile de echilibru $\dot{\xi} = \dot{\eta} = 0$ și $\ddot{\xi} = \ddot{\eta} = 0$, obținem

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial \xi} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial \eta} = \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial U}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial \eta} = 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

și, făcând uz de (2.35), deducem [Murray și Dermott, 1999]

$$\begin{cases} \left(\frac{r}{a_p^2} - \frac{a_p}{r^2} \right) \frac{1}{r} \left(\xi + a_p \frac{m_p}{1 + m_p} \right) + m_p \left(\frac{d}{a_p^2} - \frac{a_p}{d^2} \right) \frac{1}{d} \left(\xi - a_p \frac{1}{1 + m_p} \right) = 0 \\ \left(\frac{r}{a_p^2} - \frac{a_p}{r^2} \right) \frac{1}{r} \eta + m_p \left(\frac{d}{a_p^2} - \frac{a_p}{d^2} \right) \frac{1}{d} \eta = 0. \end{cases} \quad (2.37)$$

Inspectând ecuațiile (2.36), deducem existența soluției triviale $\partial U / \partial r = \partial U / \partial d = 0$, careia îi corespunde $r = d = a_p$. Înlocuind aceste valori în ecuațiile (2.8) avem

$$\xi = \frac{1}{2}(\xi_p + \xi_*) = \frac{a_p}{2} \frac{1 - m_p}{1 + m_p}, \quad \eta = \pm \frac{a_p \sqrt{3}}{2} \quad (2.38)$$

ce definesc două puncte de echilibru ce formează triunghiuri echilaterale cu corpurile masive din sistem. Acestea se numesc *puncte Lagrange de echilibru triunghiulare*, notându-se cu L_4 și L_5 , primul fiind ales în direcția de mișcare a corpului perturbator. Folosind relațiile (2.6), (2.7) și (2.9) în care facem translația $\xi \rightarrow \xi - \xi_*$, obținem coordonatele heliocentrice rectangulare ale punctelor Lagrange L_4 și L_5 la momentul inițial, în sistemul de referință fix CXYZ (figura 2.1), astfel $(x, y) = (a_p/2, \pm a_p \sqrt{3}/2)$ și $(\dot{x}, \dot{y}) = (-n_p y, n_p x)$.

O altă soluție trivială a sistemului (2.37) se obține pentru $\eta = 0$, de unde, folosind din nou (2.8), deducem

$$r = \left| \xi + a_p \frac{m_p}{1 + m_p} \right|, \quad d = \left| \xi - a_p \frac{1}{1 + m_p} \right|. \quad (2.39)$$

Distingem trei cazuri cărora le corespund trei puncte de echilibru coliniare cu corpurile masive din sistem, numite *puncte Lagrange de echilibru coliniare*, notate cu L_1 , L_2 și L_3 .

Punctul L_1 este definit prin condițiile $r = \xi + a_p m_p / (1 + m_p)$ și $d = -\xi + a_p / (1 + m_p)$, care înlocuite în prima relație din (2.37) conduc la

$$\left(\frac{a_p - d}{a_p^2} - \frac{a_p}{(a_p - d)^2} \right) = m_p \left(\frac{d}{a_p^2} - \frac{a_p}{d^2} \right), \quad (2.40)$$

ce se poate pune sub forma

$$\alpha \stackrel{\text{not}}{\equiv} \left(\frac{m_p}{3} \right)^{1/3} = d^3 \frac{a_p^2 - a_p d + d^2/3}{(a_p - d)^3 (a_p^2 + a_p d + d^2)}. \quad (2.41)$$

α fiind o cantitate mică, ecuația anterioară în necunoscuta d va avea soluție în vecinătatea originii ($d \approx \alpha$), ceea ce justifică următoarea dezvoltare în serie

$$\alpha = \frac{d}{a_p} + \frac{1}{3} \left(\frac{d}{a_p} \right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{d}{a_p} \right)^3 + \frac{53}{81} \left(\frac{d}{a_p} \right)^4 + O(d^5). \quad (2.42)$$

Pentru a obține mărimea d funcție de α , vom inversa seria anterioară utilizând *teorema lui Lagrange de inversare a seriilor*. Dacă variabila z se exprimă funcție de variabila ζ prin $z = \zeta + \phi(\zeta)$, unde ϕ este o funcție reală indefinit derivabilă, atunci variabila ζ se poate exprima la rândul ei explicit în funcție de z prin dezvoltarea

$$\zeta = z + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}} [\phi(z)]^j. \quad (2.43)$$

În cazul nostru, dacă notăm cu $z = d/a_p$, avem $\alpha = z + \phi(z)$, cu

$$\phi(z) = \frac{1}{3}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{53}{81}z^4 + O(z^5) \quad (2.44)$$

și folosind teorema de inversare a lui Lagrange, deducem

$$d = a_p z = a_p \left[\alpha - \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{9}\alpha^3 - \frac{23}{81}\alpha^4 + O(\alpha^5) \right]. \quad (2.45)$$

Deci, punctul L_1 va fi situat la distanța d , determinată anterior, de corpul perturbator, măsurată în direcția corpului central.

Folosind aceleași considerente, se deduce că punctul de echilibru definit prin egalitățile $r = \xi + a_p m_p / (1 + m_p)$ și $d = \xi - a_p / (1 + m_p)$ și notat cu L_2 va fi situat la distanța

$$d = a_p \left[\alpha + \frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{9}\alpha^3 - \frac{31}{81}\alpha^4 + O(\alpha^5) \right] \quad (2.46)$$

de corpul perturbator, în direcția opusă corpului central, iar punctul de echilibru L_3 , definit prin egalitățile $r = -\xi - a_p m_p / (1 + m_p)$ și $d = -\xi + a_p / (1 + m_p)$, va fi situat la distanța

$$r = a_p \left[1 - \frac{7}{12}m_p + \frac{7}{12}m_p^2 - \frac{13223}{20736}m_p^3 + O(m_p^4) \right] \quad (2.47)$$

de corpul central, în direcția opusă corpului perturbator.

Suprafața de viteză nulă din problema restrânsă circulară plană a celor trei corpuri este descrisă de ecuația $C_J = 2U$, conform cu (2.23), și este reprezentată grafic în figura 2.3, împreună cu cele cinci puncte Lagrange de echilibru. Acestea le corespund, prin definiție, valori extreme ale energiei potențiale și, pe suprafața de viteză nulă, valori extreme ale constantei lui Jacobi, C_J . Punctele L_1 , L_2 și L_3 sunt puncte de maxim, iar L_4 și L_5 sunt puncte de minim. Într-adevăr, printr-o analiză liniară a stabilității, se poate arăta că punctele coliniare sunt puncte de

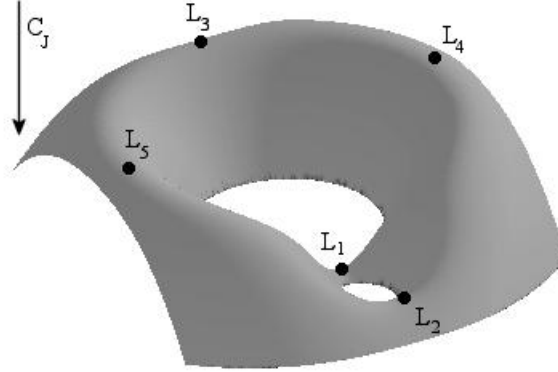


Figura 2.3. Suprafața tridimensională de viteză nulă definită prin egalitatea $C_J = 2U$ și locația punctelor Lagrange de echilibru, ca puncte de extrem (cazul particular $m_p = 0.1$).

echilibru instabil, iar celelalte două sunt puncte de echilibru stabil pentru $m_p \lesssim 0.04$ și instabil în caz contrar [Murray și Dermott, 1999].

Folosind relația $C_J = 2U$ și expresiile deduse anterior, vom determina cu aproximație până la ordinul $O(m_p)$ constanta lui Jacobi pentru fiecare din cele cinci puncte de echilibru Lagrangian, după cum urmează [Murray și Dermott, 1999]

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{L_1} \approx G(3 + [9m_p]^{2/3} - m_p/3)/a_p \\ C_{L_2} \approx G(3 + [9m_p]^{2/3} - 5m_p/3)/a_p \\ C_{L_3} \approx G(3 + 4m_p)/a_p \\ C_{L_4} = C_{L_5} \approx G(3 + 2m_p)/a_p. \end{array} \right. \quad (2.48)$$

Constanta Jacobi are valoarea cea mai mare în punctul L_1 și valoarea cea mai mică în punctele L_4 și L_5 , așa cum se poate verifica imediat. Când $m_p \rightarrow 0$, atunci $C_{L_1} \rightarrow C_{L_2}$ și din relațiile (2.45) și (2.46), prin neglijarea termenilor de ordinul $O(\alpha^2)$, rezultă că distanțele lor la corpul perturbator devin de asemenea egale. Tot la limită, punctul L_3 se apropie de cercul de rază a_p cu centrul în corpul central, cerc pe care sunt situate și punctele L_4 și L_5 . În capitolul următor vom descrie tipurile de traiectorii asociate acestor puncte de echilibru.

2.1.5 Ecuațiile lui Hill

Atâta timp cât corpul infinitezimal este departe de cel perturbator, mișcarea sa în jurul corpului central poate fi aproximată cu una kepleriană, ce poate fi descrisă analitic. Capătă astfel sens să studiem mișcarea în vecinătatea masei secundare, unde perturbațiile gravitaționale modifică orbita kepleriană a corpului. Pentru aceasta vom considera câteva ipoteze simplificatoare și, de asemenea, vom transfera originea sistemului de referință în centrul corpului perturbator.

Considerăm problema restrânsă circulară plană a trei corpuri, în care masa corpul perturbator este mult mai mică decât unitatea ($m_p \ll 1$). Neglijând cantitățile mici în raport cu unitatea, ecuațiile de mișcare (2.12) se vor scrie

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\xi} - 2n_p\dot{\eta} - n_p^2\xi = -G \left[\frac{\xi}{r^3} + m_p \frac{\xi - a_p}{d^3} \right] \\ \ddot{\eta} + 2n_p\dot{\xi} - n_p^2\eta = -G \left[\frac{1}{r^3} + m_p \frac{1}{d^3} \right] \eta. \end{array} \right. \quad (2.49)$$

Prin transformarea de coordonate $\xi \rightarrow \xi + a_p$, ce aduce corpul perturbator în originea sistemului, putem considera că, în vecinătatea acestuia, noile coordonate ale corpului infinitezimal ξ și η ,

precum și distanța d , sunt cantități neglijabile. Astfel, din (2.8) rezultă $r^2 \approx a_p^2 + 2a_p\xi$ și ecuațiile (2.49) devin

$$\begin{cases} \ddot{\xi} - 2n_p\dot{\eta} = G \left(\frac{3}{a_p^3} - \frac{m_p}{d^3} \right) \xi = \frac{\partial U_H}{\partial \xi} \\ \ddot{\eta} + 2n_p\dot{\xi} = -Gm_p \frac{\eta}{d^3} = \frac{\partial U_H}{\partial \eta}, \end{cases} \quad (2.50)$$

unde

$$U_H = G \left(\frac{3\xi^2}{2a_p^3} + \frac{m_p}{d} \right), \quad d^2 = \xi^2 + \eta^2. \quad (2.51)$$

Ecuțiile (2.50) se numesc *ecuațiile lui Hill*, dovedindu-și la început aplicabilitatea în cadrul teoriei lunare. O proprietate interesantă a lor este aceea că ele se scalează cu mărimea $m_p^{1/3}$. Astfel, efectuând scalarea de coordonate $\xi \rightarrow \xi'(m_p/3)^{1/3}$ și $\eta \rightarrow \eta'(m_p/3)^{1/3}$, atunci avem și $d \rightarrow d'(m_p/3)^{1/3}$, iar ecuațiile lui Hill devin

$$\begin{cases} \ddot{\xi}' - 2n_p\dot{\eta}' = 3G \left(\frac{1}{a_p^3} - \frac{1}{d'^3} \right) \xi' \\ \ddot{\eta}' + 2n_p\dot{\xi}' = -3G \frac{\eta'}{d'^3}, \end{cases} \quad (2.52)$$

ce arată că mișcarea în vecinătatea corpului perturbator poate fi descrisă independent de masa acestuia, traiectoriile fiind scalate în mod corespunzător.

Folosind relația (2.23), în sistemul de coordonate Hill integrala Jacobi va avea expresia

$$C_H = G \left(\frac{3\xi^2}{a_p^3} + 2\frac{m_p}{d} \right) - (\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2). \quad (2.53)$$

Inspectând ecuațiile (2.50), componenta radială a forței gravitaționale, derivată din potențialul U_H , dispare atunci când $3d^3 = m_p a_p^3$. Aceasta exprimă un echilibru între forțele ce acționează asupra corpului infinitezimal, în sistemul de referință folosit. Suntem conduși astfel la definiția sferei de acțiune (gravitațională) Hill, ca fiind sfera de rază

$$s_p = a_p \left(\frac{m_p}{3} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.54)$$

în jurul corpului perturbator. În interiorul acestei sfere mișcarea se consideră guvernată de corpul perturbator, iar în exteriorul său, mișcarea este guvernată de corpul central al sistemului. De asemenea, pe suprafața acestei sfere se vor situa și punctele Lagrange de echilibru L_1 și L_2 , așa cum rezultă din expresiile distanțelor lor la corpul perturbator, (2.45) și (2.46), luate cu aproximație până la ordinul lui $m_p^{1/3}$.

2.2 Formalismul geometric a lui Öpik

2.2.1 Caracterizarea mișcării

Într-unul din paragrafele anterioare am arătat cum criteriul Tisserand stabilește o legătură între parametri orbitali ai corpului infinitezimal, înainte și după apropierea strânsă cu planeta. Se naște întrebarea, dacă în anumite condiții simplificatoare se pot determina explicit legăturile dintre aceste elemente orbitale. În lucrarea [Öpik, 1963] s-a introdus un formalism geometric

bazat pe aproximația celor două corpuri, ce dă rezultate surprinzător de bune în predicția modificării orbitale în urma unei apropieri strânse [Carusi *et al.*, 1990]. Formulele sale descriu modificarea orbitală doar în elementele a , e și I , însă extensii naturale pot fi obținute și pentru celelalte elemente orbitale: ω , Ω și M [Berinde, 2001a].

Ideea de bază a metodei de calcul este aceea că, departe de corpul perturbator, orbita corpului de probă este una kepleriană în jurul corpului central, iar pe parcursul apropierii strânse orbita sa este una kepleriană hiperbolică în jurul corpului perturbator, unde acțiunea gravitațională a corpului central este neglijată. Această aproximație este cu atât mai consistentă cu cât apropierea strânsă se desfășoară într-un timp mai scurt, deci cu cât viteza planetocentrică a corpului infinitezimal este mai mare. Mișcarea corpului cunoaște astfel două ipostaze, funcție de distanța sa la corpul perturbator. Remarcabil este faptul că expresia acestei distanțe nu apare explicit în formulele obținute, însă cunoașterea ordinului său de mărime este utilă în analiza aplicabilității acestui formalism.

Raza sferei de acțiune gravitațională cunoaște în literatura de specialitate diverse expresii, în funcție de modul cum se definește. În [Öpik, 1963] ea se definește ca fiind raza egală cu distanța de la planetă până la un punct, în direcția corpului central, în care forța perturbatoare a acestuia este egală cu forța gravitațională a planetei. Într-un sistem de referință legat de corpul central și cu notațiile din ecuația (2.2), expresiile acestor două forțe sunt

$$\mathbf{F}_{cen} = G \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mathbf{r}_p}{r_p^3} \right), \quad \mathbf{F}_{pln} = -Gm_p \frac{\mathbf{r}_p - \mathbf{r}}{d^3}. \quad (2.55)$$

Egalându-le în punctul specificat (situat la distanța s_p de planetă), obținem

$$\frac{m_p}{s_p^2} = \frac{1}{(a_p - s_p)^2} - \frac{1}{a_p^2}, \quad (2.56)$$

de unde urmează că

$$m_p = \left(\frac{s_p}{a_p} \right)^2 \cdot \left[\frac{1}{\left(1 + \frac{s_p}{a_p}\right)^2} - 1 \right] = 2 \left(\frac{s_p}{a_p} \right)^3 + 3 \left(\frac{s_p}{a_p} \right)^4 + \dots \quad (2.57)$$

Prin neglijarea puterilor superioare lui 3 ale raportului subunitar s_p/a_p , deducem următoarea expresie pentru raza sferei de acțiune gravitațională

$$s_p = a_p \left(\frac{m_p}{2} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad (2.58)$$

unde m_p , masa planetei, este exprimată în fracțiuni ale masei corpului central.

Pe de altă parte, egalitatea (2.54) ne furnizează o altă expresie pentru sfera de acțiune gravitațională care, de altfel, este cea mai larg uzitată în literatura de specialitate modernă. În orice caz, diversele expresii folosite de-a lungul timpului se încadrează într-un tipar de forma $s_p = Aa_p m_p^B$, cu A și B constante, în care valorile absolute obținute nu diferă semnificativ. Oricum, în formalismul geometric adoptat, din perspectiva mișcării heliocentrice a corpului infinitezimal, dimensiunea acestei sfere de acțiune planetară este neglijabilă. Spre exemplu, pentru Pământ avem $s_p = 0.01$ UA, iar pentru Jupiter $s_p = 0.3$ UA, valori mult mai mici decât semiaxele orbitelor lor heliocentrice.

2.2.2 Mișcarea în exteriorul sferei de acțiune planetară

Notăm cu \mathbf{v} vectorul viteză heliocentrică a corpului infinitezimal, cu \mathbf{v}_p vectorul viteză heliocentrică a planetei și cu v , respectiv v_p , modulele corespunzătoare. Atunci, $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_p$ se numește viteza planetocentrică neperturbată a corpului. Modulul său este

$$u^2 = v^2 + v_p^2 - 2vv_p \cos(\mathbf{v}, \mathbf{v}_p). \quad (2.59)$$

Presupunem corpul infinitezimal situat în vecinătatea corpului perturbator (mai precis, la limita sferei sale de acțiune gravitațională). Din geometria orbitelor rezultă că apropierea strânsă dintre cele două corpuri se realizează (în general) în vecinătatea unuia dintre nodurile orbitale (relative la planul orbitei planetare), deci la intersecția celor două orbite. Astfel, $\mathbf{r} \approx \mathbf{r}_p$ și $r \approx r_p = a_p$. Mai mult, tot din geometria orbitelor deducem $\cos(\mathbf{v}, \mathbf{v}_p) = \sin(\mathbf{v}, \mathbf{r}) \cos I$. Folosind și egalitatea $(\mathbf{r} \times \mathbf{v})_z = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| \cos I$, vom obține în final relația

$$u^2 = v^2 + v_p^2 - 2\frac{v_p}{a_p} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{v})_z. \quad (2.60)$$

Cu ajutorul primei egalități din (2.29) și aproximând $v_p^2 = G(1 + m_p)/a_p \approx G/a_p$, deducem

$$v^2 = v_p^2 \left(2 - \frac{a_p}{a}\right), \quad (2.61)$$

de unde rezultă

$$u^2 = v_p^2 \left[3 - \left(\frac{a_p}{a} + 2\sqrt{\frac{a}{a_p}(1 - e^2)} \cdot \cos I\right)\right], \quad (2.62)$$

sau

$$u = v_p \sqrt{3 - T}. \quad (2.63)$$

Mărimile din membrul drept fiind toate constante, ca urmare a criteriului Tisserand, putem concluda că viteza planetocentrică neperturbată a corpului de probă se conservă ca marime în urma apropieri strânse cu planeta. Cu alte cuvinte, la ieșirea din sfera de acțiune planetară modulul vitezei planetocentrice neperturbate este același ca și la intrare, variind doar orientarea acestuia. Din acest motiv, așa cum vom vedea în paragraful următor, viteza u se poate identifica cu viteza la infinit în mișcarea hiperbolică planetocentrică, care evident este aceeași pe ambele asimptote ale orbitei hiperbolice.

Egalitatea (2.63) impune condiția $T < 3$, ce corespunde tuturor orbitelor care “traversează” orbita planetară, deci care din punct de vedere dinamic pot aduce corpul în apropierea planetei perturbatoare. Pentru a justifica această observație vom face următoarele notații, $\bar{q} = a(1 - e)/a_p$ și $\bar{Q} = a(1 + e)/a_p$, funcție de care parametrul Tisserand se scrie

$$T = \frac{a_p}{a} + 2\sqrt{\frac{a_p}{a}(\bar{q} - 1)(\bar{Q} - 1) + \left(2 - \frac{a_p}{a}\right) \cdot \cos I}. \quad (2.64)$$

Orbitele care “traversează” orbita planetară sunt caracterizate de condiția $(\bar{q} - 1)(\bar{Q} - 1) < 0$, ceea ce ne conduce la următorul șir de inegalități

$$T < \frac{a_p}{a} + 2\sqrt{2 - \frac{a_p}{a}} < 3, \quad (2.65)$$

afirmația anterioară fiind astfel justificată. De remarcat că argumentul din radical este întotdeauna o cantitate pozitivă, deoarece $2 - a_p/a = 2 - (1 + e)/\bar{Q} > 2 - 2/\bar{Q} > 0$, în cazul orbitelor considerate.

Din relația (2.61) condiția de orbită închisă se transcrie $v < \sqrt{2}v_p$ și condiția de orbită progradă este $\cos(\mathbf{v}, \mathbf{v}_p) > 0$. Din (2.59) vom deduce $u < \sqrt{3}v_p$ și deci, $T > 0$. Concluzionăm din cele de mai sus că

$$0 < T < 3. \quad (2.66)$$

Prin relația (2.62) am exprimat modulul vectorului viteză \mathbf{u} funcție de tripletul elementelor orbitale (a, e, I) . În continuare vom exprima și componentele acestui vector în funcție de parametri anteriori, într-un sistem de referință convenabil ales. Fie PXYZ un sistem de referință planetocentric, în care axa PX este orientată în direcția mișcării planetei, axa PY este îndreptată spre corpul central, iar axa PZ este perpendiculară pe planul orbitei (figura 2.4). Notăm cu (v_x, v_y, v_z) și (u_x, u_y, u_z) componentele vectorilor viteză heliocentrică, respectiv planetocentrică, în acest sistem. Vom avea egalitățile $u_x = v_x - v_p$, $u_y = v_y$ și $u_z = v_z$. În mișcarea kepleriană heliocentrică a corpului infnitezimal, dacă E notează anomalia excentrică pe orbită, atunci avem

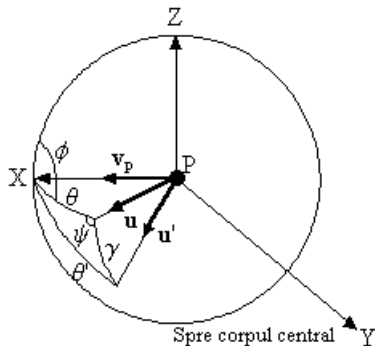


Figura 2.4. Vectorii viteză în sistemul de referință planetocentric.

$$r = a(1 - e \cos E), \quad \dot{r} = \frac{a^2 en}{r} \sin E, \quad (2.67)$$

unde $n = \sqrt{G}a^{-3/2}$ notează mișcarea medie diurnă a sa. Eliminând E din cele două relații și ținând seama de egalitățile $r = a_p$ și $v_p^2 \approx G/a_p$, obținem

$$u_y \equiv \dot{r} = \pm v_p \sqrt{2 - \frac{a_p}{a} - \frac{a}{a_p}(1 - e^2)}. \quad (2.68)$$

Pe de altă parte, din (2.29) rezultă, prin neglijarea masei m_p

$$u_x = \frac{1}{a_p} (\mathbf{r} \times \mathbf{v})_z - v_p = v_p \left(\sqrt{\frac{a}{a_p}(1 - e^2)} \cdot \cos I - 1 \right). \quad (2.69)$$

Analog se obține și

$$u_z = \frac{1}{a_p} (\mathbf{r} \times \mathbf{v})_x = \pm v_p \sqrt{\frac{a}{a_p}(1 - e^2)} \cdot \sin I. \quad (2.70)$$

Recompunând $u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$, vom obține din nou relația (2.63). Componenta u_x are întotdeauna semnul “+” înaintea parantezei mari, deoarece corpul infnitezimal are mișcare progradă (în sens direct). Semnele celorlalte componente depind de geometria apropierii și sunt prezentate în tabelul următor.

Geometria apropierii	pre-periheliu	post-periheliu
la nodul ascendent	u_y cu “+” și u_z cu “+”	u_y cu “-” și u_z cu “+”
la nodul descendent	u_y cu “+” și u_z cu “-”	u_y cu “-” și u_z cu “-”

Tabelul 2.1. Semnele componentelor vectorului viteză \mathbf{u} , în funcție de geometria apropierii.

Din relațiile (2.68) - (2.70), după câteva calcule elementare, rezultă formulele inverse

$$\begin{cases} a = \frac{G}{v_p^2 - 2u_x v_p - u^2} \\ e = \frac{1}{v_p^2} \sqrt{u^4 + 4u_x^2 v_p^2 + 4u^2 u_x v_p + u_y^2 (v_p^2 - u^2 - 2u_x v_p)} \\ I = \arctan \left(\frac{u_z}{u_x + v_p} \right). \end{cases} \quad (2.71)$$

În continuare vom parametriza orientarea vectorului \mathbf{u} în sistemul de referință folosit, prin introducerea unghiului θ măsurat între vectorii \mathbf{v}_p și \mathbf{u} , și a unghiului ϕ măsurat între planul format de acești doi vectori și planul vertical (XPZ), în sensul pozitiv al axei PY (figura 2.4). Din ecuațiile parametrice

$$\begin{cases} u_x = u \cos \theta \\ u_y = u \sin \theta \sin \phi \\ u_z = u \sin \theta \cos \phi, \end{cases} \quad (2.72)$$

egalitățile (2.71) se transcriu

$$\begin{cases} a = \frac{G}{v_p^2 - 2v_p u \cos \theta - u^2} \\ e = \frac{u^2}{v_p^2} \sqrt{1 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi + 2\frac{v_p}{u} (2 - \sin^2 \theta \sin^2 \phi) \cos \theta + \frac{v_p^2}{u^2} (4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \sin^2 \phi)} \\ I = \arctan \left(\frac{\sin \theta \cos \phi}{\cos \theta + \frac{v_p}{u}} \right), \end{cases} \quad (2.73)$$

în care trebuie făcută transformarea $I \rightarrow \pi - I$ dacă apropierea strânsă are loc la nodul descendent al orbitei.

Prima relație din (2.73) ne conduce la egalitatea

$$\cos \theta = \frac{v_p^2 - u^2 - G \left(\frac{1}{a} \right)}{2v_p u} \quad (2.74)$$

ce ne arată că, deoarece u este constant, unghiul θ depinde doar de energia orbitală heliocentrică a corpului infinezimal. În mișcarea parabolică energia orbitală este nulă, caz în care

$$\cos \theta_\infty = \frac{v_p^2 - u^2}{2v_p u}. \quad (2.75)$$

Inegalitatea $\theta < \theta_\infty$ cuprinde toate orbitele hiperbolice heliocentrice. Existența unor astfel de orbite este condiționată de inegalitatea $u > (\sqrt{2} - 1)v_p$, obținută impunând condiția ca membrul drept al egalității (2.75) să fie subunitar. Folosind (2.63), acestea îi corespunde următoarea inegalitate pentru parametrul Tisserand: $T < 2\sqrt{2}$. Dacă același membru drept, luat cu semnul minus, este supraunitar atunci $u > (\sqrt{2} + 1)v_p$, ceea ce arată că toate orbitele sunt hiperbolice. Folosind aceste considerente, într-un capitol ulterior se va studia eficiența apropiierilor strânse în expulzarea de corpuri din sistemul solar.

A treia relație din (2.73) stabilește pentru variabila unghiulară ϕ expresia

$$\cos \phi = \pm \frac{\cos \theta + \frac{v_p}{u}}{\sin \theta} \tan I, \quad (2.76)$$

unde semnul “+” se ia la nodul ascendent al orbitei iar semnul “-” la nodul descendent. De asemenea, $\phi \in [0, \pi]$ pentru mișcarea pre-periheliu și $\phi \in (\pi, 2\pi)$ pentru mișcarea post-periheliu.

Formulele de legătură $(a, e, I) \leftrightarrow (u, \theta, \phi)$ stabilite anterior ne permit să deducem dintr-un set de elemente pe celălalt. Dacă convenim să notăm cu “prim” variabilele ce caracterizează poziția corpului infinitezimal în urma apropierii strânse, atunci șirul de relații

$$(a, e, I) \rightarrow (u, \theta, \phi) \rightarrow (u, \theta', \phi') \rightarrow (a', e', I') \quad (2.77)$$

ne dă posibilitatea determinării orbitei corpului după eveniment. Veriga lipsă este însă $(\theta, \phi) \rightarrow (\theta', \phi')$ a cărei rezolvare impune studiul mișcării corpului în interiorul sferei de acțiune planetară.

2.2.3 Mișcarea în interiorul sferei de acțiune planetară

Așa cum subliniam anterior, traiectoria planetocentrică a corpului infinitezimal este aproximată cu o hiperbolă, față de care viteza planetocentrică neperturbată \mathbf{u} , definită în paragraful anterior, este asimilată cu viteza la infinit. Aceasta se conservă ca modul în urma apropierii strânse, însă vectorul vitează corespunzător își va modifica orientarea, devenind \mathbf{u}' . Notăm cu γ (figura 2.4) unghiul dintre cei doi vectori, numit *unghi de deflexie gravitațională*. Planul de rotație corespunzător este înclinat cu un unghi ψ față de planul fix determinat de vectorii $(\mathbf{u}, \mathbf{v}_p)$. Acest unghi îl vom numi *înclinația orbitală planetocentrică*. Din triunghiul sferic de laturi $(\theta, \gamma, \theta')$ deducem formulele de legătură

$$\cos \theta' = \cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma \cos \psi, \quad (2.78)$$

și notând $d\phi = \phi' - \phi$, atunci

$$\cos d\phi = \frac{\cos \gamma - \cos \theta \cos \theta'}{\sin \theta \sin \theta'}, \quad \sin d\phi = \pm \frac{\sin \gamma \sin \psi}{\sin \theta'}. \quad (2.79)$$

Dacă valoarea lui θ' este bine precizată de ecuația (2.78), deoarece $\theta' \in [0, \pi]$, pentru $d\phi$ lucrurile sunt mai complicate, valorile sale fiind în strânsă legătură cu geometria apropierii. Ele vor fi precizate explicit în paragraful următor.

Revenind la mișcarea hiperbolică planetocentrică, vom nota cu a_h , respectiv e_h , semiaxa mare și excentricitatea orbitei corespunzătoare. Avem $u^2 = -Gm_p/a_h$. Dacă ν_∞ notează anomalia adevărată limită, atunci $\cos \nu_\infty = -1/e_h$. Pe de altă parte, $\gamma/2 = \nu_\infty - \pi/2$ (figura 2.5), de unde obținem

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{e_h} = \left(1 + \frac{q_h u^2}{Gm_p}\right)^{-1}, \quad (2.80)$$

unde $q_h = a_h(1 - e_h)$ este distanța periastrului (distanța minimă la planetă).

Tot din figura 2.5 rezultă $\cos \gamma/2 = b/(q_h - a_h)$, unde b este distanța de la corpul perturbator la una din asimptotele orbitei hiperbolice, purtând numele de *parametru al apropierii*. Acesta cuantifică magnitudinea apropierii strânse. Utilizând expresiile deduse anterior, putem scrie

$$b = q_h \sqrt{\frac{e_h + 1}{e_h - 1}} = q_h \left(1 + 2 \frac{Gm_p}{q_h u^2}\right)^{\frac{1}{2}} = q_h f, \quad (2.81)$$

unde f poartă numele de *factor de convergență gravitațională* (“gravitational focusing”). f este o mărime adimensională supraunitară, așa cum rezultă dintr-o expresie alternativă a sa

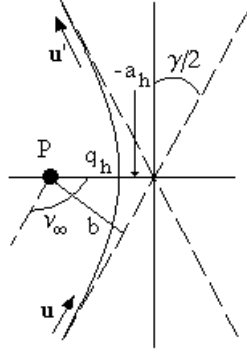


Figura 2.5. Orbita hiperbolică planetocentrică din interiorul sferei de acțiune gravitațională.

$$f = \left[1 + \frac{R_p}{q_h} \left(\frac{v_{par}}{u} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.82)$$

unde R_p este raza corpului sferic perturbator, iar v_{par} este viteza parabolică la suprafața sa. Factorul de convergență gravitațională arată în ce raport scade distanța la periastru față de distanța neperturbată b , în urma unei apropieri strânse. De asemenea, el descrie și în ce raport crește viteza corpului infinitezimal în prezența câmpului gravitic planetar, deoarece se arată ușor că la periastru viteza sa este $u_h = uf$.

Combinând relațiile (2.80) și (2.81), obținem următoarea expresie pentru unghiul de deflexie gravitațională

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{Gm_p}{bu^2} = \frac{R_p}{2b} \left(\frac{v_{par}}{u} \right)^2. \quad (2.83)$$

Deci $\gamma = \gamma(b, u)$, acesta variind în funcție de magnitudinea apropierii și de viteza corpului “la infinit”. Valoarea sa maximă se obține la limita de coliziune cu planeta, $q_h = R_p$, caz în care parametrul b ia valoarea

$$b = r_{imp} \equiv R_p \left[1 + \left(\frac{v_{par}}{u} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.84)$$

și se numește *rază de impact*, iar *unghiul maxim de deflexie gravitațională* va fi dat de

$$\sin \frac{\gamma_{max}}{2} = \left[1 + 2 \left(\frac{u}{v_{par}} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (2.85)$$

Viteza în periastru se va obține atunci din expresia

$$u_h^2 = u^2 + v_{par}^2, \quad (2.86)$$

ce este deseori folosită în literatură la estimarea vitezei de impact a unui corp, cunoscând viteza sa “la infinit” u .

Parametri r_{imp} și γ_{max} depind doar de câteva caracteristici fizice ale corpului perturbator și de viteza invariantă u , deci ei sunt proprii fiecărei orbite asteroidale în parte și constanți pe intervale mari de timp, în lipsa apropiierilor strânse cu un al doilea corp perturbator. În figura 2.6 s-a reprezentat magnitudinea acestor doi parametri, în cazul a două planete cu caracteristici foarte diferite: Pământul și Jupiter, pentru diverse valori ale vitezei planetocentrice u , normalizată la viteza heliocentrică planetară v_p . Cu cât raza de impact este mai mare, cu atât crește

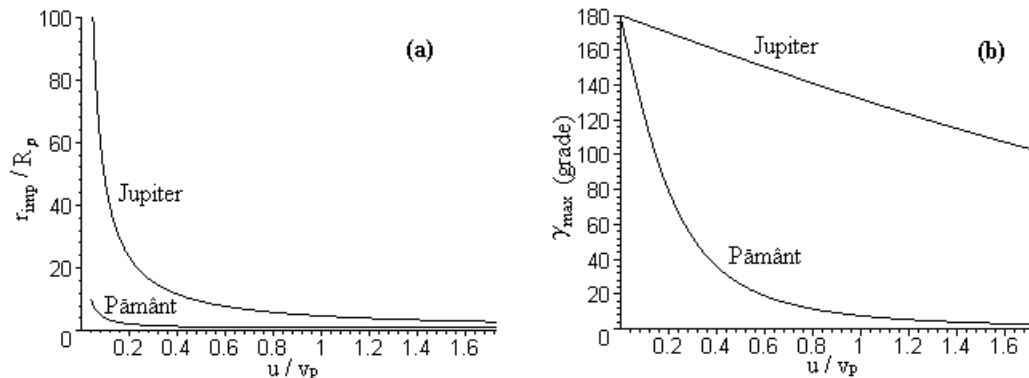


Figura 2.6. (a) Variația razei de impact r_{imp} , normalizată la raza planetară R_p ; (b) Variația unghiului maxim de deflexie gravitațională γ_{max} , în funcție de raportul vitezelor u/v_p , pentru planetele Pământ și Jupiter.

șansa ca orbita respectivă să devină, în urma apropiierilor repetate cu planeta, o orbită colizională. Cu cât unghiul maxim de deflexie este mai mare, cu atât este mai violentă modificarea orbitală a corpului infinezimal, ajungându-se până la expulzarea sa din sistem. Acesta este, de fapt, principiul asistenței gravitaționale (“gravitational assist”), folosit cu eficacitate de misiunile spațiale interplanetare pentru a câștiga energie orbitală, în urma unei apropieri strânse cu planetele gigant (de exemplu, misiunile Voyager).

2.2.4 O hartă completă a modificării orbitale

Formalismul clasic dezvoltat de Öpik și-a găsit de-a lungul timpului aplicabilitatea în diverse probleme din domeniul mecanicii statistice, dar mai puțin în probleme de natură deterministă. Aceasta deoarece, o serie de parametri orbitali ce intervin în calcule nu pot fi precizați explicit, ci doar în sens statistic. În primul rând este vorba despre elementele orbitale kepleriene Ω , ω și M , care nu intervin deloc în formalismul folosit (deseori considerându-se că variază uniform de-a lungul orbitei) și, în al doilea rând, expresiile înclinației orbitei planetocentrice ψ și a parametrului apropierii b , care nu sunt legate explicit de geometria apropierii (variația lor supunându-se tot unui model statistic).

În rândurile următoare vom extinde câteva rezultate din formalismul lui Öpik ce ne permit apoi explicitarea tuturor parametrilor orbitali mai sus menționați și crearea unei hărți complete a modificării orbitale [Berinde, 2001a].

Vom prezenta mai jos ipotezele simplificatoare în cadrul cărora vom rezolva problema, ipoteze care de altfel aparțin lui Öpik: (i) mișcarea corpului infinezimal cunoaște două regimuri, cel heliocentric și cel planetocentric, în funcție de poziția sa față de sfera de acțiune gravitațională a planetei perturbatoare; (ii) planeta execută o mișcare circulară în jurul corpului central; (iii) apropierea strânsă are loc în vecinătatea unuia din nodurile orbitale ale orbitei corpului infinezimal, raportată la planul de mișcare a planetei; (iv) pe parcursul apropierii strânse, traiectoriile neperturbate ale corpurilor în discuție sunt presupuse a fi rectilinii iar vitezele neperturbate constante; și în final, (v) efectul apropierii strânse asupra corpului infinezimal este modelat ca un impuls instantaneu aplicat în momentul atingerii distanței planetocentrice minime.

Fie $(a, e, I, \Omega, \omega, M)$ setul de elemente orbitale kepleriene dinaintea apropierii și ϵ_{nod} , ϵ_{per} parametri ce selectează tipul apropierii: $\epsilon_{nod} = +1$ la nodul ascendent, $\epsilon_{nod} = -1$ la nodul descendent; $\epsilon_{per} = +1$ pentru întâlnire pre-periheliu, $\epsilon_{per} = -1$ pentru întâlnire post-periheliu. Dat fiind primul parametru, al doilea se obține din $\epsilon_{per} = \text{sign}[\epsilon_{nod}(\pi - \omega)]$, unde $\text{sign}[\cdot]$ este funcția semn. Notăm cu t_Ω momentul de timp când corpul infinezimal trece printr-unul din

nodurile sale orbitale. Dacă anomalia mijlocie M este dată la un moment de timp anterior t și M_Ω notează anomalia mijlocie la trecerea prin nodul orbital, atunci $t_\Omega = t + \sqrt{a^3/G} (M_\Omega - M)$. Din ecuația lui Kepler avem $M_\Omega = E_\Omega - e \sin E_\Omega$, unde anomalia excentrică este dată de relația

$$\tan \frac{E_\Omega}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \left(\tan \frac{\omega}{2} \right)^{\epsilon_{nod}}. \quad (2.87)$$

Considerăm nodul orbital situat la distanța d de orbita planetară, orbită pe care, la momentul de timp t_Ω , planeta perturbatoare ocupă poziția P_Ω (figura 2.7), punct situat la distanța d_p de linia nodurilor orbitei corpului infinitezimal. Geometria apropierii este pe deplin caracterizată de aceste două distanțe, ale căror expresii sunt

$$d = a_p - a \frac{1-e^2}{1+\epsilon_{nod} \cos \omega}, \quad d_p = a_p(l_p(t_\Omega) - \Omega), \quad (2.88)$$

unde l_p notează longitudinea heliocentrică a corpului perturbator, o funcție liniară de timp. Distanțele respective au semn, după cum sunt orientate față de un sistem de referință OXYZ cu centrul în punctul de întâlnire al liniei nodurilor cu orbita planetei, având axa OX orientată în direcția de mișcare a acesteia, axa OY îndreptată spre corpul central și axa OZ perpendiculară pe planul orbitei planetare.

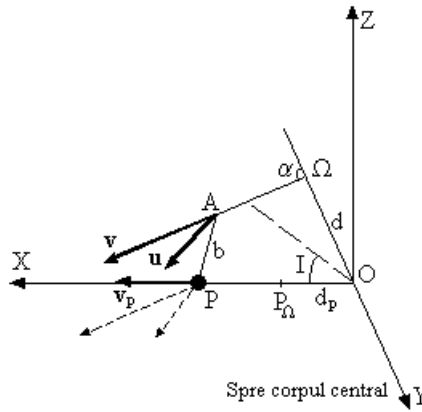


Figura 2.7. Geometria apropierii în vecinătatea liniei nodurilor.

Pentru început vom exprima distanța AP dintre cele două corpuri la fiecare moment de timp și apoi vom determina minimumul acesteia, care va fi tocmai parametrul apropierii b . Fie l distanța de la punctul A la nodul orbitei Ω , luată cu semnul plus în direcția mișcării, atunci coordonatele punctului A vor fi date de

$$\begin{cases} x_A = l \frac{v_x}{v} \\ y_A = d + l \frac{v_y}{v} \\ z_A = l \frac{v_z}{v} \end{cases} \quad (2.89)$$

și folosindu-ne de relațiile dintre vectorii viteză \mathbf{u} și \mathbf{v} și relațiile (2.72), putem scrie

$$\begin{cases} x_A = l \left(\frac{u}{v} \cos \theta + \frac{v_p}{v} \right) \\ y_A = d + l \frac{u}{v} \sin \theta \sin \phi \\ z_A = l \frac{u}{v} \sin \theta \cos \phi, \end{cases} \quad (2.90)$$

unde u , θ , ϕ sunt funcții de elementele orbitale inițiale, așa cum s-a arătat în paragraful anterior, ecuațiile (2.62), (2.74) și (2.76).

Distanța planetei la linia nodurilor OY va fi dată de $x_P = d_p + lv_p/v$ și astfel, distanța căutată se scrie

$$\begin{aligned} AP^2 &= (x_A - x_P)^2 + y_A^2 + z_A^2 = \\ &= \left[l \frac{u}{v} + (d \sin \theta \sin \phi - d_p \cos \theta) \right]^2 + (d \cos \phi)^2 + (d \sin \phi \cos \theta + d_p \sin \theta)^2. \end{aligned} \quad (2.91)$$

Minimul acestei expresii se realizează atunci când primul termen din partea dreaptă dispare, adică pentru

$$l = \frac{v}{u} (d_p \cos \theta - d \sin \theta \sin \phi), \quad (2.92)$$

după un timp

$$d\tau = \frac{1}{u} (d_p \cos \theta - d \sin \theta \sin \phi) \quad (2.93)$$

de la trecerea corpului prin nodul orbitei sale. Astfel, rezultă

$$b = \sqrt{b_{moid}^2 + (d \sin \phi \cos \theta + d_p \sin \theta)^2}. \quad (2.94)$$

Mărimea $b_{moid} = |d \cos \phi|$ se numește *distanța minimă de intersecție orbitală* (MOID - “minimal orbital intersection distance”) [Carusi și Dotto, 1996] și exprimă distanța minimă dintre orbitele kepleriene osculatoare ale celor două corpuri, măsurată în spațiul tridimensional. După cum arată expresia anterioară, această distanță este atinsă în cazul particular $d_p = d \sin \phi \cot \theta$.

Notăm $\mathbf{b} = \overrightarrow{AP}$. Folosind relațiile (2.72) și (2.90), după câteva calcule se poate arăta că vectorul produs vectorial $\mathbf{b} \times \mathbf{u}$, ce are semnificația momentului cinetic specific al mișcării hiperbolice planetocentrice, va avea componentele

$$\begin{cases} (\mathbf{b} \times \mathbf{u})_x = ud \sin \theta \cos \phi \\ (\mathbf{b} \times \mathbf{u})_y = ud_p \sin \theta \cos \phi \\ (\mathbf{b} \times \mathbf{u})_z = -u(d \cos \theta + d_p \sin \theta \sin \phi). \end{cases} \quad (2.95)$$

Rezultă imediat că $|\mathbf{b} \times \mathbf{u}| = bu$, ceea ce confirmă perpendicularitatea vectorilor \mathbf{b} și \mathbf{u} . Planul format de acești doi vectori este planul orbitei planetocentrice. Înclinația sa pe planul format de vectorii \mathbf{u} și \mathbf{v}_p este

$$\cos \psi = \frac{(\mathbf{b} \times \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}_p)}{|\mathbf{b} \times \mathbf{u}| \cdot |\mathbf{u} \times \mathbf{v}_p|}, \quad (2.96)$$

de unde, ținând seama de expresiile (2.95) și de faptul că vectorul $\mathbf{u} \times \mathbf{v}_p$ are componentele $(0, uv_p \sin \theta \cos \phi, -uv_p \sin \theta \sin \phi)$, rezultă

$$\cos \psi = \frac{d \sin \phi \cos \theta + d_p \sin \theta}{b}, \quad (2.97)$$

sau folosind (2.94),

$$\sin \psi = \frac{b_{moid}}{b}. \quad (2.98)$$

În acest moment am determinat toți parametri geometrici dinaintea acțiunii perturbatoare a planetei. Folosind acum expresiile lui b și ψ , din (2.83) rezultă γ , iar din (2.78) rezultă θ' . Unghiul ϕ' se obține din relațiile (2.79), mai precis

$$\phi' = \phi - \text{sign}(\epsilon_{nod} d) \cdot \arcsin\left(\frac{\sin \gamma \sin \psi}{\sin \theta'}\right). \quad (2.99)$$

Dacă păstrăm notația cu “prim” pentru elementele geometrice de după apropiere - omoloagele celor dinaintea apropierii, atunci vom avea

$$\epsilon'_{nod} = \text{sign}(\cos \phi \cos \phi') \cdot \epsilon_{nod}, \quad \epsilon'_{per} = \text{sign}(\sin \phi \sin \phi') \cdot \epsilon_{per}. \quad (2.100)$$

Modificarea tipului nodului orbital va induce după sine modificarea longitudinii finale Ω' a nodului cu π radiani. De asemenea, dacă $\epsilon'_{nod} \cdot \epsilon'_{per} = -1$ atunci argumentul final al periheliului ω' se va înlocui cu $2\pi - \omega'$.

Din conservarea momentului cinetic planetocentric și folosind expresiile (2.95), rezultă expresiile distanțelor ce caracterizează noua geometrie a apropierii, $d' = dk$ și $d'_p = d_p k$, unde

$$k = \frac{\sin \theta \cos \phi}{\sin \theta' \cos \phi'}. \quad (2.101)$$

Cu aceste valori se poate obține o expresie analoagă cu (2.93) a intervalului de timp $d\tau'$, măsurat de la trecerea prin noul nod al orbitei. Imediat vom putea scrie longitudinea nodului orbital

$$\Omega' = \Omega + \frac{1}{a_p} [d_p - d'_p + v_p(d\tau - d\tau')], \quad (2.102)$$

a argumentului periheliului

$$\cos \omega' = \epsilon'_{nod} \cdot \frac{1}{e'} \left[(1 - e'^2) \frac{a'}{a_p - d'} - 1 \right], \quad (2.103)$$

și a momentului de trecere prin nodul orbitei

$$t'_\Omega = t_\Omega + (d\tau - d\tau'). \quad (2.104)$$

Elementele orbitale a' , e' și I' se obțin din expresiile (2.73), în care variabilele unghiulare din membrul drept se înlocuiesc cu omoloagele lor notate cu “prim”, date de relațiile (2.78), respectiv (2.99). Apoi, valoarea anomaliei mijlocii M'_Ω se va obține dintr-o expresie analoagă cu (2.87), în care mărimile din membrul drept vor fi cele rezultate în urma modificării orbitale.

Care sunt condițiile în care această hartă a modificării orbitale poate fi aplicată? În primul rând, este condiția de întâlnire a orbitelor corpurilor implicate în apropierea strânsă: $1 - e < a_p/a < 1 + e$, ceea ce, din păcate, exclude orbitele care se pot apropia tangențial; condiția de intrare în sfera de acțiune planetară: $b < s_p$, cu s_p dat de (2.54); condiția de non-coliziune cu planeta, dată de $b > r_{imp}$ și, bineînțeles, ipotezele simplificatoare (i) - (v) pe baza cărora s-a construit algoritmul. Menționăm aici condițiile de întâlnire în vecinătatea unuia din nodurile orbitale: $|d| \ll a_p$ și $|d_p| \ll a_p$ și condiția ca traiectoriile celor două corpuri să poată fi considerate rectilinii pe porțiunea intersecției orbitale, ceea ce se întâmplă ori de câte ori variația unghiului α , dintre vectorul de poziție \mathbf{r} și vectorul viteză \mathbf{v} (figura 2.7), pe un interval dat de timp, să zicem $d\tau$, este neglijabilă. Expresia unghiului α este

$$\sin \alpha = \frac{|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|}{rv} = \sqrt{\frac{a}{r}(1 - e^2)} \left/ \left(2 - \frac{r}{a}\right)\right., \quad (2.105)$$

și folosind ecuația (2.68), variația sa în intervalul de timp $d\tau$, la distanța a_p de corpul central, este

$$d\alpha = \sqrt{Ga(1 - e^2)} \frac{a_p - a}{a_p^2(2a - a_p)} d\tau, \quad (2.106)$$

ce permite verificarea condiției enunțate.

Se poate arăta că orbitele puternic alungite, având periheliul în vecinătatea Soarelui, așa numite *orbite zgârie-Soare* (“Sun-grazers”), și cu afeliul în preajma orbitei corpului perturbator, nu îndeplinesc condiția respectivă. Astfel, cu $a(1+e) \approx a_p$ expresia (2.106) se transformă în

$$d\alpha = \sqrt{G}a^{-3/2} \frac{e}{\sqrt{(1-e)(1+e)^3}} d\tau, \quad (2.107)$$

și din $e \lesssim 1$, rezultă că $d\alpha \gg 0$.

În acest fel am obținut o hartă completă a modificării orbitale, ce poate fi folosită în propagarea traiectoriei unui corp supus apropiierilor strânse repetate cu una sau mai multe planete perturbatoare. Această hartă își va găsi aplicabilitatea în capitolul 4 al lucrării, unde este studiat procesul de difuzie haotică a corpurilor din centura lui Kuiper spre interiorul sistemului solar.

Capitolul 3

Caracteristici ale evoluției dinamice pe termen lung

În acest capitol vom prezenta principalele caracteristici de evoluție dinamică ale corpurilor din vecinătatea orbitei terestre, caracteristici ce stau, de altfel, la baza unor clasificări dinamice. În majoritatea cazurilor, acestea sunt puse în evidență în urma unor integrări numerice pe termen lung, efectuate într-un sistem dinamic ce modelează sistemul nostru planetar [Dvorak, 1999]. Prin sintagma “termen lung” înțelegem o perioadă de timp ce cuprinde zeci de intervale de timp Lyapounov, pentru majoritatea asteroizilor de tip NEA aceasta însemnând sute sau mii de ani.

3.1 Comportament haotic

În era timpurie a mecanicii cerești astronomii considerau că orice sistem dinamic de corpuri (și chiar Universul în întregul său) este *determinist*, și anume, dată fiind starea inițială a acestuia și cunoscând toate forțele ce acționează asupra sa la fiecare moment de timp, prin rezolvarea ecuațiilor de mișcare se pot determina stările trecute și viitoare ale sistemului, oricât de îndepărtate ar fi ele. Din păcate, această ipoteză nu este valabilă pentru majoritatea sistemelor dinamice de corpuri, datorită fenomenului numit *haos*.

Nu există o definiție universal acceptată a haosului, chiar dacă el este detectat într-o largă varietate de sisteme dinamice. Pentru scopul nostru vom folosi următoarea definiție, conform [Murray și Dermott, 1999]: un obiect din sistemul solar spunem că prezintă *mișcare haotică* dacă starea sa dinamică finală este sensibil dependentă de starea sa inițială. Știind că orice mărime fizică înglobează eroarea sa de determinare, la fel și imprecizia condițiilor inițiale se transformă în incertitudinea rezultatelor finale. În acest paragraf vom examina natura și consecințele fenomenului de haos în contextul evoluției dinamice pe termen lung a populației de corpuri studiate.

3.1.1 Haos în problema restrânsă circulară plană a celor trei corpuri

Haosul se manifestă chiar și într-unul dintre cele mai simple modele dinamice din mecanica cerească: problema restrânsă circulară plană a celor trei corpuri. Vom considera în continuare un astfel de exemplu, în care corpul perturbator este identificat cu planeta Jupiter (situată pe orbită circulară de rază $a = 5.2$ UA) și două corpuri infinitezimale, situate pe o aceeași orbită kepleriană, de parametri orbitali $a = 7$ UA, $e = 0.7$, $\omega = 80^\circ$ și $M = 100^\circ$, inițial foarte apropiate una de cealaltă, la o diferență de numai $10^{-6}(\circ)$ în anomalia mijlocie. Figura următoare prezintă evoluția în timp a semiaxelor mari ale celor două corpuri. Mișcarea lor fiind dominată de numeroase apropieri strânse cu planeta Jupiter, semiaxele mari înregistrează variații aleatoare (“random walk”), iar la scurt timp ele vor dobândi valori complet diferite. Acest comportament dinamic denotă existența fenomenului de haos în sistemul respectiv.

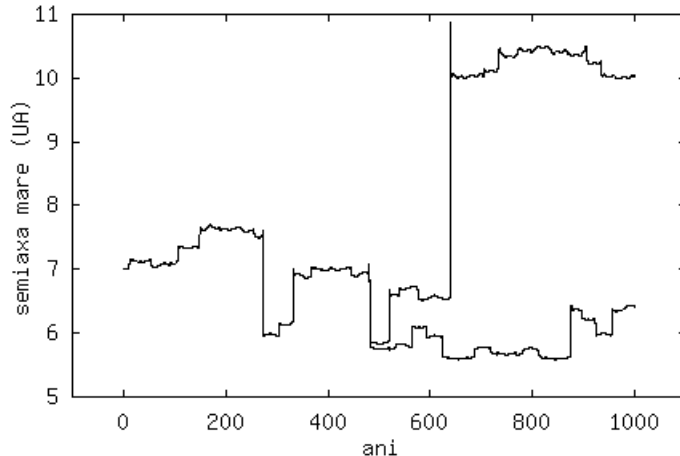


Figura 3.1. Variația semiaxelor mari a două particule test, inițial apropiate, perturbate de planeta Jupiter, în problema restrânsă circulară plană a celor trei corpuri. Mișcarea lor este dominată de apropieri strânse.

Haosul are însă manifestări mult mai subtile decât aceasta. Astfel, în figura 3.2 sunt prezentate evoluțiile dinamice a două corpuri infinitezimale, situate în același sistem dinamic simplificat, inițial foarte apropiate una de alta, pe o orbită kepleriană de parametri orbitali $a = 3.633$ UA și $e = 0.1967$, ceilalți parametri unghiulari fiind toți nuli. Inițial, orbitele celor două corpuri prezintă variații regulate, după un timp ele se separă, evoluând haotic. Menționăm că în această simulare nu sunt înregistrate apropieri strânse cu planeta perturbatoare (Jupiter). În acest exemplu, variațiile neregulate ale semiaxelor mari, ce apar vizibile de la un moment dat, marchează tranziția într-un regim haotic de mișcare.

Structura relativ simplă a problemei restrânsă circulare plane a celor trei corpuri a permis mecanicienilor introducerea unor parametri cu ajutorul cărora se pot caracteriza orbitele regulate și cele haotice. Pentru aceasta, pornim de la ecuațiile de mișcare (2.12) ale corpului infinitezimal, scrise în sistemul de referință corotațional pentru cazul plan

$$\begin{cases} \ddot{\xi} - 2n_p\dot{\eta} - n_p^2\xi = -G \left[\frac{\xi - \xi^*}{r^3} + m_p \frac{\xi - \xi_p}{d^3} \right] \\ \ddot{\eta} + 2n_p\dot{\xi} - n_p^2\eta = -G \left[\frac{1}{r^3} + m_p \frac{1}{d^3} \right] \eta. \end{cases} \quad (3.1)$$

Soluția problemei este dată de setul de parametri $(\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta})$ ce corespunde, la fiecare moment de timp, unui punct în spațiul fazelor cuadridimensional definit de aceștia. Pe de altă parte, integrala Jacobi

$$C_J = n_p^2 (\xi^2 + \eta^2) + 2G \left(\frac{1}{r} + m_p \frac{1}{d} \right) - \dot{\xi}^2 - \dot{\eta}^2 \quad (3.2)$$

definește o “hipersuprafață” în acest spațiu al fazelor, și astfel, poziția particulei infinitezimale va fi unic determinată de tripletul $(\xi, \eta, \dot{\xi})$, parametrul $\dot{\eta}$ putând fi obținut, până la o schimbare de semn, cunoscând valoarea constantei Jacobi. La fiecare moment de timp, când $\eta = 0$, vom marca într-un plan valorile parametrilor rămași independenți $(\xi, \dot{\xi})$. Ambiguitatea în semnul lui $\dot{\eta}$ este înlăturată considerând doar acele momente de timp când, de exemplu, $\dot{\eta} > 0$. Aceasta este metoda *secțiunii Poincaré*. Această secțiune se definește, deci, prin fixarea unui plan în spațiul tridimensional al fazelor și prin marcarea punctelor unde traiectoria corpului intersectează acest

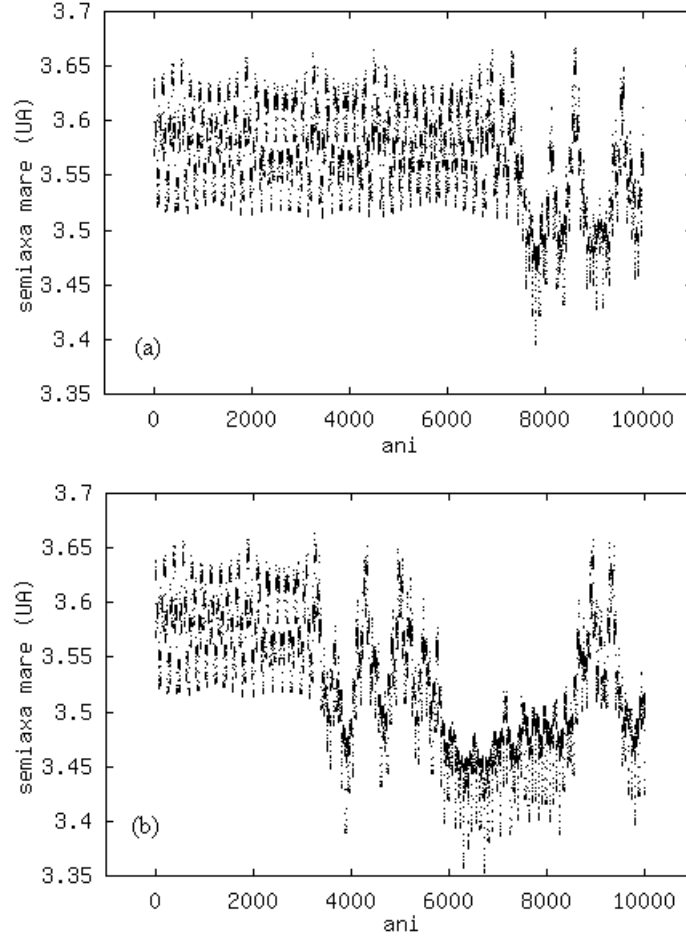


Figura 3.2. Variația semiaxelor mari a două particule test, inițial apropiate, perturbate de planeta Jupiter, în problema restrânsă circulară plană a celor trei corpuri. Mișcarea lor nu înregistrează apropieri strânse.

plan, într-o anumită direcție. Metoda are avantajul de a prezenta modificările orbitale ce au loc în timp, într-o manieră mult simplificată față de cea a reprezentării directe a traiectoriei orbitale. Pentru un anumit punct $(\xi, \dot{\xi})$ de pe suprafața de secțiune, vom putea folosi valoarea constantei Jacobi și faptul că $\eta = 0$ pentru a determina valoarea lui $\dot{\eta}$. Astfel, toate cele patru cantități sunt cunoscute și, deci, orbita heliocentrică a corpului va fi bine precizată. Din relațiile (2.7) și (2.9), în care facem translația $\xi \rightarrow \xi - \xi_*$ pentru a aduce corpul central în originea sistemului de referință, obținem

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{\xi}^2 + [\dot{\eta} + n_p(\xi - \xi_*)]^2 \\ (\mathbf{r} \times \mathbf{v})_z &= (\xi - \xi_*)[\dot{\eta} + n_p(\xi - \xi_*)], \end{aligned} \quad (3.3)$$

și folosind acum relațiile (2.29), deducem expresiile semiaxei mari și a excentricității

$$a = 1 \left/ \left[\frac{2}{r} - \frac{v^2}{G} \right] \right., \quad e = \sqrt{1 - \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{v})_z^2}{aG}} \quad (3.4)$$

ce definesc orbita corpului în funcție de coordonatele din planul de secțiune Poincaré.

Un exemplu de secțiune Poincaré este prezentat schematic în figura 3.3. Condiții inițiale diferite produc pe această suprafață traiectorii diferite având două caracteristici distincte: traiectorii periodice în jurul unor “insule” de stabilitate, corespunzând orbitelor regulate și traiectorii ce

ocupă zone mai extinse în jurul zonelor de stabilitate, corespunzând orbitelor haotice. Structura spațiului fazelor în problema restrânsă circulară plană a celor trei corpuri este în principal modelată de fenomenele de rezonanță ale mișcării medii [Murray și Dermott, 1999]. Poziționarea punctelor de echilibru stabil și instabil ale fiecărei rezonanțe, precum și intensitatea cu care se manifestă acestea, definesc locațiile și dimensiunile regiunilor regulate și a celor haotice. În general, orbitele periodice ce definesc insulele de stabilitate sunt asociate unor astfel de rezonanțe, pe când regiunile adiacente lor corespund mișcărilor haotice. Acestea permit unui corp să migreze pe arii extinse în spațiul fazelor, rezultând de aici mari variații în timp ale elementelor orbitale. Cantitățile cheie ce definesc extinderea regiunilor haotice sunt valoarea constantei Jacobi, C_J , și masa corpului perturbator, m_p .

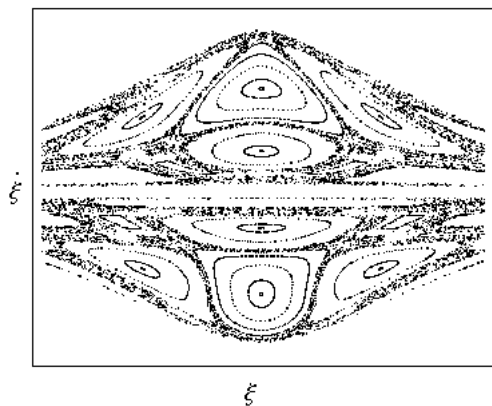


Figura 3.3. Un exemplu schematic de secțiune Poincaré, prezentând zonele de stabilitate și instabilitate a mișcării.

Metoda secțiunii Poincaré are însă o gamă restrânsă de aplicabilitate: în problema restrânsă, circulară, plană a celor trei corpuri. Obiectele de tip NEA prezintă însă mișcări pe termen lung ce rareori se pot încadra în acest model simplificat. În secțiunea următoare vom prezenta metoda exponenților Lyapounov de determinare a gradului de haoticitate al unei mișcări, metodă aplicabilă la orice sistem dinamic de corpuri.

3.1.2 Exponenți Lyapounov

Așa cum s-a văzut în paragraful anterior, orbitele haotice se caracterizează printr-o mare sensibilitate la condițiile inițiale. În această secțiune vom prezenta un procedeu de măsurare a gradului de haoticitate al unor traiectorii din cadrul problemei generale a celor “n” corpuri, bazându-ne pe această caracteristică de instabilitate a mișcărilor haotice.

În spiritul notațiilor introduse în sistemul de ecuații (2.1), sistemul de ecuații diferențiale (reduc la ordinul I) ce descrie mișcarea heliocentrică a corpului infinitezimal, sub acțiunea perturbatoare a “n-2” corpuri masive, este

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -G \frac{\mathbf{r}}{r^3} + G \sum_{i=1}^{n-2} m_i \left(\frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^3} \right) \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \end{cases} \quad (3.5)$$

care se poate scrie concis în formă vectorială

$$\frac{dX}{dt}(t) = F(X), \quad (3.6)$$

unde X este un vector hexadimensional format din componentele vectorului de poziție \mathbf{r} și al vectorului viteză \mathbf{v} al corpului de probă, într-un sistem de referință heliocentric, iar F este o funcție vectorială depinzând de X și, de asemenea, de coordonatele celorlalte corpuri perturbatoare din sistem.

Aplicația $t \rightarrow X(t)$ definește orbita corpului de-a lungul timpului. Condițiile inițiale la momentul t_0 sunt $X_0 = X(t_0)$. Prin rezolvarea sistemului de ecuații (3.6), fiecărui set de condiții inițiale X_0 , îi va corespunde o orbită distinctă. Definim familia de aplicații $\Phi^t : X_0 \rightarrow (X(t))$, parametrizată după t , ce poartă numele de *flux integral*. Acesta asociază condițiilor inițiale soluția generală a problemei, la fiecare moment de timp t . Fluxul integral este o aplicație diferentiabilă în raport cu condițiile inițiale, astfel încât următoarele derivate mixte există și sunt egale

$$\frac{\partial^2 \Phi^t(X_0)}{\partial t \partial X_0} = \frac{\partial^2 \Phi^t(X_0)}{\partial X_0 \partial t}, \quad (3.7)$$

unde simbolul de derivare parțială a funcției vectoriale în raport cu argumentul vectorial notează matricea jacobiană a funcției respective, formată din derivatele parțiale ale componentelor funcției în raport cu componentele vectorului argument. Notăm de asemenea cu

$$L(t) = \frac{\partial \Phi^t}{\partial X_0}(X_0) \quad (3.8)$$

matricea jacobiană a fluxului integral în raport cu condițiile inițiale și deoarece $X(t) = \Phi^t(X_0)$, avem următorul șir de egalități

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} L(t) &= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \Phi^t(X_0)}{\partial X_0} \right] = \frac{\partial}{\partial X_0} \left[\frac{dX}{dt}(t) \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial X_0} F(X(t)) = \frac{\partial F}{\partial X}(X(t)) \frac{\partial X(t)}{\partial X_0} = \frac{\partial F}{\partial X}(X(t)) L(t), \end{aligned} \quad (3.9)$$

de unde obținem un sistem de ecuații diferențiale liniare în raport cu timpul - așa numitele *ecuații cu variații* [Milani și Mazzini, 1997]

$$\frac{d}{dt} L(t) = A(t) L(t), \quad (3.10)$$

unde $A(t)$ este matricea jacobiană a funcției $F(X)$ calculată de-a lungul orbitei. Din $\Phi^{t_0}(X_0) = X_0$, obținem condițiile inițiale de integrare pentru sistemul (3.10), anume $L(t_0) = I_6$, unde I_6 este matricea unitate de ordinul 6.

O interpretare dinamică a ecuațiilor cu variații se poate obține după cum urmează. Fie X_0 și Y_0 două seturi de condiții inițiale (aproape identice) pentru sistemul dinamic (3.6). Diferența inițială $V(t_0) = V_0 = Y_0 - X_0$ se propagă în timp astfel

$$\frac{d}{dt} V(t) = \frac{d}{dt} [Y(t) - X(t)] = F(Y) - F(X) = \frac{\partial F}{\partial X}(X(t)) [Y(t) - X(t)] + O(Y(t) - X(t)) \quad (3.11)$$

și liniarizând deducem

$$\frac{d}{dt} V(t) = \frac{\partial F}{\partial X}(X(t)) V(t) \quad (3.12)$$

cu soluția dată de $V(t) = L(t) V_0$, așa cum rezultă din (3.10). Ecuațiile cu variații (3.12), care sunt de fapt ecuațiile (3.10) scalate cu vectorul V_0 , sunt ecuațiile mișcării relative liniarizate a unui corp având condițiile inițiale $X_0 + V_0$ față de ale celui nominal cu condițiile inițiale X_0 .

Se numește *exponent Lyapounov* al unui sistem dinamic, orice număr real obținut ca o limită de tipul [Milani și Mazzini, 1997]

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t - t_0} \ln \frac{|V(t)|}{|V_0|} = \Lambda(X_0, V_0), \quad (3.13)$$

unde $V(t)$ este soluția ecuațiilor cu variații cu condiția inițială V_0 , relativ la orbita cu condiția inițială X_0 . Pentru aceleași condiții inițiale există mai mulți exponenți Lyapounov, după cum se alege separația inițială V_0 . Se poate arăta că cel mai mare dintre acești exponenți, notat cu LCE, dar pe mai departe identificat simplu prin Λ și numit *exponent caracteristic Lyapounov*, ne dă o măsură cantitativă a ratei de divergență locală a două traiectorii apropiate, având o separație inițială arbitrară [Murray și Dermott, 1999]. Această divergență are loc după formula

$$V(t) = V_0 e^{\Lambda(t-t_0)}. \quad (3.14)$$

Dacă $\Lambda > 0$ orbitele diverg și, prin definiție, mișcarea este haotică, iar dacă $\Lambda \approx 0$ vom avea $V(t) \approx V_0$, orbitele păstrându-și separația inițială, în acest caz mișcarea fiind regulată. Inversul exponentului caracteristic Lyapounov, $T_L \equiv 1/\Lambda$, se numește timp Lyapounov, el reprezentând intervalul de timp după care două orbite relativ apropiate se îndepărtează cu factorul e .

Chiar dacă Λ este definit riguros ca o limită pentru $t \rightarrow \infty$, o măsură aproximativă a sa poate fi obținută printr-o integrare finită a ecuațiilor de mișcare împreună cu ecuațiile cu variații corespunzătoare și determinând apoi ce mai bună dreaptă de interpolare pentru funcția de timp $\Lambda(t) = \ln(V(t)/V_0)$. Panta acestei drepte va fi exponentul caracteristic Lyapounov căutat. Adesea, o determinare bună se realizează doar după o perioadă de integrare de aproximativ $10 T_L$ [Knezevic și Milani, 2000].

Dacă $V(t)$ crește foarte mult față de valoarea inițială V_0 , atunci Λ determinat anterior nu mai este o măsură corectă a divergenței locale a orbitelor. În acest caz este nevoie de o renormalizare a vectorului de deplasare, de exemplu, la intervale regulate de timp, Δt , dimensiunea sa este adusă din nou la cea inițială. Dacă indexăm aceste intervale cu $1, 2, \dots, n$ și notăm cu V_k vectorii deplasare obținuți pe aceste intervale, iar cu Λ_k exponenții Lyapounov determinați prin raportul simplu $\Lambda_k = \ln(V_k/V_0)/\Delta t$, atunci valoarea căutată a exponentului Lyapounov se obține făcând media aritmetică [Murray și Dermott, 1999]

$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \Lambda_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{\ln(V_k/V_0)}{n \Delta t}. \quad (3.15)$$

Desigur, experimentele numerice se vor mărgini doar la un număr finit de astfel de intervale.

Această metodă de determinare a exponentului caracteristic Lyapounov are însă un neajuns. Deoarece folosim doar un interval finit de integrare, este posibil să nu putem decide corect natura unei orbite. Astfel, în timp ce caracterul haotic al unei orbite se poate pune ușor în evidență (după un anumit interval de timp), s-ar putea ca natura regulată a unei orbite să nu poată fi dovedită niciodată, ea putând să aibă un timp Lyapounov mult mai mare decât intervalul de integrare considerat. De asemenea, pentru orbitele care înregistrează stări de tranziție între mișcări regulate și mișcări haotice, exponentul Lyapounov determinat în acest fel nu este relevant.

Integrarea numerică a ecuațiilor cu variații împreună cu ecuațiile de mișcare este un proces intens consumator de resurse de calcul, de aceea, deseori se folosește o metodă mult simplificată de determinare a exponentului caracteristic Lyapounov, ce își găsește aplicabilitatea în numeroase probleme de dinamică [Muller și Dvorak, 1995]. O vom prezenta în cele ce urmează.

Vectorului diferență V_0 , ce separă cele două particule de probă la momentul inițial, îi corespunde o variație în elementele orbitale kepleriene, și anume $(da_0, de_0, dI_0, d\Omega_0, d\omega_0, dM_0)$. În lipsa perturbațiilor gravitaționale, mișcarea corpurilor este cea kepleriană din problema celor

două corpuri, diferențele anterioare păstrându-se în timp, mai puțin diferența în anomalia mijlocie. Astfel, considerăm funcția $M(t) = M_0 + \sqrt{G}(t - t_0) a_0^{-3/2}$ ce descrie mișcarea kepleriană pe orbită. Variația sa în valoare absolută, datorită variației elementelor orbitale inițiale, poate fi aproximată prin

$$dM(t) \approx \left| \frac{\partial M(t)}{\partial M_0} \right| dM_0 + \left| \frac{\partial M(t)}{\partial a_0} \right| da_0 = dM_0 + \frac{3}{2} \sqrt{G}(t - t_0) a_0^{-5/2} da_0. \quad (3.16)$$

Diferența acumulată pe o revoluție orbitală, $P = 2\pi a_0^{3/2}/\sqrt{G}$, va fi de $dM_P = 3\pi da_0/a_0$. După cum observăm din relația (3.16), diferența în anomalia mijlocie, dM (sau similar în longitudinea mijlocie, $d\lambda$) dintre corpuri, crește proporțional cu timpul, dominând toate celelalte variații ale elementelor orbitale. Acest comportament justifică înlocuirea vectorului de variație $V(t)$ cu diferența în longitudinea mijlocie, $d\lambda$, pornind cu o diferență inițială pe orbită de $d\lambda_0$. Chiar și în cazul problemei generale a celor “n” corpuri, unde perturbațiile gravitaționale produc variații ale tuturor elementelor orbitale, acest mod de aproximare al vectorului de variație este satisfăcător. Celelalte elemente orbitale ale corpurilor de probă se pot considera la momentul inițial egale, acest lucru fiind, oricum, repede schimbat datorită perturbațiilor gravitaționale. Exponentul caracteristic Lyapounov se va obține simplu, prin raportul

$$\Lambda = \frac{\ln(d\lambda) - \ln(d\lambda_0)}{t - t_0}, \quad (3.17)$$

măsurat pe un interval de timp suficient de mare pentru ca diferența respectivă să se acumuleze semnificativ (tipic $10 T_L$), dar să nu depășească o revoluție orbitală. În ciuda algoritmului destul de simplificat pe care este construit, acest procedeu de determinare a exponentului caracteristic Lyapounov furnizează rezultate bune [Muller și Dvorak, 1995], în special pentru mișcări puternic haotice [Tancredi *et al.*, 2001], așa cum sunt cele ale asteroizilor de tip NEA. Exemplificăm acest procedeu pentru asteroidul (1862) Apollo. În figura 3.4 este reprezentată variația $d\lambda$ dintre asteroid și o “image virtuală” a sa, inițial având o separație $d\lambda_0 = 10^{-6}(\circ)$. Măsurând panta drepte de aproximare, corectată cu factorul $\ln(10)$, obținem valoarea exponentului Lyapounov $\Lambda \approx 0.04$, căruia îi corespunde un timp Lyapounov $T_L \approx 25$ ani.

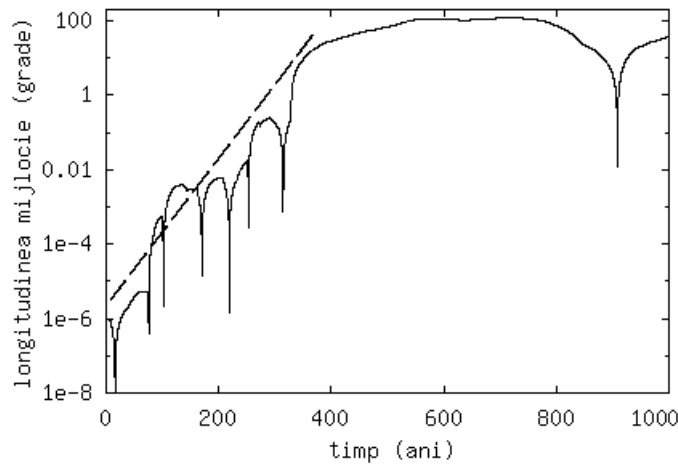


Figura 3.4. Determinarea numerică a LCE al mișcării asteroidului (1862) Apollo, prin monitorizarea diferenței acumulate în longitudinea mijlocie $d\lambda$ între asteroid și o “image virtuală” a sa.

Acest procedeu numeric de determinare a LCE ar putea fi suspectat că furnizează rezultate puternic dependente de alegerea separației inițiale $d\lambda_0$. Putem înlătura acest neajuns prin

folosirea unui număr mare (n) de corpuri virtuale, ce umplu uniform intervalul inițial de longitudine, și monitorizând apoi evoluția deviației standard a setului de diferențe în longitudine ($d\lambda_1, d\lambda_2, \dots, d\lambda_n$), dată de

$$\sigma(d\lambda_1, d\lambda_2, \dots, d\lambda_n) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (d\lambda_i - \overline{d\lambda})^2}, \quad (3.18)$$

unde $\overline{d\lambda}$ este media aritmetică a valorilor $d\lambda_1, d\lambda_2, \dots, d\lambda_n$. Numeroase experimente numerice efectuate confirmă faptul că ambele procedee numerice conduc, de cele mai multe ori, la aceleași rezultate.

Majoritatea obiectelor de tip NEA realizează apropieri strânse cu planetele perturbatoare, acesta fiind principalul argument al evoluției lor haotice. Experimentele numerice arată că, în sens statistic, timpul Lyapounov este aproximativ egal cu intervalul mediu de timp între două apropieri strânse consecutive [Milani, 1998]. Se poate arăta cum un set de apropieri strânse poate genera divergența exponențială a două corpuri inițial apropiate [Berinde, 2001b]. Pentru aceasta vom considera cele două corpuri pe o aceeași orbită, dar cu o diferență mică, dM_0 , în anomalia mijlocie. Presupunem că la momentele ulterioare de timp t_1, t_2, \dots au loc apropieri strânse ce produc următoarele diferențe în semiaxa mare $0 < da_1 < da_2 < \dots$. În urma acestor apropieri strânse, folosind relația (3.16), diferența acumulată în anomalia mijlocie se poate exprima prin

$$dM(t) = dM_0 + \frac{3}{2} \sqrt{Ga_0}^{-5/2} \sum_{i>1} (t_i - t_{i-1}) da_{i-1}. \quad (3.19)$$

Aceasta poate fi privită ca o aproximare spline de ordinul întâi pentru o lege de variație exponențială $dM(t) = dM_0 e^{\Lambda(t-t_0)}$, caracteristică mișcărilor haotice. Pantele segmentelor de dreaptă din aproximarea spline vor fi proporționale cu dispersiile da_1, da_2, \dots .

3.1.3 Efectul haosului asupra integrărilor numerice pe termen lung

Datorită caracterului haotic ce guvernează mișcarea obiectelor NEA, se pune întrebarea în ce măsură integrările numerice pe termen lung au un caracter determinist, adică pot furniza coordonatele reale ale corpurilor respective la momente îndepărtate de timp (trecute și viitoare). În continuare vom răspunde acestei întrebări.

Orice integrare numerică înglobează trei tipuri de erori caracteristice: *eroarea în condițiile inițiale*, *eroarea de trunchiere (aproximare)* și *eroarea de rotunjire*. Incertitudinile în coordonatele inițiale observate ale oricărui corp ceresc sunt sursa erorii în condițiile inițiale. Pentru corpurile studiate această eroare este destul de semnificativă. Pe de altă parte, majoritatea sistemelor dinamice nu sunt integrabile exact, ele fiind integrate aproximativ prin intermediul unui algoritm de integrare căruia îi este specifică eroarea de trunchiere pe pasul de integrare. Aceasta izvorăște din faptul că sunt calculate aproximații “discrete” ale unor cantități “continue” (de exemplu, o funcție este evaluată sumând un număr finit de termeni dintr-o serie infinită). Mecanismul de propagare al acestui tip de eroare depinde de proprietățile numerice ale algoritmului folosit. La aceasta se adaugă eroarea datorată modelului dinamic folosit, acesta aproximând mai mult sau mai puțin exact fenomenele fizice reale ce guvernează mișcarea corpurilor în spațiu. Și în final, eroarea de rotunjire a calculelor este specifică calculatorului, care aproximează orice cantitate reală (inclusiv irațională) printr-una rațională, conținând un număr finit de zecimale, astfel încât aceasta să poată fi stocată în memorie. Eroarea de rotunjire se acumulează odată cu creșterea numărului de operații efectuate în virgulă mobilă. Dacă această acumulare se realizează aleator, după un număr, N , de operații efectuate, eroarea globală va fi proporțională cu \sqrt{N} [Press *et al.*, 1997]. Tipuri de calculatoare diferite prezintă mecanisme

diferite de acumulare a erorii de rotunjire, și din acest motiv rezultatul unei integrări numerice este dependent de calculator.

Mecanismele de propagare a erorilor, prezentate anterior, sunt specifice mișcărilor regulate. În cazul mișcărilor haotice, toate aceste trei tipuri de erori prezintă mecanisme de propagare mult mai complexe, strâns legate de natura dinamică a traiectoriei simulate. La fiecare moment de timp pe parcursul integrării, va exista o diferență între soluția aproximativă calculată și soluția reală, diferență la care au contribuit toate cele trei tipuri de erori prezentate anterior. Această diferență va fi supusă permanent unui proces de degradare (divergentă) în timp, la o rată proporțională cu $e^{\Lambda t}$, unde Λ este exponentul caracteristic Lyapounov al mișcării. După un anumit număr N de intervale de timp Lyapounov, soluția obținută în urma integrării va crește în diferență față de soluția reală cu un factor e^N , putând deveni astfel doar un artifact. Integrarea numerică își va pierde astfel caracterul determinist. Cunoscând eroarea în condițiile inițiale și LCE al mișcării simulate, se poate da o estimare a intervalului de timp în care integrarea numerică efectuată are caracter determinist, folosind o relație de tipul (3.14).

Chiar dacă eroarea în condițiile inițiale este nulă, caracterul determinist al unei integrări numerice este limitat în timp, deoarece eroarea de trunchiere și cea de rotunjire generează o diferență între soluția calculată și cea reală chiar după primii pași de integrare. Pentru asteroizii de timp NEA însă, eroarea în condițiile inițiale este ce mai importantă, propagarea acesteia făcând subiectul unui paragraf ulterior.

Se naște întrebarea, care ar fi atunci rolul integrărilor numerice efectuate pe termen lung, mult peste intervalul de predicție deterministă? Răspunsul este acela că aceste integrări pot furniza informații valoroase de natură calitativă și/sau statistică asupra comportamentului dinamic al corpului analizat: prindere în rezonanță, frecvența unor apropieri strânse planetare, existența unor mecanisme de protecție a mișcării, etc. O parte din aceste fenomene dinamice, observabile doar la scară mare de timp, vor face subiectul paragrafelor următoare.

3.2 Mișcări rezonante

Studiul evoluției dinamice pe termen lung al corpurilor mici din sistemul solar relevă existența unor conexiuni dinamice între acestea și planetele perturbatoare. În secțiunea de față vom analiza fenomenele de rezonanță și implicațiile lor asupra evoluției dinamice a corpurilor NEA.

3.2.1 Rezonanțe ale mișcării medii

Rezonanța mișcărilor medii a două corpuri orbitând în jurul Soarelui (între un asteroid și o planetă perturbatoare) implică existența unui raport algebric (număr rațional) între perioadele lor orbitale (similar, între mișcările lor medii). Importanța geometrică a acestui fenomen, pentru obiectele de tip NEA, constă în faptul că existența unui astfel de raport între perioadele orbitale implică existența unui ciclu în care este reprodusă configurația geometrică a corpurilor, conducând astfel la repetarea (sau evitarea) apropiierilor stânse. Din punct de vedere dinamic, implicațiile acestui fenomen sunt mult mai puternice, deoarece, anumite rezonanțe medii sunt asociate cu mișcări haotice responsabile pentru deplasarea unui corp dintr-o regiune într-alta a sistemului solar (capitolul următor).

Pentru început considerăm două corpuri (asteroidul și planeta perturbatoare) în orbite eliptice fixe, de parametri orbitali $(a, e, I, \Omega, \omega)$, respectiv $(a_p, e_p, I_p, \Omega_p, \omega_p)$, având mișcările medii pe orbite n și n_p , situate în rezonanța $p : q$, cu $p, q \in \mathbb{N}$, numere prime între ele. Cantitatea $|p - q|$ o vom numi *ordinul rezonanței*. Atunci

$$\frac{n}{n_p} = \frac{p}{q}, \quad (3.20)$$

iar din legea a treia a lui Kepler obținem valoarea nominală a semiaxe mari a orbitei asteroidului ce corespunde cu exactitate rezonanței respective

$$a = a_p \left(\frac{q}{p} \right)^{2/3}. \quad (3.21)$$

Mai departe, considerăm cazul când orbita corpului infinitezimal este animată de o variație seculară a longitudinii periastrului $\dot{\varpi} \neq 0$, cu $\varpi = \omega + \Omega$, iar orbita corpului perturbator rămâne fixă. Cantitățile $n - \dot{\varpi}$ și $n_p - \dot{\varpi}$ pot fi considerate mișcări medii într-un sistem de referință corotațional cu periastrul corpului infinitezimal. Dacă aceste mișcări medii sunt în rezonanță atunci, ca mai înainte, vom avea

$$\frac{n - \dot{\varpi}}{n_p - \dot{\varpi}} = \frac{p}{q}, \quad (3.22)$$

sau

$$pn_p - qn - (p - q)\dot{\varpi} = 0. \quad (3.23)$$

În acest caz, semiaxa mare a orbitei asteroidului, corespunzătoare rezonanței, va avea o valoare diferită față de cea dată în formula (3.21), însă diferența respectivă este mică, atâta timp cât rata de precesie a longitudinii periastrului, $\dot{\varpi}$, este cu mult mai mică față de mișcarea medie a asteroidului, n .

Ținând seama că longitudinea mijlocie pe orbită are expresia $\lambda = n(t - \tau) + \varpi = nt + \epsilon$, unde τ este epoca trecerii prin periastru și ϵ este longitudinea mijlocie la epoca inițială, avem $\dot{\lambda} = n + \dot{\epsilon}$ și, similar pentru corpul perturbator, $\dot{\lambda}_p = n_p + \dot{\epsilon}_p$. Prin neglijarea cantităților $\dot{\epsilon}$ și $\dot{\epsilon}_p$ și din relația (3.23) rezultă $\dot{\sigma}_{p:q} = 0$, unde

$$\sigma_{p:q} = p\lambda_p - q\lambda - (p - q)\varpi \quad (3.24)$$

se numește *argumentul rezonanței* $p : q$. Acest unghi este și o măsură a deplasării longitudinii corespunzătoare conjuncției dintre corpuri față de longitudinea periastrului asteroidului, deoarece la conjuncție avem $\lambda = \lambda_p$ și astfel $\sigma_{p:q} = (p - q)(\lambda_p - \varpi) = (p - q)(\lambda - \varpi)$.

Din punct de vedere dinamic, se poate da o definiție mult mai riguroasă fenomenului de rezonanță dintre două corpuri. Astfel, în cadrul problemei generale a celor trei corpuri, funcția perturbatoare exercitată asupra corpului a cărui mișcare o studiem (asteroidul) se poate dezvolta în serie infinită Legendre, de tipul [Murray și Dermott, 1999]

$$\mathcal{R} = Gm_p \sum S \cos \phi, \quad (3.25)$$

unde m_p este masa corpului perturbator, $S = S(a, a_p, e, e_p, I, I_p)$ sunt funcții de elementele orbitale enumerate, iar argumentele unghiulare ϕ sunt de forma

$$\phi = j_1\lambda + j_2\lambda_p + j_3\varpi + j_4\varpi_p + j_5\Omega + j_6\Omega_p, \quad \text{cu } \sum_{k=1}^6 j_k = 0, \quad j_k \in \mathbb{Z}. \quad (3.26)$$

Desigur, termenii din dezvoltarea (3.25) au ponderi diferite, în funcție de puterile unui parametru mic ce intervine în expresiile acestora. Pentru studiul de față este mult mai importantă însă o clasificare dinamică a acestor termeni, în funcție de variabila unghiulară ϕ pe care o conține. Longitudinile medii ce intervin în expresia (3.26) cresc proporțional cu timpul și prezintă variații mult mai rapide decât a tuturor celorlalte variabile unghiulare prezente. Astfel, termenii din dezvoltarea (3.25) a căror variabile unghiulare ϕ nu conțin pe λ și λ_p se numesc *termeni seculari*. Acești termeni prezintă variații lente în timp (seculare). Ceilalți termeni din dezvoltare nu neapărat variază rapid, deoarece se poate întâmpla ca $j_1n + j_2n_p \approx 0$ și deci

variabila $j_1\lambda + j_2\lambda_p$ să varieze lent. Astfel de termeni se numesc *termeni rezonanți* deoarece, făcând substituțiile $j_1 = p + q$ și $j_2 = -q$ obținem tocmai condiția de rezonanță (3.20). Termenii rămași vor înregistra într-adevăr variații rapide și ei se vor numi *termeni scurt-periodici*.

Spunem că asteroidul se află (exact) în rezonanță cu corpul perturbator dacă există un termen rezonant în dezvoltarea (3.25) pentru care

$$\dot{\phi} = j_1(n + \dot{\epsilon}) + j_2(n_p + \dot{\epsilon}_p) + j_3\dot{\omega} + j_4\dot{\omega}_p + j_5\dot{\Omega} + j_6\dot{\Omega}_p = 0, \quad (3.27)$$

adică există o combinație liniară între mișcările medii și ratele de precesie ale celor două corpuri, astfel încât să aibă loc (3.27), cu suma coeficienților întregi nulă. Dacă neglijăm toate ratele de precesie, mai puțin $\dot{\omega}$, și reluăm substituțiile anterioare, deducem $\dot{\phi} = j_1n + j_2n_p + j_3\dot{\omega} = pn_p - qn - (p - q)\dot{\omega} = \dot{\sigma}_{p,q} = 0$, adică tocmai condiția de rezonanță dedusă geometric în (3.22). Neglijarea anumitor termeni lung periodici din suma (3.27) face ca relația $\dot{\sigma}_{p,q} = 0$ să nu fie riguros verificată, însă se pot pune în evidență oscilații ale argumentului de rezonanță $\sigma_{p,q}$ în jurul unei valori constante. Acest comportament se numește *librație*, fiind diferit de cel numit *circulație*, în care argumentul respectiv variază rapid și monoton în întreg spectrul de valori. Aceste două tipuri de comportamente dinamice ale argumentului asociat unei rezonanțe medii sunt prezentate în figura următoare. Aici este reprodusă evoluția dinamică a asteroidului (4197) 1982 TA pe un interval de 10.000 de ani în sistemul solar, în termenii variației argumentului de rezonanță 10:3, în raport cu planeta Jupiter. Trecerea de la regimul de circulație la cel de librație corespunde prinderii asteroidului în rezonanța respectivă, prin modificarea semiaxei mari orbitale la o valoare apropiată de 2.33 UA, în urma unor apropieri strânse repetate cu Pământul. Această valoare a semiaxei mari corespunde celei prognozată cu relația (3.21), în care se înlocuiește $p = 10$, $q = 3$ și $a_p \approx 5.2$ UA.

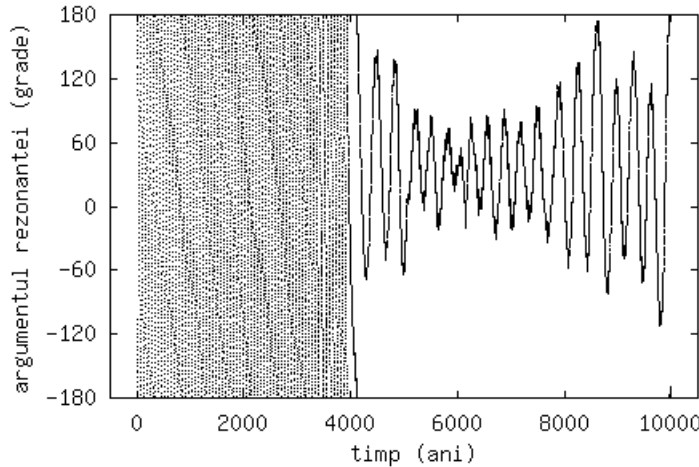


Figura 3.5. Variația argumentului de rezonanță $\sigma_{10:3}$ al asteroidului (4197) 1982 TA în raport cu Jupiter. Trecerea de la regimul de circulație la cel de librație marchează prinderea asteroidului în rezonanța 10:3.

Înainte de a încheia acest paragraf dorim să soluționăm problema identificării rezonanțelor mișcării medii în care s-ar putea afla un corp de-a lungul evoluției sale dinamice. La baza soluționării acestei probleme stau egalitățile (3.21) și (3.24). Folosirea acestor egalități necesită însă cunoașterea a priori a întregilor p și q ce formează raportul de rezonanță. Vom prezenta în continuare algoritmul de determinare al lor.

Fie a semiaxa mare a asteroidului la un moment dat de timp, t , pe parcursul evoluției sale dinamice și a_p semiaxa mare a corpului față de care dorim să identificăm o posibilă rezonanță. Considerăm numărul (irațional)

$$r = \left(\frac{a_p}{a}\right)^{3/2}, \quad (3.28)$$

ce semnifică tocmai valoarea unui posibil raport de rezonanță, p/q . Acest număr irațional se poate dezvolta în mod unic într-o fracție continuă normală de forma [Marinescu *et al.*, 1987]

$$r = c_0 + \frac{1}{c_1 + \frac{1}{c_2 + \frac{1}{c_3 + \dots}}} \stackrel{\text{not}}{=} [c_0; c_1, c_2, \dots], \quad c_k \in \mathbb{N} (k \geq 0). \quad (3.29)$$

Coefficienții $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ se vor determina cu următorul algoritm: dacă $[\cdot]$ reprezintă funcția parte întreagă, atunci $c_0 = [r]$ și cantitatea următoare este supraunitară, $b_1 = 1/(r - c_0) > 1$. Alegem $c_1 = [b_1]$ și mai departe avem că $b_2 = 1/(b_1 - c_1) > 1$ de unde punem $c_2 = [b_2]$. În această manieră vom construi șirul cu termenul general $c_n = [b_n]$, unde $b_n = 1/(b_{n-1} - c_{n-1}) > 1$, ș.a.m.d. Toate cantitățile ce apar la numitor sunt nenule, în măsura în care r este irațional.

Mai mult, tot o teoremă din algebra fracțiilor continue ne asigură că următorul șir de numere raționale $r_n = [c_0; c_1, c_2, \dots, c_n]$, ($n \geq 0$) converge la r , în virtutea inegalității $|r - r_n| \leq (1/2)^n$, $\forall n \geq 0$. Experimentele numerice arată că această convergență are loc foarte rapid. Prin calcule algebrice simple se poate arăta că termenii șirului anterior se pot exprima sub formă de fracții $r_n = p_n/q_n$, cu următoarele relații de recurență

$$\begin{cases} p_0 = c_0; q_0 = 1, \\ p_1 = 1 + c_0 c_1; q_1 = c_1, \\ p_k = b_k p_{k-1} + p_{k-2}; q_k = b_k q_{k-1} + q_{k-2}, \quad k \geq 2. \end{cases} \quad (3.30)$$

Cu toate acestea în minte, vom putea aproxima acum oricât de bine numărul irațional r printr-o fracție rațională p_n/q_n și astfel am găsit o estimare pentru parametri propuși a fi determinați $p = p_n$ și $q = q_n$. Dacă acești parametri găsiți sunt numere naturale mici și raportul lor aproximează suficient de bine numărul r (aceasta se poate testa, spre exemplu [Janiczek *et al.*, 1972], impunând condiția $|pT - qT_p| < 0.1$ ani, unde $T = 2\pi/n$ și $T_p = 2\pi/n_p$ sunt perioadele orbitale ale celor două corpuri exprimate în ani), atunci s-ar putea ca asteroidul să fie prins în rezonanța respectivă. De cele mai multe ori sunt suficiente două sau trei iterații pentru aflarea raportului respectiv, în cazul rezonanțelor de ordin mic (< 10). Nu avem decât să constatăm librația argumentului asociat $\sigma_{p,q}$ pe un interval de cel puțin câteva revoluții orbitale în jurul epocii de timp t , pentru a decide pe deplin existența rezonanței respective.

3.2.2 Rezonanțe seculare

Conform teoriilor perturbațiilor seculare [Froeschlé și Morbidelli, 1994], elementele orbitale ale unei planete din sistemul solar prezintă variații cu perioade cuprinse între mii și milioane de ani. Dacă ne restrângem la sistemul Soare–Jupiter–Saturn, aceste variații sunt cvasi-periodice cu trei frecvențe fundamentale: $\dot{\varpi}_J$ (rata medie de precesie a longitudinii periheliului lui Jupiter), $\dot{\varpi}_S$ (rata medie de precesie a longitudinii periheliului lui Saturn) și $\dot{\Omega}_S$ (ratele medii de precesie a nodurilor orbitelor celor două planete, aproximativ egale). Realizând un experiment numeric simplu, și anume integrând simultan cele patru planete gigant din sistemul solar, pe un interval de un milion de ani, putem obține ratele respective de precesie, astfel $\dot{\varpi}_J \approx 3 \times 10^5$ ani, $\dot{\varpi}_S \approx 5 \times 10^4$ ani și $\dot{\Omega}_J \approx \dot{\Omega}_S \approx 5 \times 10^4$ ani (figura 3.6). Pe lângă acestea există și alte frecvențe adiționale asociate planetelor Uranus și Neptun. Toate aceste planete exercită perturbații seculare asupra oricărui corp orbitând în jurul Soarelui, forțând orbita sa să precesioneze (în termenii precesiei longitudinii periheliului, $\dot{\varpi}$ și a precesiei longitudinii nodului orbitei, $\dot{\Omega}$). Efectele dinamice ale acestor perturbații seculare asupra unui corp sunt amplificate atunci când acesta se află într-o

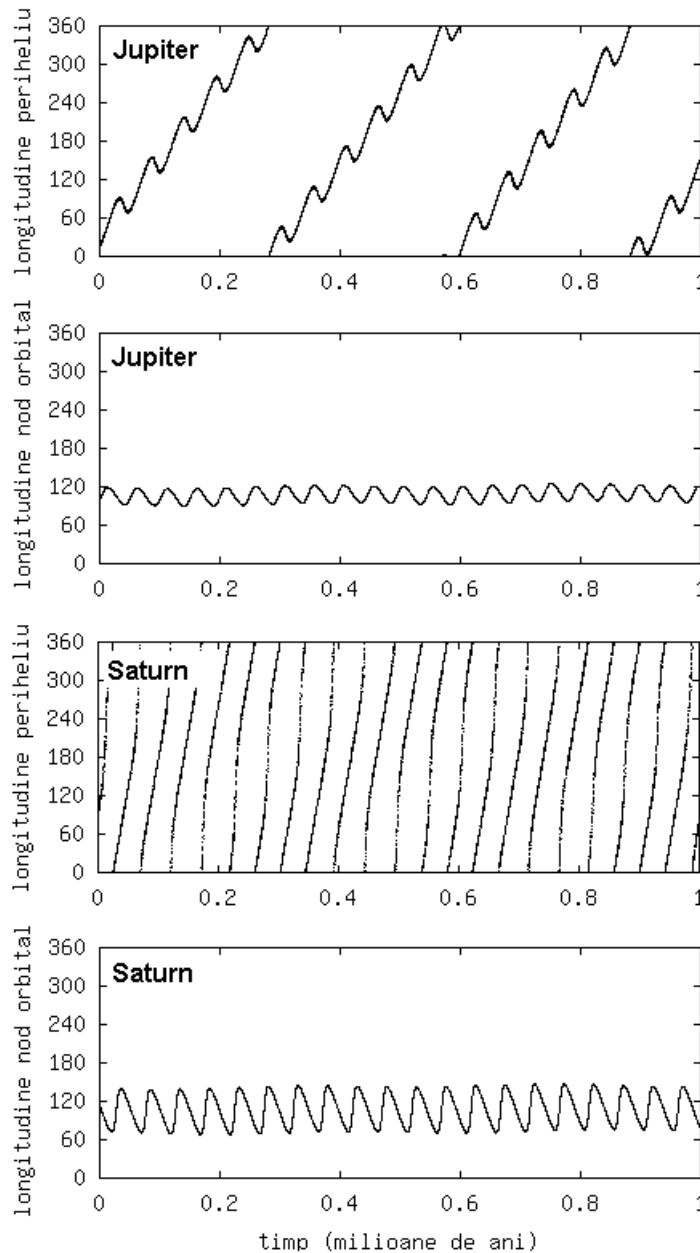


Figura 3.6. Principalele oscilații seculare asociate planetelor Jupiter și Saturn, obținute în urma unei integrări numerice simultane a celor patru planete gigant, într-un interval de un milion de ani.

asa numită *rezonanță seculară*. Aceasta presupune că una dintre ratele de precesie asociate asteroidului (sau o combinație a acestora) este egală cu una din ratele de precesie planetare amintite mai sus (sau o combinație a lor). Cele mai uzuale sunt rezonanțele seculare liniare, care presupun existența unei relații de egalitate între o rată de precesie asociată asteroidului și o rată de precesie planetară. Și anume, când $\dot{\varpi} \approx \dot{\varpi}_J$ avem rezonanța ν_5 , când $\dot{\varpi} \approx \dot{\varpi}_S$ avem rezonanța ν_6 , iar când $\dot{\Omega} \approx \dot{\Omega}_S$ avem rezonanța ν_{16} . Acestea sunt cele mai importante frecvențe fundamentale ce își pun amprenta asupra evoluției dinamice pe termen lung a unui corp. Ca și în cazul argumentului de rezonanță asociat mișcărilor medii, diferențele $\varpi - \varpi_J$, $\varpi - \varpi_S$ și $\Omega - \Omega_S$ nu vor fi constante, ci vor oscila în jurul unei valori particulare. Teoriile analitice arată

că aceste valori particulare nu pot fi decât 0° și 180° [Froeschlé și Scholl, 1987]. Monitorizarea fenomenului de librație și circulație al acestor cantități, reprezintă procedeul numeric prin care se pune în evidență existența rezonanțelor seculare.

Prinderea unui asteroid într-o rezonanță seculară produce mari variații ale diferiților parametri orbitali, ducând la migrarea corpului dintr-o regiune într-alta a sistemului solar, în particular către Soare (capitolul următor). Ca și în cazul rezonanțelor asociate mișcărilor medii, poziția rezonanțelor seculare poate fi reprezentată în spațiul elementelor orbitale, dar în acest caz, în spațiul așa-numitelor *elemente orbitale proprii*. Acestea sunt cvasi-integrale ale mișcării, stabile pe intervale de tip foarte lungi, reprezentând un fel de caracteristică medie a mișcării, în sensul că ele sunt rezultatul unui proces de eliminare a perturbațiilor scurt și lung periodice [Knezevic și Milani, 1994]. Fiecare rezonanță seculară este prezentă într-o regiune bine definită a spațiului fazelor asociat elementelor proprii $(\bar{a}, \bar{e}, \bar{I})$.

Un alt tip de rezonanță seculară se manifestă în cazul obiectelor situate pe orbite puternic înclinate ($I > 10^\circ$), numită *rezonanța Kozai*. Ea are loc atunci când argumentul periheliului nu precesionează, adică $\dot{\omega} = 0$ (sau $\dot{\varpi} = \dot{\Omega}$), fiind pusă în evidență pentru prima dată în cadrul unei teorii analitice a lui [Kozai, 1962]. Semiaxa mare a orbitei unui corp aflat în rezonanța Kozai este cvasi-stabilă în timp, însă excentricitatea e , și înclinația I , oscilează cuplat, încât cantitatea $K = \sqrt{1 - e^2} \cos I$ rămâne constantă. În problema restrânsă circulară a celor trei corpuri, invarianța acestei cantități rezultă din criteriul Tisserand (2.31), în care a este considerat constant. Oscilațiile argumentului periheliului au loc doar în jurul valorilor de 90° sau 270° , însă amplitudinea atinsă de e se poate extinde pe întreg spectrul de valori de la 0 la 1 [Bailey *et al.*, 1992]. Experimente numerice asupra evoluției asteroizilor de tip NEA [Michel și Thomas, 1996], arată că rezonanța Kozai se poate manifesta și la orbite puțin înclinate ($I < 10^\circ$), caz în care argumentul periheliului liberează în jurul valorilor de 0° sau 180° .

Pentru asteroizii de tip NEA, această rezonanță este în mod special importantă, deoarece joacă rolul unui mecanism de protecție împotriva apropiierilor strânse planetare, așa cum vom sublinia în paragraful următor.

3.2.3 Mecanisme de protecție

În cadrul problemei restrânse circulare a celor trei corpuri, existența criteriului Tisserand (2.31) impune anumite restricții de variabilitate orbitală sub acțiunea perturbatoare a planetei. Astfel, pentru cazul plan, figura 3.7 prezintă câteva contururi în spațiul elementelor orbitale (a, e) , pentru diferite valori ale constantei Tisserand, de-a lungul cărora pot avea loc modificări orbitale. Se remarcă faptul că orbite având periheliul sau afeliul în preajma orbitei terestre ($q = 1$, sau $Q = 1$), își vor păstra în timp această particularitate geometrică, perpetuând posibilitatea de a înregistra apropieri strânse cu planeta perturbatoare.

De asemenea, pentru o orbită ce traversează orbita terestră, distanța de la Soare la unul dintre nodurile orbitei poate coincide cu semiaxa orbitei planetare, astfel

$$\frac{a(1 - e^2)}{1 \pm e \cos \omega} = a_p, \quad (3.31)$$

datorită fenomenului de precesie a argumentului periheliului ω . De-a lungul unei perioade de precesie orbitală (de ordinul a 10^5 ani), pot avea loc 2 sau 4 intersecții orbitale, creând astfel posibilitatea apropiierilor strânse. În unele cazuri însă, variația periodică cu amplitudine mare a excentricității orbitei, poate genera soluții suplimentare ale ecuației (3.31), conducând la existența a până la 8 intersecții orbitale pe o revoluție completă a argumentului ω .

În cadrul acestui paragraf grupăm la un loc acele mecanisme dinamice ce conferă obiectelor de tip NEA o relativă stabilitate orbitală, în sensul evitării apropiierilor strânse cu Pământul, numindu-le *mecanisme de protecție*. Există, în esență, două tipuri de mecanisme de protecție:

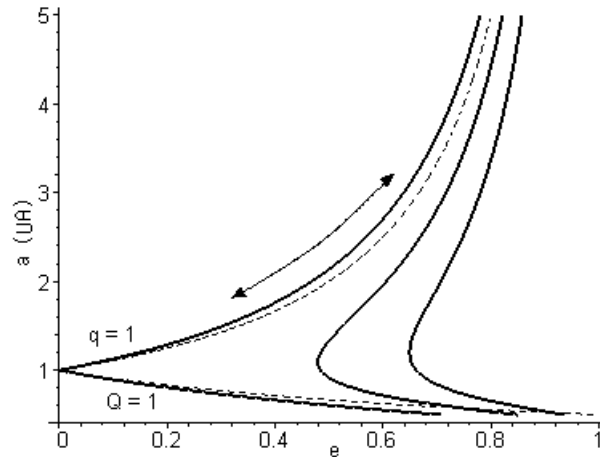


Figura 3.7. Contururi Tisserand. Liniile întrerupte reprezintă ecuațiile de condiție ca periheliul (q), respectiv afeliul (Q) al unei orbite, să fie situat în vecinătatea orbitei terestre, iar liniile continue reprezintă câteva contururi Tisserand de-a lungul cărora are loc migrația orbitei sub acțiunea perturbatoare a Pământului.

acela care nu permite apropierea dintre corpuri, chiar dacă orbitele acestora se intersectează (datorită rezonanței între mișcările lor medii), și acela care nu permite orbitelor să se intersecteze (datorită rezonanței seculare Kozai).

Cel mai simplu tip de rezonanță este rezonanța medie 1 : 1. În acest caz, asteroidul are aproximativ aceeași perioadă orbitală ca și Pământul și astfel, diferența de longitudine între cele două corpuri oscilează în jurul unei valori constante. Această valoare poate fi de $\pm 60^\circ$, corespunzând librației în jurul punctelor Lagrange de echilibru stabil L_4 sau L_5 (asteroizi troieni), sau de 180° , pentru mișcări în jurul punctului Lagrange L_3 , mișcări ce se extind și peste celelalte puncte de echilibru amintite anterior (figura 2.3). În primul caz, traiectoria corpului se numește de tip *tadpole*, iar în al doilea caz de tip *horseshoe*. Aceste două tipuri de orbite sunt prezentate în figura 3.8. Aici, apropierea strânse sunt evitate, deoarece amplitudinea librației nu se extinde până la planeta perturbatoare. În prezent, nu există nici un obiect NEA descoperit pe o orbită de tip *tadpole* față de Pământ, însă simulările numerice confirmă faptul că astfel de mișcări sunt posibile [Milani, 1998].

În cazul general al unei rezonanțe medii de raport $p : q$, datorită repetării configurației geometrice a corpurilor, după p revoluții orbitale ale asteroidului, respectiv q revoluții orbitale ale planetei, traiectoria asteroidului reprezentată într-un sistem corotațional cu planeta prezintă o structură staționară de bucle (figura 3.9), în număr de p , care s-ar putea să nu se suprapună peste planeta perturbatoare, și astfel apropierea strânse să fie evitate [Murray și Dermott, 1999].

Acest tip de mecanism de protecție nu este eficient pe intervale mari de timp ($> 10^4$ ani), deoarece asteroidul poate înregistra apropieri strânse cu alte planete perturbatoare (Venus sau Marte) față de care nu este protejat, scoțându-l astfel din rezonanța respectivă.

Un alt tip de mecanism de protecție este întreținut de rezonanța Kozai. Așa cum arătam în paragraful anterior, pentru asteroizii de tip NEA există două moduri distincte de manifestare al acestei rezonanțe, fiecare dintre ele putând juca rolul unui mecanism de protecție: a) pentru corpurile ale căror orbite au periheliul sau afeliul în preajma orbitei planetare, apropierea strânse cu planeta pot fi evitate printr-o rezonanță Kozai activă la înclinații orbitale mari, când librația argumentului periheliului în jurul valorilor de 90° sau 270° , mențin atât periheliul cât și afeliul orbitei, departe de planul orbitei planetare; b) pentru corpurile a căror semiaxă orbitală este apropiată ca valoare de cea a planetei perturbatoare și având o excentricitate suficient de mare pentru ca periheliul și afeliul orbitei să fie departe de orbita planetei, apropierea strânse pot fi

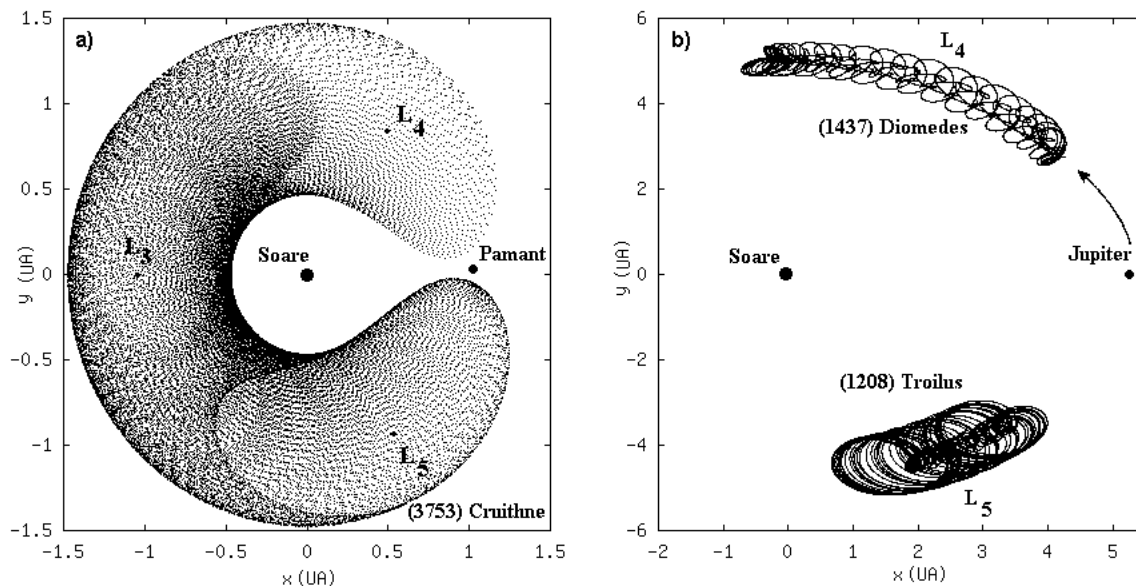


Figura 3.8. a). Evoluția dinamică a unui asteroid de tip NEA pe o orbită de tip horseshoe față de Pământ, (3753) Cruithne; b). Evoluțiile dinamice a doi asteroizi troieni pe orbite de tip tadpole în raport cu Jupiter, (1437) Diomedes și (1208) Troilus. Mișcările sunt reprezentate în sisteme corotaționale cu planeta perturbatoare, într-un interval de 500 de ani. Se remarcă evitarea apropiierilor strânse.

acum evitate print-o rezonanță Kozai activă la înclinații orbitale mici, când librația argumentului periheliului în jurul valorilor de 0° sau 180° , mențin linia nodurilor aproape de linia apsidală a orbitei, încât cele două orbite nu pot trece una în apropierea celeilalte.

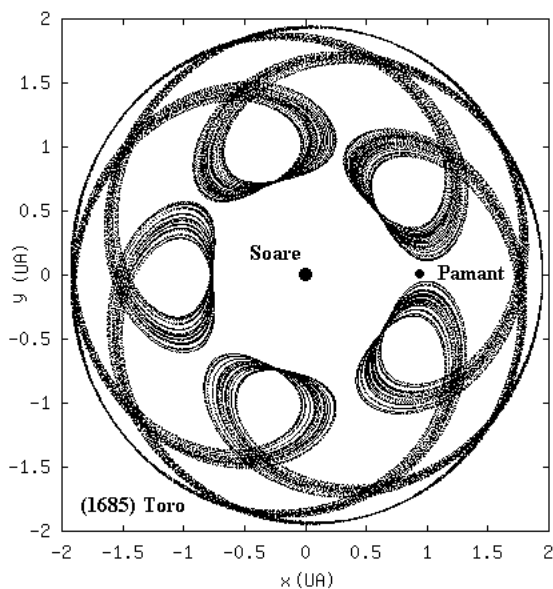


Figura 3.9. Evoluția dinamică a unui asteroid de tip NEA pe o orbită aflată în rezonanța 5:8 cu Pământul, (1685) Toro, reprezentată într-un sistem corotațional, într-un interval de 1000 de ani. Se remarcă evitarea apropiierilor strânse.

Mecanismele de protecție asociate rezonanței Kozai conferă asteroizilor NEA o relativă

stabilitate orbitală în preajma Pământului, pe intervale de timp de ordinul a $10^5 - 10^6$ ani [Michel și Thomas, 1996]. Aceasta are ca efect prelungirea timpului de viață a orbitelor respective în preajma orbitei terestre.

3.3 Clasificări dinamice

3.3.1 Clasificarea după distanța minimă de intersecție orbitală

Apropierile strânse cu planetele, în special cu Pământul, sunt o caracteristică dinamică fundamentală a obiectelor NEA, acest fenomen guvernând evoluția dinamică pe termen lung a acestor corpuri. Din punct de vedere geometric, posibilitatea realizării unor apropieri strânse depinde în primul rând de cât de apropiate sunt cele două orbite eliptice în spațiu, și anume de valoarea distanței minime dintre ele, numită *distanța minimă de intersecție orbitală* (MOID), notată cu b_{moid} . Procedura de calcul a distanței minime dintre două orbite eliptice osculatoare, implică minimizarea unei funcții de două variabile independente, anume anomaliile adevărate pe orbită ale celor două corpuri [Sitarski, 1968]. Procedura de calcul este una numerică, intens consumatoare de timp, în special datorită faptului că orbita osculatoare a asteroidului variază continuu, și deci b_{moid} trebuie recalculat pe întreg parcursul evoluției dinamice. Metoda numerică de calcul poate fi înlocuită însă printr-o metodă analitică aproximativă, în ipoteza că orbita planetei, față de care se monitorizează apropierea strânse, este una circulară. O expresie a MOID a fost dedusă în paragraful 2.2.4, în ipoteza că această distanță minimă se realizează în preajma liniei nodurilor orbitale. Cum această presupunere nu este întotdeauna adevărată, mai ales în cazul orbitelor cu înclinație mică, vom deduce în cele ce urmează o expresie a b_{moid} pentru o orbită asteroidală oarecare [Marsden, 1997].

Distanța de la orbita circulară a planetei (de rază a_p) la un asteroid situat pe o orbită de parametri $(a, e, I, \Omega, \omega)$, măsurați față de planul orbital al planetei, când asteroidul traversează acest plan, are valorile

$$b_{\Omega, \omega} = \left| \frac{a(1 - e^2)}{1 \pm e \cos \omega} - a_p \right|. \quad (3.32)$$

Pentru orbite asteroidale cu înclinații semnificative, minimul acestor două valori va fi apropiat de valoarea căutată a b_{moid} . Însă pentru orbite cu înclinații mici, distanța minimă de intersecție orbitală s-ar putea realiza departe de linia nodurilor, caz în care vom considera următoarea abordare geometrică. Fie asteroidul la distanța d de corpul central, distanță pe care o vom particulariza ulterior. Dacă z notează distanța de la asteroid la planul orbitei planetare, iar b distanța de la același asteroid la orbita circulară a planetei (figura 3.10), atunci expresiile acestor două mărimi sunt

$$\begin{cases} z = d |\sin \zeta| = d |\sin(\omega \pm \nu)| \sin I, \\ b = \sqrt{z^2 + (a_p - d)^2}, \end{cases} \quad (3.33)$$

unde am aproximat $\sqrt{d^2 - z^2} \approx d$, în virtutea faptului că $z \ll d$.

Distingem două situații, după cum orbita asteroidului traversează, sau nu, orbita terestră. În primul caz, vom considera $d = a_p$ și introducând mărimile auxiliare $\bar{q} = a(1 - e)/a_p$ și $\bar{Q} = a(1 + e)/a_p$, expresia anomaliilor adevărate corespunzătoare acestei poziții particulare a asteroidului, va fi dată prin

$$\cos \nu = \frac{1}{e} \left[\frac{a}{a_p} (1 - e^2) - 1 \right], \quad \sin \nu = \frac{1}{e} \sqrt{(1 - e^2)(1 - \bar{q})(\bar{Q} - 1)}, \quad (3.34)$$

unde condiția $(1 - \bar{q})(\bar{Q} - 1) > 0$ este îndeplinită. Distanțele corespunzătoare la orbita planetei vor fi atunci

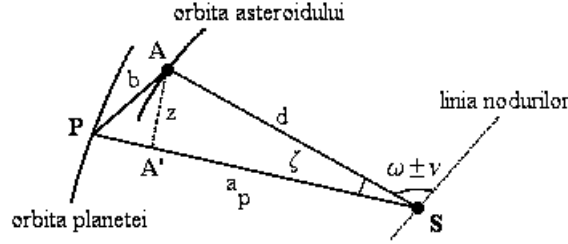


Figura 3.10. Calculul distanței dintre orbita circulară a planetei (P) și un asteroid (A), funcție de distanța acestuia la corpul central (S).

$$b_{a_p}^{1,2} = a_p |\sin(\omega \pm \nu)| \sin I. \quad (3.35)$$

În cel de-al doilea caz, când orbita asteroidului nu traversează orbita planetei, vom considera pozițiile particulare $d = q$ și $d = Q$, unde q , respectiv Q , sunt distanțele la periheliul, respectiv afeliul orbitei sale. Uzând de (3.33), obținem distanțele la orbita planetei

$$b_q = \sqrt{(q \sin \omega \sin I)^2 + (a_p - q)^2}, \quad b_Q = \sqrt{(Q \sin \omega \sin I)^2 + (a_p - Q)^2}. \quad (3.36)$$

În final vom aproxima distanța minimă de intersecție orbitală prin

$$b_{moid} = \min \{b_\Omega, b_\Upsilon, b_{a_p}^1, b_{a_p}^2\} \quad \text{sau} \quad b_{moid} = \min \{b_\Omega, b_\Upsilon, b_q, b_Q\}, \quad (3.37)$$

alegera fiind făcută în funcție de geometria orbitelor descrisă anterior. Această metodă analitică aproximativă furnizează valori ale b_{moid} ce concordă surprinzător de bine cu cele determinate numeric [Carusi și Dotto, 1996], lucru satisfăcător și pentru studiul calitativ următor.

Variațiile în timp ale elementelor orbitale induc variații ale distanței minime dintre orbite, astfel încât frecvența apropiierilor strânse cu Pământul variază semnificativ de la o epocă la alta. Apare astfel necesitatea introducerii unei categorii a NEA, a cărei membri sunt predispuși a avea apropieri strânse cu planeta noastră, cel puțin în prezent. O primă clasificare dinamică funcție de b_{moid} este dată în [Marsden, 1997], la definirea asteroizilor potențial periculoși, PHA (potentially hazardous asteroids), ca fiind acei asteroizi NEA pentru care $b_{moid} \leq 0.05$ UA și cu un diametru de cel puțin un kilometru. Limita de 0.05 UA nu este riguros definită, însă ea are menirea de a izola acea subclasă a NEA pentru care trebuie să se întreprindă studii dinamice extinse, dată fiind posibilitatea realizării unor apropieri strânse cu planeta noastră. Clasa obiectelor PHA este într-un proces continuu de împropițare, deoarece distanța limită de 0.05 UA este “traversată” în ambele direcții datorită modificărilor orbitale, uneori violente [Berinde, 1999b].

Pe lângă clasificarea dată anterior, rezultate calitative mai profunde se pot obține din studiul comportamentului dinamic în timp al acestei mărimi în jurul valorii zero (pe intervale de câteva sute de ani). Este clar faptul că pe parcursul evoluției dinamice, distanța b_{moid} poate atinge valoarea nulă atunci când cele două orbite se intersectează efectiv. Există însă o periodicitate a realizării acestei intersecții orbitale sau o variație haotică a b_{moid} în jurul valorii zero? Acest gen de întrebări au condus la elaborarea următoarei clasificări dinamice [Carusi și Dotto, 1996] și [Berinde, 1999b]. Distingem trei moduri de variație a MOID, moduri determinate în urma unor integrări numerice extinse a întregii populații de asteroizi PHA descoperiți: (i) când b_{moid} variază aproximativ liniar cu timpul, traversând repede valoarea zero, obținem o *apropiere orbitală de scurtă durată*, (ii) când b_{moid} variază periodic, mai mult sau mai puțin regulat, orbita asteroidului oscilând în spațiu și realizând intersecții orbitale periodice cu orbita planetară, obținem o *apropiere orbitală periodică*, (iii) iar când b_{moid} variază haotic în jurul valorii zero,

menținând astfel cele două orbite una în apropierea celeilalte pe perioade lungi de timp, obținem o *apropiere orbitală de lungă durată*. În acest ultim caz, este imposibil de prezis în sens determinist evoluția acestei distanțe minime, datorită caracterului profund haotic al mișcării respective. Figura următoare prezintă exemple reale ale celor trei tipuri de evoluție dinamică.

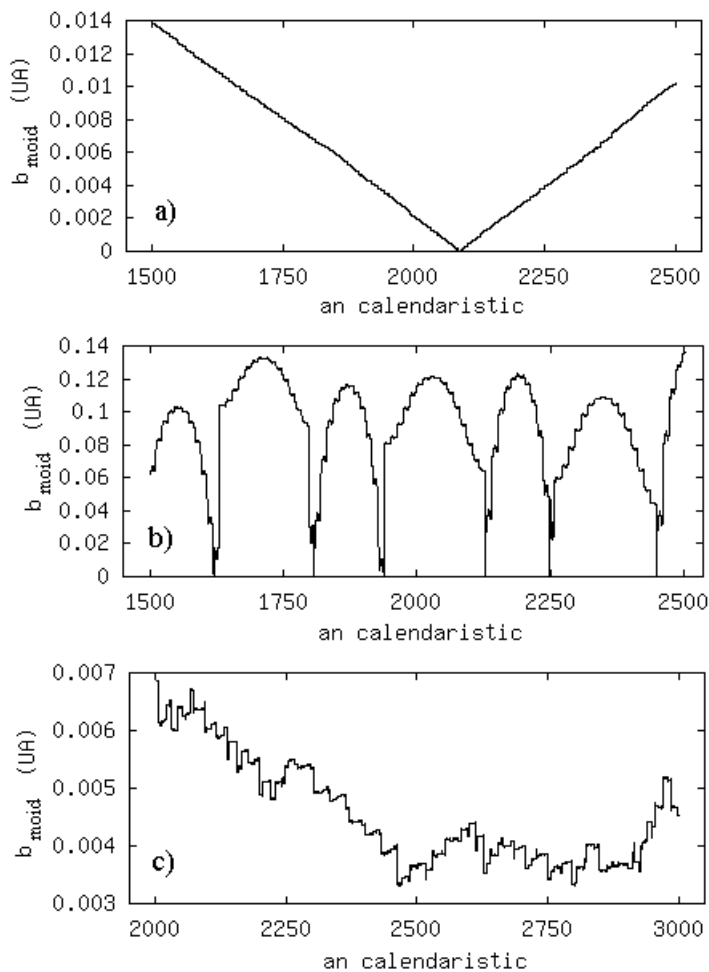


Figura 3.11. Cele trei tipuri de evoluție dinamică a MOID, pe un interval de o mie de ani: a) apropiere orbitală de scurtă durată - asteroidul 2000 WO₁₀₇; b) apropiere orbitală periodică - asteroidul (1915) Quetzalcoatl; c) apropiere orbitală de lungă durată - asteroidul 1999 MN.

3.3.2 Clasificarea SPACEGUARD

O parte din caracteristicile dinamice prezentate în acest capitol pot fi sumarizate în următoarea clasificare dinamică, ce poartă numele unui proiect internațional de monitorizare a evoluției asteroizilor NEA: SPACEGUARD. Această clasificare folosește următoarele criterii: intersecții orbitale, prezența mișcărilor rezonante, poziția periheliului orbitei față de orbita terestră, existența apropierilor strânse [Milani, 1998] și este prezentată sub forma unei scheme bloc în figura 3.12.

Populația de asteroizi NEA se divide pentru început în subclasa celor a căror orbite, de-a lungul unui ciclu de precesie a argumentului periheliului, vor intersecta orbita terestră, așa numiții asteroizi de tip ECA și cei care nu realizează astfel de intersecții orbitale. Continuând cu ultima categorie, cei care-și mențin periheliul orbitei sub 1 UA (adică în interiorul orbitei Pamântului) și totuși orbita lor nu se apropie de orbita terestră, sunt tocmai cei protejați de apropieri strânse prin intermediul rezonanței seculare Kozai, ei formând *clasa Kozai*. Cei care

au periheliul dincolo de orbita terestră și nu sunt în rezonanță cu mișcarea medie a lui Jupiter, formează *clasa Eros*, după asteroidul cel mai reprezentativ (433) Eros. Cei care sunt în rezonanță cu mișcarea medie a lui Jupiter formează *clasa Alinda*, după asteroidul (887) Alinda. Dinamica acestor asteroizi este modelată în special prin mecanismul rezonanței în raport cu Jupiter și mai puțin interacțiunii cu Pământul, față de care nu realizează apropieri strânse.

Revenind la subclasa asteroizilor ECA, cei care sunt în rezonanță medie cu Pământul formează *clasa Toro*, după asteroidul (1685) Toro. De obicei, rezonanța în care sunt prinși joacă și rolul unui mecanism de protecție. Acei ECA care nu sunt în rezonanță cu Pământul și a căror mișcare este dominată de apropieri strânse, formează *clasa Geographos*, cea mai populată dintre toate. Asteroidul reprezentativ aici este (1620) Geographos. Dacă apropierea strânse nu sunt dominante, însă asteroidul este prins într-o rezonanță medie cu Jupiter, dăm din nou peste clasa Alinda. Dacă, în schimb, nu avem nici rezonanță cu Jupiter, atunci a mai rămas un singur parametru dinamic de clasificare: apropierea strânse cu planeta gigant. Dacă acestea au loc, atunci asteroidul este un JCA (“Jupiter-crossing asteroid”) adică un asteroid a cărui orbită traversează orbita planetei Jupiter, așa cum se întâmplă cu orbitele cometelor. Asteroidul ar putea avea, într-adevăr, origine cometară (capitolul următor) sau ar putea fi un asteroid din centura principală perturbat pe o astfel de orbită instabilă. Dacă apropierea strânse nu sunt dominante, atunci avem *clasa Oljato*, după numele asteroidului (2201) Oljato. Această clasă ar putea fi reprezentanta unui tip de comete aflate pe orbite cvasi-stabile, decuplate de interacțiunea cu planeta gigant.

Această clasificare, fiind realizată în urma unor integrări numerice pe intervale de timp ce nu depășesc câteva sute de mii de ani, nu ține seama de efectul rezonanțelor seculare, ce se manifestă pe perioade mult mai mari de timp.

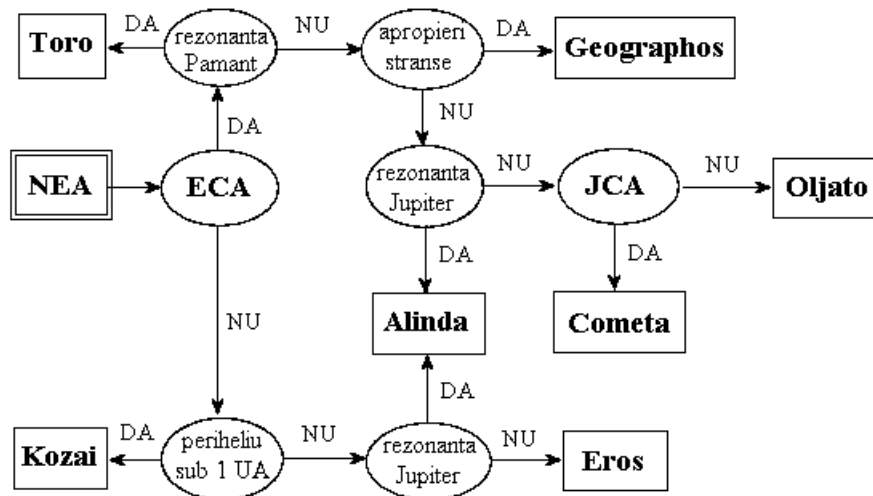


Figura 3.12. Clasificarea dinamică SPACEGUARD.

Aceste clase dinamice definite anterior reprezintă, de fapt, stadii intermediare de evoluție a asteroizilor NEA în sistemul solar, sub acțiunea diferitelor fenomene dinamice, majoritatea descrise în acest capitol. În capitolul următor vom pune accent pe traseele evolutive ale NEA prin aceste clase dinamice, din regiunile sursă de formare a lor până în preajma orbitei terestre, și terminând cu stadiile finale de evoluție: coliziuni cu planetele, căderi pe Soare, sau expulzări din sistem.

Capitolul 4

Regiuni sursă și mecanisme dinamice de transport

Acest capitol trece în revistă principalele trasee evolutive ale asteroizilor NEA din regiunile sursă de formare a lor către orbita terestră. Se disting două clase de asteroizi, cei ce provin din centura principală (situată între planetele Marte și Jupiter) și cei de origine cometară (cu perioadă orbitală scurtă) a căror regiune sursă de formare o reprezintă centura trans-neptuniană de corpuri (centura lui Kuiper).

4.1 Centura principală de asteroizi ca sursă a NEA

Centura principală de asteroizi este considerată cea mai importantă sursă de formare pentru majoritatea asteroizilor NEA. Până nu demult, numeroase probleme legate de mecanismele de transport ale acestor corpuri către Pământ nu au fost înțelese. În ultimii ani însă, s-a înregistrat un progres considerabil în această privință, creându-se mai multe scenarii de evoluție ce au la bază interacțiunea dintre procesul colizional interasteroidal și cel al rezonanțelor planetare. [Froeschlé *et al.*, 1999].

4.1.1 Structura dinamică a centurii de asteroizi

Primul indiciu asupra existenței unei ierarhii dinamice în centura de asteroizi îl reprezintă bine cunoscutele *goluri ale lui Kirkwood* (“Kirkwood gaps”), ce pot fi puse în evidență prin ordonarea asteroizilor deja descoperiți în funcție de semiaxa mare a orbitei lor (figura 4.1). Se va putea distinge atunci prezența unor goluri și a unor aglomerări în distribuția asteroizilor, ce vor corespunde în mare parte unor rapoarte de rezonanță de ordin mic.

De-a lungul timpului, au fost propuse mai multe ipoteze în ceea ce privește originea golurilor lui Kirkwood: *ipoteza statistică* (golurile sunt doar rezultatul unei distribuții statistice aparente), *ipoteza colizională* (golurile sunt puse pe seama fragmentării corpurilor mai masive datorită proceselor colizionale ce ar avea o rată mai mare în regiunile rezonante), *ipoteza cosmogonică* (golurile sunt identificate cu regiunile în care asteroizii nu s-au putut forma în era timpurie a sistemului solar, datorită instabilității lor orbitale) și *ipoteza gravitațională* (golurile sunt puse pe seama existenței regiunilor haotice asociate unor mișcări rezonante, ce pot fi descrise în cadrul problemei celor trei corpuri Soare–Jupiter– asteroid) [Murray și Dermott, 1999].

Cercetările din ultimele două decenii au arătat că ipoteza gravitațională asupra formării golurilor lui Kirkwood este cea mai plauzibilă. Așa cum a fost subliniat în capitolul anterior, un asteroid aflat într-o regiune haotică a spațiului fazelor cunoaște modificări orbitale rapide și de mare amplitudine, astfel încât într-un timp relativ scurt el va realiza apropieri strânse cu una din planetele Jupiter, Marte sau chiar cu Pământul, fiind apoi îndepărtate din regiunea haotică

respectivă într-un timp relativ scurt. Această instabilitate orbitală explică slaba populare cu obiecte a regiunilor de rezonanță ce sunt generatoare de mișcări haotice, cum ar fi rezonanțele medii 3:1 și 4:1 și rezonanțele seculare ν_5 , ν_6 și ν_{16} (figura 4.1). Aceste regiuni de rezonanță sunt caracterizate, în general, printr-un exponent Lyapounov cu câteva ordine de mărime mai mare decât cel al regiunilor adiacente, unde $LCE \approx 10^{-7}$ [Muller și Dvorak, 1995]. Pe de altă parte, regiunile de rezonanță caracterizate prin mișcări regulate sunt suprapopulate cu obiecte, spre exemplu, rezonanțele medii 3:2 și 4:3 [Ferraz-Mello, 1994].

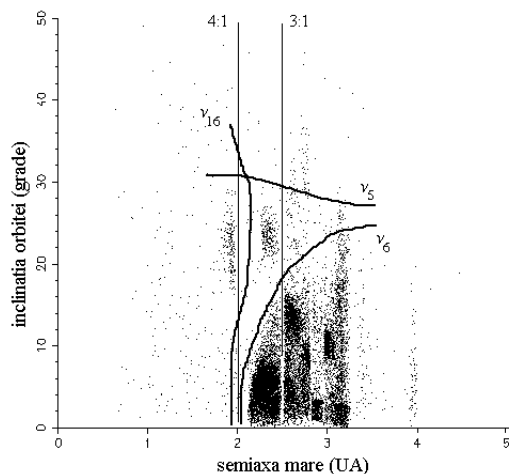


Figura 4.1. Distribuția orbitală a asteroizilor din centura principală împreună cu locația unor rezonanțe medii și seculare, reprezentate în planul elementelor orbitale (a , I).

4.1.2 Mecanisme de transport spre interiorul sistemului solar

Integrări numerice extinse efectuate în ultimii ani, precum și dezvoltarea unor teorii semi-analitice [Froeschlé *et al.*, 1999], [Ferraz-Mello, 1994] relevă mecanismele dinamice prin care unele rezonanțe planetare sunt capabile de a expedia, într-un mod eficient, asteroizi către interiorul sistemului solar și în particular către Pământ. În acest paragraf vom trece în revistă aceste mecanisme dinamice și principalele rute de transfer asociate lor.

Majoritatea regiunilor din spațiul fazelor asociate rezonanțelor medii cu Jupiter sunt regiuni haotice, și aceasta pentru întreg spectrul de valori al excentricității orbitale. Un corp situat într-o astfel de regiune va fi caracterizat prin modificări neregulate și de mare amplitudine a excentricității, până la valori apropiate de 1. Astfel, corpul poate să ajungă în preajma orbitei lui Marte ($e > 0.35$) și chiar a Pământului ($e > 0.6$). Cea mai eficientă rezonanță planetară din acest punct de vedere este rezonanța 3:1 ($a \approx 2.5$ UA), capabilă să expedieze asteroizi către Pământ la o scară de timp de aproximativ 10^5 ani. Rezonanțele planetare situate dincolo de rezonanța 3:1 devin din ce în ce mai puțin eficiente, deoarece odată ce periheliul orbitei asteroidului ajunge în preajma orbitei terestre atunci și afeliul său se va apropia mai mult de orbita lui Jupiter, iar acesta îl va expulza repede din sistem.

În figura următoare prezentăm un exemplu de evoluție dinamică a unui asteroid fictiv plasat în rezonanța 3:1 cu Jupiter, în cadrul unui model dinamic format din Soare—cele patru planete gigante—asteroid, într-un interval de 10^5 ani. Se remarcă evoluția dinamică a excentricității asteroidului de la valoarea $e = 0.3$ până aproape de $e = 0.7$, când distanța periheliului ajunge la $q = 0.8$ UA, asteroidul devenind un ECA. Timpul Lyapounov asociat mișcării este evaluat la aproximativ 7500 de ani, dovedindu-se astfel caracterul haotic al acesteia.

Deoarece rezonanțele seculare acționează pe intervale mai mari de timp, de ordinul a 10^6 ani, doar în ultimele două deceni, odată cu dezvoltarea tehnicii de calcul, au putut fi puse în evidență

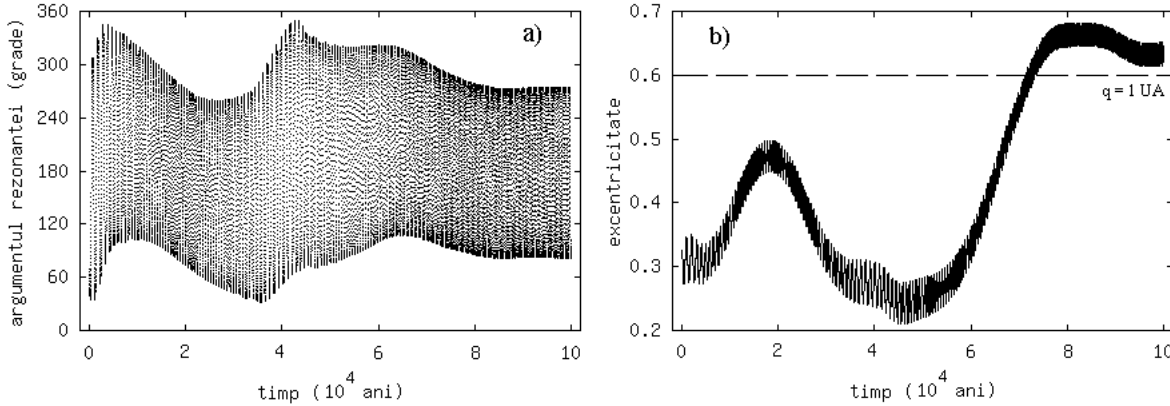


Figura 4.2. Evoluția dinamică a unui asteroid fictiv plasat în rezonanța 3:1 cu Jupiter, având următoarele elemente orbitale kepleriene la epoca JD 2451545.0: $a = 2.4893663$ UA, $e = 0.326086$, $I = 5^\circ.34915$, $\Omega = 0^\circ$, $\omega = 0^\circ$ și $M = 33^\circ.2367$. Sistemul dinamic în care s-a efectuat integrarea numerică este format din Soare—cele patru planete gigante—asteroid. a) variația argumentului de rezonanță $\sigma_{3:1}$ și b) variația excentricității orbitale.

principalele rezultate calitative ale evoluției dinamice într-o astfel de rezonanță. Dintre cele trei rezonanțe seculare principale ν_5 , ν_6 și ν_{16} (descrise în capitolul anterior), rezonanța ν_6 este cea mai eficientă în a transporta asteroizi din centura principală spre interiorul sistemului solar. Mecanismul de transport este similar cu cel al rezonanțelor medii, prin creșterea excentricității orbitale până la valori apropiate de 1. Timpul dinamic de transport asociat acestei rezonanțe este de aproximativ 10^6 ani [School și Froeschlé, 1991]. Apropierea dintre rezonanța seculară ν_6 și rezonanța medie 4:1 ($a \approx 2.06$ UA) duce la extinderea regiunii haotice și la creșterea eficienței mecanismului de expediere.

Rezonanțele seculare ν_5 și ν_{16} îndepărtează și ele asteroizi din centura principală, însă nu sunt la fel de eficiente în expedierea lor către Pământ. Ambele rezonanțe sunt situate în regiuni mai slab populate din centura de asteroizi (figura 4.1). Rezonanța ν_5 acționează la înclinații orbitale mari, reușind să transporte corpuri doar până la nivelul orbitei lui Marte, iar rezonanța ν_{16} cauzează doar creșteri ale înclinației orbitale [School și Froeschlé, 1986].

Odată ajunși în preajma planetelor interioare, asteroizii expediați din centura principală pot fi decuplați din rezonanța în care au fost prinși prin intermediul apropiierilor strânse. Aceștia vor continua apoi să evolueze de-a lungul conturilor Tisserand corespunzătoare planetei perturbatoare (figura 3.7). Decuplarea din rezonanță are loc când semiaxa mare a asteroidului se îndepărtează cu mai mult de 0.03 UA de valoarea nominală corespunzătoare rezonanței. Timpul dinamic de decuplare din rezonanță, datorită acțiunii perturbatoare a Pământului, este de ordinul a 10^4 ani, iar pentru Marte el este de ordinul a 10^6 ani [Greenberg și Nolan, 1993].

În lumina rezultatelor calitative obținute până în prezent, traseele dinamice evolutive ale asteroizilor către Pământ se împart în două categorii: *trasee rapide* (“fast tracks”) și *trasee lente* (“slow tracks”) [Froeschlé *et al.*, 1999]. Traseele rapide sunt guvernate de prinderea într-o rezonanță (medie sau seculară), aceasta reușind să expedieze corpul către interiorul sistemului solar la o scară de timp de cel mult 10^6 ani. Dacă corpul respectiv nu este scos din rezonanță, el poate sfârși în cele din urmă pe Soare, sau poate fi expulzat din sistem de către Jupiter. Traseele lente de evoluție au loc atunci când corpul a fost deja decuplat din rezonanță, evoluția sa fiind dominată de apropieri strânse cu planetele interioare. Aparent, asteroizii pot rămâne pe aceste trasee lente de evoluție timp de zeci de milioane de ani, însă datorită modificărilor aleatorii ale semiaxe mari, mai repede sau mai târziu ei vor fi capturați din nou într-o rezonanță, continuându-și evoluția pe un traseu rapid. Asteroizii a căror mișcare este guvernată de apropieri

strânse cu planeta Marte vor putea ajunge în preajma orbitei terestre de-a lungul conturilor Tisserand asociate planetei, într-un interval de timp de aproximativ 10^8 ani. Figura 4.3 prezintă principalele trasee evolutive ale asteroizilor din centura principală către orbita terestră și timpul dinamic mediu asociat lor [Greenberg și Nolan, 1993].

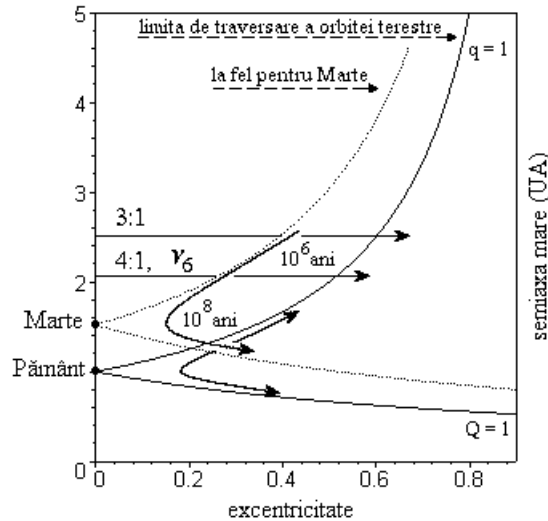


Figura 4.3. Principalele trasee evolutive ale asteroizilor din centura principală către orbita terestră și timpul dinamic mediu asociat lor, în planul elementelor orbitale (e, a).

Asteroizii NEA își vor continua evoluția dinamică în preajma orbitei terestre de-a lungul unor trasee evolutive rapide sau lente, devenind până la urmă potențiali impactori pentru planetele interioare, sau vor sfârși pe Soare, sau vor fi expulzați din sistem de către Jupiter, toate aceste scenarii având loc aproximativ cu aceeași probabilitate [Greenberg și Nolan, 1989]. Timpul dinamic mediu de viață al lor în vecinătatea orbitei terestre este de aproximativ 10^8 ani.

4.1.3 Rolul coliziunilor interasteroidale

Pentru ca mecanismul de transport asociat rezonanțelor planetare să fie eficient, este necesară, în prealabil, găsirea unei modalități prin care corpurile din regiunile dinamic stabile ale centurii de asteroizi să migreze către aceste regiuni haotice de rezonanță (de altfel, slab populate). A devenit deja clasică teoria potrivit căreia procesele colizionale interasteroidale sunt o sursă importantă de alimentare periodică a zonelor de rezonanță cu fragmente colizionale [Farinella *et al.*, 1994]. În acest paragraf va fi analizată eficiența acestui mecanism, precum și efectul coliziunilor interasteroidale în modelarea caracteristicilor fizice ale asteroizilor NEA.

Experimente de laborator asupra procesului colizional

Punctul de plecare în studiul fenomenului colizional sunt experimentele de laborator. Atâta timp cât încă nu este posibilă observarea “live” a unei coliziuni interasteroidale, ele sunt singura modalitate practică de a pune în evidență principalele caracteristicile ale acestui proces, cum ar fi natura coliziunii, distribuția masei și a vitezelor în fragmente, forma acestora, etc. Din nefericire, rezultatele experimentelor nu pot fi întotdeauna extinse și la asteroizi, deoarece există o diferență de 7 ordine de mărime între dimensiunile corpurilor implicate în experimentele de laborator și cele ale asteroizilor. Singura cale de a extinde aceste rezultate experimentale o reprezintă teoriile de scalare [Fujiwara *et al.*, 1989].

În cele ce urmează vom identifica cele două corpuri implicate în procesul de coliziune cu proiectilul, de masă M_p și viteză relativă v_p , și corpul țintă considerat staționar, de masă M_t . În general $M_p \ll M_t$, încât se poate presupune că doar corpul țintă va mai “supraviețui” procesului de impact. Rezultatul unei astfel de coliziuni se poate clasifica în funcție de gradul de distrugere (fragmentare) al țintei, descris prin intermediul *densității de energie colizională*, egală cu raportul E_t/M_t , unde $E_t = E_p/2$ reprezintă jumătate din energia cinetică a proiectilului, $E_p = (1/2)M_p v_p^2$, ce este transmisă țintei în urma procesului de impact, în ipoteza partiționării egale a energiei totale între cele două corpuri [Davis *et al.*, 1989]. De asemenea, aceeași clasificare poate fi întocmită cu ajutorul raportului dintre masa celui mai mare fragment rămas după coliziune și masa totală a țintei, M_L/M_t . Distingem următoarele trei tipuri de coliziuni definite convențional [Fujiwara *et al.*, 1989]: (i) *coliziune cu ricoșare*, pentru $M_L/M_t = 1$, (ii) *coliziune cu formare de cratere*, pentru $0.5 < M_L/M_t < 1$ și (iii) *coliziune cu fragmentare catastrofică*, pentru $M_L/M_t \leq 0.5$. Un caz important din punct de vedere teoretic îl reprezintă pragul de tranziție dintre coliziunea cu formare de cratere și fragmentarea catastrofică, adică $M_L/M_t = 0.5$. Acesta poartă numele de *coliziune cu regim catastrofic limită* (“barely catastrophic outcome”).

Un concept fundamental în descrierea procesului colizional este *energia specifică colizională limită* Q , definită ca densitatea de energie colizională necesară producerii unei coliziuni cu regim catastrofic limită. Parametrul Q se determină experimental și el depinde de tipul materialului, de geometria și viteza de impact, de forma și dimensiunile relative ale celor două corpuri, precum și de modul de partiționare a energiei cinetice. Teoriile de scalare propun o valoare a energiei specifice colizionale limită pentru un corp țintă de dimensiuni asteroidale (de rază R și densitate medie ρ) egală cu $Q = Q_0 + (4\pi G/15) \rho R^2$, unde Q_0 este valoarea determinată experimental în laborator, iar G notează constanta atracției universale.

Experimentele de laborator relevă următoarea dependență lege de putere între rapoartele M_L/M_t și E_t/M_t [Davis *et al.*, 1989]

$$\frac{M_L}{M_t} = \frac{1}{2} \left(Q \frac{M_t}{E_t} \right)^{1.24}, \quad (4.1)$$

ce permite evaluarea tipului de coliziune, cunoscând caracteristicile corpului țintă și energia implicată în proces.

Un alt parametru fundamental ce caracterizează procesul colizional este *coeficientul de partiționare al energiei*, f_{ke} , definit ca acea fracțiune din energia totală de impact, E_p , ce este transferată în energie de mișcare a fragmentelor colizionale. Teoriile de scalare propun o lege de variație de forma $f_{ke} \sim (E_p/M_t)^{0.52}$, cu valori tipice cuprinse între 10^{-2} și 10^{-1} .

Distribuția masei în fragmentele colizionale este bine reprezentată statistic printr-o lege de putere de forma

$$N(> m) = A m^{-\alpha}, \quad (4.2)$$

sau, într-un caz mai general, prin combinarea a două sau trei astfel de legi cu exponenți diferiți. Cantitatea $N(> m)$ reprezintă numărul cumulat de fragmente cu mase mai mari ca m , iar A și α sunt coeficienți constanți pozitivi ce vor fi precizați în continuare. Din condiția la limită $N(\geq M_L) = 1$, deducem imediat $A = M_L^\alpha$.

Numărul de fragmente având mase în intervalul $[m, m + dm]$ se obține prin derivarea relației (4.2) și o schimbare de semn, anume $dN(m) = A \alpha m^{-(\alpha+1)} dm$. Din condiția ca masa totală a fragmentelor să fie un număr finit

$$M_t = \int_0^{M_L} m dN(m) = \frac{\alpha}{1-\alpha} M_L, \quad (4.3)$$

rezultă $\alpha < 1$, iar din condiția ca masa celui mai mare fragment M_L să nu depășească masa totală M_t , rezultă $\alpha > 1/2$. Concluzionăm că $1/2 < \alpha < 1$. Tot din relația (4.3) rezultă că o coliziune cu regim catastrofic limită este caracterizată prin $\alpha = 2/3$ [Bianchi *et al.*, 1984].

De asemenea, se poate stabili o lege de distribuție a fragmentelor colizionale și în funcție de dimensiunile lor. Astfel, dacă variabila r măsoară dimensiunea fragmentelor, din proporționalitatea $m \sim r^3$ rezultă

$$N(> r) = B r^{-\beta}, \quad (4.4)$$

unde $\beta = 3\alpha$. Conform cu (4.3), valoarea exponentului β va fi unic determinată cunoscând raportul ζ dintre dimensiunea celui mai mare fragment rezultat și dimensiunea inițială a țintei,

$$\beta = \frac{3}{1 + \zeta^3}, \quad (4.5)$$

și deci $3/2 < \beta < 3$.

Exponenții α și β sunt o măsură a gradului de fragmentare al țintei. Cu cât α (sau β) este mai mare, cu atât mai violentă este fragmentarea și deci fragmentele mai mici dețin o fracțiune mai mare din masa totală. Tot experimentele arată că impacturi multiple asupra unei ținte produc același grad de fragmentare și distribuție a masei în fragmente ca și un singur impact având o energie egală cu suma energiilor impacturilor multiple.

Distribuția masei în fragmente, funcție de vitezele de expulzare ale acestora în urma impactului, se poate descrie prin intermediul așa numitului model “cumulativ” [Bagatin și Farinella, 1999]

$$m(> v) = \begin{cases} M_t \left(\frac{v}{v_0}\right)^{-k} & , v \geq v_0 \\ M_t & , v < v_0, \end{cases} \quad (4.6)$$

unde $m(> v)$ semnifică masa cumulată a fragmentelor având viteze mai mari ca v , iar v_0 este viteza minimă de expulzare. Ea se poate determina din condiția de conservare a energiei cinetice de mișcare a fragmentelor

$$f_{ke} E_p = \frac{1}{2} \int_{v_0}^{\infty} v^2 dm(v) = \frac{k}{2k-4} M_t v_0^2, \quad (4.7)$$

unde $dm(v) = k M_t v_0^k v^{-(k+1)} dv$ notează expresia masei tuturor fragmentelor având viteze cuprinse în intervalul $[v, v+dv]$ pentru $v \geq v_0$, expresie obținută din (4.6). Condiția de convergență a integralei improprie (4.7) este $k > 2$. Experimentele de laborator sugerează o valoare a exponentului $k \approx 9/4$.

Presupunând existența unei relații biunivoce între masa m a unui fragment colizional și viteza sa de expulzare v , vom putea preciza această relație evaluând cantitatea $m(> v)$ în două moduri, odată cu ajutorul expresiei (4.6), iar apoi din

$$m(> v) = \int_v^{\infty} m(v) dN(m(v)) = \frac{\alpha}{1-\alpha} M_L^\alpha m(v)^{1-\alpha}. \quad (4.8)$$

și astfel [Marzari *et al.*, 1996]

$$v(m) = v_0 \left(\frac{M_L}{m}\right)^{(1-\alpha)/k}. \quad (4.9)$$

Această ecuație este consistentă cu conceptul potrivit căruia fragmentele mai mici sunt expulzate cu viteze mai mari.

Pe de altă parte, numărul de fragmente expulzate cu viteze cuprinse în intervalul $[v, v + dv]$ urmează legea de distribuție [Farinella *et al.*, 1994]

$$dN(v) = \begin{cases} C v^{-(k+1)} & , v \geq v_0 \\ 0 & , v < v_0, \end{cases} \quad (4.10)$$

pentru care o valoare a exponenului $k \approx 9/4$ este consistentă cu rezultatele experimentale.

În ceea ce privește forma fragmentelor colizionale (aproximate cu elipsoizi definiți prin semiaxele $a \geq b \geq c$), experimentele de laborator arată că raporturile b/a și c/a urmează o lege de distribuție normală în jurul valorii medii corespunzătoare proporției $a : b : c = 2 : \sqrt{2} : 1$.

Expedierea de asteroizi în zonele de rezonanță

Eficiența coliziunilor interasteroidale în expedierea de fragmente colizionale în regiunile de rezonanță se poate analiza în termenii incrementului de viteză pe care îl poate primi un astfel de fragment, precum și a cantității de material eliberat în urma unei coliziuni. Tratarea acestor două aspecte va face subiectul paragrafului de față.

În urma unei coliziuni, incrementul de viteză dV ce se adaugă unei viteze heliocentrice inițiale a corpului

$$V^2 = G \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (4.11)$$

aflat la distanța r de corpul central, pe o orbită de semiaxă mare a (G notează aici constanta gravitațională heliocentrică), induce o variație a semiaxei mari

$$da = 2 \frac{V a^2}{G} dV. \quad (4.12)$$

Adoptând valorile medii $V \approx 20$ km/s și $a \approx 2.5$ UA, obținem da [UA] $\approx 3 \times 10^{-4} dV$ [m/s]. Pentru plasarea fragmentelor în zonele de rezonanță este necesară modificarea semiaxei mari cu cel puțin $da = 0.03$ UA, căreia îi corespunde un increment de viteză $dV \approx 100$ m/s. În continuare vom evalua posibilitatea producerii unei astfel de viteze în urma procesului colizional.

Spre deosebire de coliziunile simulate în laborator, în spațiul interplanetar câmpul gravitațional propriu al asteroidului țintă joacă un rol important. Astfel, distingem următoarele tipuri de coliziuni interasteroidale [Davis *et al.*, 1989]: (i) *coliziune cu sfărâmarea țintei*, când procesul de spargere parțială sau totală al asteroidului este urmat de reacumularea majorității fragmentelor și (ii) *coliziune cu dezagregarea țintei*, când procesul de spargere este urmat de dispersia fragmentelor în spațiu.

Numărul fragmentelor care vor scăpa reacumulării depinde de energia cinetică de impact și de intensitatea câmpul gravitațional propriu al asteroidului. Doar fragmentele ce dobândesc viteze relative

$$v > v_{par} = R \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho}, \quad (4.13)$$

reușesc să scape reacumulării. Prin v_{par} notăm viteza parabolică de evadare la suprafața asteroidului, ce depinde de raza R (în ipoteza sfericității corpului), de densitatea medie ρ și de constanta atracției universale G . Adoptând o valoare medie a densității $\rho \approx 2.5$ g/cm³, obținem v_{par} [m/s] = $60 \cdot (R/50$ [km]), ce ne arată că viteze de expulzare de ordinul a 100 m/s sunt necesare doar pentru a evada de pe orice asteroid de dimensiuni apreciabile.

Fragmentele ce au scăpat de câmpul său gravitațional vor dobândi o viteză relativă “la infinit” $v_\infty = v/f$, unde f este factorul de convergență gravitațională dat de expresia (2.82). Rezultă

că $v_\infty^2 = v^2 - v_{par}^2$ și folosind (4.10) putem estima distribuția vitezelor relative a fragmentelor ce părăsesc câmpul gravitațional, în intervalul de viteze $[v_\infty, v_\infty + dv_\infty]$ prin

$$dN(v_\infty) = \begin{cases} C' v_\infty (v_\infty^2 + v_{par}^2)^{-(k+2)/2} dv_\infty & , v_\infty \geq v_0^2 - v_{par}^2 \\ 0 & , v_\infty < v_0^2 - v_{par}^2. \end{cases} \quad (4.14)$$

Această distribuție are un maxim în punctul $v_\infty = v_{par}/\sqrt{k+1}$, ceea ce arată că cele mai multe fragmente ating viteze relative comparabile cu viteza de evadare de la suprafața asteroidului. Acest maxim va fi atins însă doar în cazul când $v_0 \leq v_{par}\sqrt{(k+2)/(k+1)}$. În caz contrar, maximul distribuției va fi la $v_\infty = \sqrt{v_0^2 - v_{par}^2}$.

Care asteroizi generează mai eficient fragmente colizionale, cei mai mari ce sunt capabili să producă mai multe fragmente, dar care se reacumulează în bună parte, sau cei mai mici care produc puține fragmente, dar care se pot dispersa mult mai ușor în spațiu? De asemenea, care tip de coliziune este mai eficientă din acest punct de vedere: coliziunile cu fragmentare catastrofică sau cele cu formare de cratere? Pentru a răspunde într-o primă aproximație acestor întrebări, în literatură a fost propus un model colizional bazat pe următoarele concepte simplificatoare [Farinella *et al.*, 1994]: (i) rata coliziunilor în timp asupra unui asteroid țintă de rază R este dată de $P_i R^2 N_{pr}$, unde P_i este o constantă (probabilitatea colizională medie intrinsecă din centura de asteroizi), iar N_{pr} este numărul de proiectile; (ii) populația de proiectile urmează o lege de distribuție după dimensiunea r , dată de ecuația (4.4); (iii) fragmentarea catastrofică a țintei are loc ori de câte ori raportul dintre dimensiunea proiectilului și dimensiunea țintei depășește un prag limită ξ , independent de dimensiunea țintei; (iv) în cazul coliziunii cu formare de cratere se presupune că doar un singur crater este format, masa excavată fiind proporțională cu energia cinetică de impact, coeficientul de proporționalitate fiind L ; (v) dimensiunea celui mai mare crater ce poate fi format pe asteroidul țintă corespunde unei mase excavate ce reprezintă o fracțiune γ din masa țintei M_T . Dacă \bar{v} este viteza medie de impact, din (iii) și (iv) rezultă $\gamma = L\bar{v}^2\xi^3/2$; (vi) distribuția vitezei de expulzare a fragmentelor este dată de legea (4.10). Dacă $v_0 \geq v_{par}$ atunci toate fragmentele scapă reacumulării, semnul de egalitate conducându-ne la raza minimă a asteroizilor pentru care o parte din fragmentele colizionale se vor reacumula, R_0 [km] = $83 \cdot (v_0/100$ [m/s]). Dacă $R < R_0$ toate fragmentele se vor dispersa în spațiu, iar dacă $R > R_0$ din (4.10) rezultă că numărul de fragmente colizionale ce scapă reacumulării este

$$N(v > v_{par}) = \int_{v_{par}}^{\infty} C v^{-(k+1)} dv \sim \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-k}, \quad (4.15)$$

unde viteza parabolică de evadare s-a scris sub forma $v_{par} = v_0(R/R_0)$, folosindu-ne de relația (4.13).

Frecvența în timp a coliziunilor cu fragmentare catastrofică asupra unui asteroid țintă de rază R va fi $P_i R^2 N_{pr}(r > \xi R) = P_i B \xi^{-\beta} R^{2-\beta}$. Într-o astfel de coliziune, întreaga masă a asteroidului este fragmentată. Rata de expulzare a masei prin fragmente este egală cu (masa țintei) \times (frecvența coliziunilor) \times (procentul de fragmente scăpate reacumulării), adică

$$M_{cat} = \frac{4\pi}{3} \rho P_i B \xi^{-\beta} R^{5-\beta} \left(\frac{R}{R_0}\right)^{-k}, \quad (4.16)$$

în care ultimul termen din membrul drept va dispărea pentru cazul $R < R_0$.

În cazul coliziunilor cu formare de cratere presupunem că pe asteroidul țintă s-au format cratere de toate dimensiunile posibile. Rata de eiecție a masei prin fragmente este egală cu suma după toate mărimile posibile ale proiectilelor ($0 \leq r \leq \xi R$) din (masa expulzată în urma impactului cu un proiectil de rază r) \times (frecvența coliziunilor cu proiectile de rază r) \times (procentul de fragmente scăpate reacumulării), adică

$$\begin{aligned}
M_{cra} &= \left[\int_0^{\xi R} L \frac{m_{pr}(r) \bar{v}^2}{2} P_i R^2 dN_{pr}(r) \right] \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-k} \\
&= \frac{2\pi\beta}{3(3-\beta)} \rho P_i B L \bar{v}^2 \xi^{3-\beta} R^{5-\beta} \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-k},
\end{aligned} \tag{4.17}$$

unde $m_{pr}(r) = (4\pi/3)\rho r^3$ notează masa unui proiectil de rază r , iar $dN_{pr}(r) = \beta B r^{-(\beta+1)} dr$ notează numărul de proiectile din intervalul de dimensiuni $[r, r + dr]$, număr obținut din distribuția lege de putere (4.4). Din nou, ultimul termen din membrul drept al ecuației (4.17) va dispărea pentru cazul $R < R_0$.

Din ambele tipuri de coliziuni rezultă că rata de expulzare a masei prin fragmente este proporțională cu cantitatea $R^{5-\beta}$, pentru $R < R_0$, sau cu $R^{5-\beta-k} \approx R^{2.75-\beta}$, pentru $R > R_0$. O primă concluzie care se desprinde este aceea că, la asteroizii de dimensiuni mici, rata masei expulzate este cu atât mai mare cu cât dimensiunile lor sunt mai mari, pe când la asteroizii mai mari, această rată va fi strâns legată de exponentul β , adică de distribuția după dimensiune a proiectilelor din centura principală. Spre exemplu, pentru o valoare $\beta \approx 3$ (adică vor predomina proiectilele de dimensiuni mai mici), rata de expulzare a masei va scădea odată cu creșterea razei R a asteroidului țintă.

Experimentele numerice bazate pe teoriile de scalare existente au dezvăluit următoarele caracteristici generale ale asteroizilor în urma procesului colizional [Davis *et al.*, 1989]: a) asteroizii de dimensiuni mari (peste 300 km în diametru) își conservă atât masa cât și perioada de rotație axială; b) asteroizii de dimensiuni medii, cuprinse între 50 și 300 km în diametru, sunt supuși frecvent coliziunilor energetice ce produc sfărâmarea corpului, însă o fracțiune importantă din fragmentele colizionale se vor reacumula, formând așa numitele structuri de *roci îngrămadite* (“rubble piles”); c) asteroizii cu dimensiuni mai mici sunt supuși frecvent coliziunilor capabile de dezintegrarea lor parțială sau totală, aceștia putând fi considerați la rândul lor fragmente colizionale. Ei au forme neregulate și stări de rotație din cele mai diverse, reprezentând sursa principală pentru corpurile expediate în zonele de rezonanță, iar apoi spre Pământ, devenind asteroizi NEA.

De asemenea, au fost imaginate modele colizionale capabile să explice apariția asteroizilor binari [Martelli *et al.*, 1993], a căror existență este confirmată observațional, prin măsurători fotometrice și radar, precum și modele de evoluție ale acestora sub acțiunea perturbatoare a apropiierilor strânse planetare [Farinella și Chauvineau, 1993]. Procentul de asteroizi binari în vecinătatea orbitei terestre este estimat la aproximativ 20% [Pravec *et al.*, 1999].

Pentru a determina care tip de coliziune expulzează mai multă masă prin fragmente, vom face raportul expresiilor (4.16) și (4.17), obținând

$$\frac{M_{cra}}{M_{cat}} = \frac{\beta}{2(3-\beta)} L \bar{v}^2 \xi^3 = \frac{\beta\gamma}{3-\beta}, \tag{4.18}$$

de unde rezultă că acest raport este independent de dimensiunea asteroidului țintă. Punând $\gamma \approx 0.1$ [Farinella *et al.*, 1994], acest raport va depinde de parametrul β , el fiind egal cu unitatea pentru $\beta = 30/11 \approx 2.73$. Astfel, pentru $\beta < 2.73$ coliziunile cu fragmentare catastrofică vor fi mai prolifică în expulzarea de material asteroidal, în caz contrar, cele cu formare de cratere vor fi mai eficiente.

Rezultatele observaționale nu relevă valori consistente ale exponentului β (spre exemplu, $\beta \approx 2$ din examinarea craterelor lunare și $\beta \approx 3.3$ din examinarea craterelor de pe suprafața asteroidului Gaspra), însă el poate fi determinat teoretic în ipoteza existenței unui model staționar în ceea ce privește formarea și distrugerea de fragmente prin coliziuni interasteroidale. Acest model îl vom invoca în paragraful următor.

Echilibru colizional

Procesele colizionale responsabile de expedierea de fragmente în zonele de rezonanță au ca efect și descreșterea treptată a dimensiunilor asteroizilor prin spargerea lor în fragmente mai mici, acestea devenind, la rândul lor, corpuri țintă sau proiectile pentru viitoarele coliziuni. Vom schița în cele ce urmează distribuția după dimensiune a acestei populații mixate de corpuri, invocând un model staționar [Greenberg și Nolan, 1989]: pentru orice dimensiune fixată, există un echilibru între rata distrugerilor colizionale a corpurilor având dimensiunea respectivă și crearea altora noi prin fragmentarea celor mai mari. În esență, numărul acestor corpuri, pe fiecare interval de dimensiune (excluzând extremitățile) se conservă. În cadrul acestui scenariu vom neglija efectul coliziunilor mai puțin energetice, și anume al celor cu formare de cratere.

Presupunem că populația acestor corpuri aflate în echilibru colizional urmează o lege de distribuție după rază, pe fiecare interval $[r, r + dr]$, de forma $dN(r) = B\beta r^{-(\beta+1)} dr$ (dedusă din legea 4.4). Corpurile de rază r sunt fragmentate prin coliziuni cu fragmentare catastrofică de către orice alt obiect având raza cel puțin egală cu kr ($k < 1$ fixat). Presupunem că toate impacturile au loc cu aceeași viteză medie. Majoritatea proiectilelor vor fi mai mici decât țintele, încât rata de distrugere a lor este proporțională cu numărul proiectilelor și cu secțiunea eficace cumulată de coliziune a corpurilor țintă

$$\left[\frac{d}{dt} dN(r) \right]_{\text{distr.}} = -C N(> kr) r^2 dN(r) = -\tau^{-1}(r) dN(r) = -(CB^2 \beta k^{-\beta}) r^{1-2\beta} dr, \quad (4.19)$$

unde C este o constantă, iar $\tau(r) = (CB)^{-1} k^\beta r^{\beta-2}$ este *timpul de viață colizional*, semnificând rata descreșterii exponențiale a numărului de corpuri de rază r prin coliziuni.

În urma fragmentării unui corp mai mare, având rază $r_b > r$, din experimente de laborator obținem că fragmentele vor urma o lege de distribuție după dimensiune $dN'(r) = B'\beta' r^{-(\beta'+1)} dr$, cu β' precizat. Dacă cel mai mare fragment format are raza egală cu o fracțiune b din raza inițială r_b atunci, din condiția $N'(\geq br_b) = 1$, rezultă valoarea constantei $B' = (br_b)^{\beta'}$. De asemenea, din relația (4.5) rezultă că $\beta' = 3/(1 + b^3)$.

Rata formării corpurilor de rază r prin fragmentarea celor de rază r_b este

$$\left[\frac{d}{dt} dN(r) \right]_{\text{form.}} = dN'(r) \left[\frac{d}{dt} dN(r_b) \right]_{\text{distr.}} = dN'(r) \tau^{-1}(r_b) dN(r_b). \quad (4.20)$$

Rata formării corpurilor de rază r prin fragmentarea celor de rază mai mare ca r se obține prin integrarea expresiei anterioare între limitele $r_b = r/b$ și ∞ , adică

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} dN(r) \right]_{\text{form.}} &= \int_{r/b}^{\infty} dN'(r) \tau^{-1}(r_b) dN(r_b) = (CB^2 \beta k^{-\beta} \beta' b^{\beta'}) r^{-(\beta'+1)} dr \int_{r/b}^{\infty} r_b^{\beta'-2\beta+1} dr_b \\ &= (CB^2 \beta k^{-\beta}) \frac{\beta'}{\beta' - 2\beta + 2} b^{2\beta-2} r^{1-2\beta} dr \end{aligned} \quad (4.21)$$

Expresia anterioară este de fapt o supraestimare a ratei de formare, deoarece în realitate va exista o dimensiune maximă a corpurilor r_{max} . Atâta timp cât $r_{max} \gg r/b$, estimarea respectivă va fi însă o bună aproximație.

Populația fiind presupusă în echilibru colizional, rata de distrugere a corpurilor va fi egală cu rata de formare a lor pentru orice dimensiune r , încât din expresiile (4.19) și (4.21) vom deduce

$$\beta = \frac{\beta'}{2} (1 + b^{2\beta-2}) + 1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1 + b^{2\beta-2}}{1 + b^3} + 1. \quad (4.22)$$

Această ecuație transcendentă are o soluție unică, independentă de b , anume $\beta_{echil} = 5/2$. Valoarea β_{echil} caracterizează distribuția după dimensiune a unei populații de corpuri aflate în echilibru colizional [Greenberg și Nolan, 1989].

Dacă presupunem că populația de asteroizi din centura principală se află în echilibru colizional și că rata expedierii lor către zonele de rezonanță reprezintă o anumită fracțiune din rata lor de formare (sau distrugere) prin procese colizionale, rezultă că populația proaspăt expedită în rezonanțe va urma o lege de distribuție după dimensiune de tipul (4.4) cu un exponent β_{exp} dat de egalitatea $-(1 + \beta_{exp}) = 1 - 2\beta_{echil}$ (conform relației 4.19). Rezultă de aici $\beta_{exp} = 3$, ce corespunde unei populații în care corpurile de dimensiuni mici dețin o fracțiune mare din masa totală. Pe de altă parte, coliziunile interasteroidale ce vor avea loc pe parcursul evoluției dinamice către Pământ (în special de-a lungul traseelor evolutive lente) vor duce la modificarea distribuției respective către o distribuție apropiată de cea corespunzătoare echilibrului colizional. Este de așteptat ca populația de asteroizi NEA să fie o populație mixată, formată din corpuri ce prezintă grade diferite de maturitate orbitală și care sunt expuse în mod diferit proceselor colizionale, funcție de traseul lor evolutiv spre planeta noastră [Greenberg și Nolan, 1993].

În realitate, distribuția după dimensiune a asteroizilor NEA nu poate fi riguros descrisă printr-o singură lege de tipul (4.4), ci mai degrabă printr-o combinație a lor. Astfel, în urma corectării efectului de selecție observațională asupra asteroizilor ECA descoperiți, distribuția respectivă se poate aproxima prin intermediul a trei legi de putere [Rabinowitz *et al.*, 1994]

$$\beta = \begin{cases} 3.5, & 10 \text{ m} < D < 70 \text{ m} \\ 2.0, & 70 \text{ m} < D < 3.5 \text{ km} \\ 5.4, & D > 3.5 \text{ km}, \end{cases} \quad (4.23)$$

în funcție de diametrul D al asteroizilor. Cu acest model de distribuție s-a estimat numărul total al asteroizilor NEA în capitolul 1 al lucrării (figura 1.2).

Efectul termic Yarkovsky

Relativ recent [Farinella *et al.*, 1999], a fost propus un mecanism alternativ non-gravitațional de expediere al asteroizilor din centura principală către zonele de rezonanță, datorat radiației solare.

O anumită fracțiune din radiația solară absorbită de un corp, fracțiune ce va depinde de albedoul acestuia (mărimă definită în paragraful următor), este reemisă imediat la nivelul suprafeței sale, dând naștere unei forțe repulsive numită *efect Poynting-Robertson*. Dacă această forță este importantă în cazul corpurilor având dimensiunea prafului interplanetar (μm - mm), influența sa asupra asteroizilor NEA, ce au un raport suprafață/masă mult prea mic, este însă neglijabilă.

Pe de altă parte, cealaltă fracțiune din radiația solară, ce nu este reemisă imediat, va fi procesată fizic în interiorul corpului și reemisă ulterior anizotropic în bandă infraroșie (sub formă de radiație termică). Forța datorată acestui câmp radiativ termic poartă numele de *efect termic Yarkovsky*, fiind semnificativă în special pentru dimensiuni ale corpurilor de ordinul a 0.1 – 100 metri. Parametri cheie ce caracterizează acest efect sunt timpul de relaxare termică al asteroidului t_{term} (reprezentând scara de timp la care corpul răspunde termic unei excitații externe) și perioada de rotație axială t_{rot} [Vokrouhlický și Farinella, 1998]. Raportul acestor mărimi $\Theta = t_{term}/t_{rot}$, poartă numele de *parametru termic*. Când $\Theta \lesssim 1$, componenta longitudinală a gradientului de temperatură va predomina, și astfel forța rezultată va fi orientată perpendicular pe axa de rotație a corpului. În acest caz, perturbația indusă în mișcarea heliocentrică a corpurilor va depinde de perioada sa de rotație axială. Din acest motiv, aceasta poartă numele de componenta “diurnă” a efectului Yarkovsky. În caz contrar, dacă $\Theta \gg 1$, va avea loc o mediere a componentei longitudinale a gradientului de temperatură, încât forța rezultată va fi orientată

acum de-a lungul axei sale de rotație. Perturbația indusă va depinde în acest caz de perioada de revoluție orbitală a corpului, și de aici numele de componenta “sezonieră” a efectului Yarkovsky.

Ce mai importantă manifestare a efectului Yarkovsky este modificarea semiaxei mari orbitale, ce permite astfel migrația asteroizilor către zonele de rezonanță. Rata de variație a semiaxei mari este de ordinul a $10^{-3} - 10^{-5}$ UA/10⁶ ani [Vokrouhlický *et al.*, 2001]. Componenta sezonieră va produce întotdeauna o micșorarea a semiaxei mari, pe când componenta diurnă va induce variații neregulate, funcție de perioada de rotație axială. Asteroizii cu dimensiuni de ordinul metrilor vor fi afectați mai cu seamă de componenta sezonieră, pe când cei mai mari (care vor avea perioade de rotație mici) vor fi afectați îndeosebi de componenta diurnă.

Chiar dacă observațional nu au fost încă puse în evidență perturbații în mișcarea asteroizilor NEA datorate efectului Yarkovsky [Vokrouhlický *et al.*, 2001] (decât asupra sateliților artificiali), acest mecanism se dovedește a juca un rol important în scenariul de evoluție al asteroizilor NEA din centura principală către Pământ. Astfel, el reușește să explice prezența unor asteroizi NEA de dimensiuni kilometrice ce nu se dovedesc a fi fragmente colizionale, precum și supraabundența asteroizilor NEA de dimensiuni mici (înlăturați eficient din centură prin intermediul efectului Yarkovsky sezonier).

4.1.4 Estimarea masei asteroizilor

Masa unui asteroid NEA este parametrul fizic fundamental în evaluarea consecințelor unui posibil impact cu planeta noastră (analizate în paragraful 5.3) și, din estimări radar ale formei și dimensiunii asteroidului, ar permite determinarea densității acestuia și obținerea de informații asupra structurii interne. Din nefericire, masa unui asteroid este foarte greu de determinat prin măsurători directe.

Există estimări de masă pentru foarte puțini asteroizi NEA, obținute din observații ale perturbațiilor gravitaționale exercitate asupra altor asteroizi, sateliți naturali ai acestora, sau asupra sondelor spațiale [Chesley *et al.*, 2001]. Majoritatea lor însă nu dețin estimări directe ale masei, și cu atât mai puțin ale densității. În general, singura mărime fizică disponibilă pentru fiecare asteroid este magnitudinea absolută a sa, determinată în urma observațiilor fotometrice. De aici, urmând un model fotometric simplificat [Bowell *et al.*, 1989], se vor putea face estimări ale ordinului de mărime al masei. În cele ce urmează, bazându-ne pe formulele fundamentale ale fotometriei astronomice [Ureche, 1987], [Karttunen, 1994], vom reproduce modelul mai sus menționat.

Considerăm asteroidul situat la distanța r de Soare și distanța Δ de Pământ. Acesta din urmă se află la distanța r_p (=1 UA) de Soare (figura 4.4). Dacă F_{\odot} notează fluxul de radiație la suprafața Soarelui, strălucirea aparentă integrală a sa la distanța r va fi $E_{\odot}(r) = F_{\odot}(R_{\odot}/r)^2$, unde R_{\odot} este raza Soarelui. Fluxul incident de radiație măsurat pe întreaga suprafață luminată a asteroidului (presupus sferic și de rază R) este $L = E_{\odot}(r) \pi R^2 = F_{\odot}(R_{\odot}/r)^2 \pi R^2$, iar fluxul emergent al radiației reflectate de acesta este $L' = AL$, unde A poartă numele de *albedo Bond* al asteroidului (definit ca raportul dintre fluxul emergent al radiației reflectate și fluxul incident).

Dacă radiația ar fi reflectată izotrop de către suprafața asteroidului, strălucirea sa aparentă măsurată de pe Pământ ar fi $E = L'/4\pi\Delta^2$. Cum însă radiația nu este reflectată izotrop, această expresie va trebui corectată printr-un factor $C\Phi(\alpha)$, ce depinde de unghiul de fază α (figura 4.4), anume

$$E = C\Phi(\alpha) \frac{L'}{4\pi\Delta^2} = \frac{CA}{4} \Phi(\alpha) F_{\odot} R_{\odot}^2 \left(\frac{R}{r\Delta} \right)^2, \quad (4.24)$$

unde $\Phi(\alpha)$ se numește *funcția de fază*, ea fiind normalizată la valoarea $\Phi(0^\circ) = 1$. Constanta C se obține din condiția ca pe suprafața sferei imaginare de rază Δ în jurul asteroidului, să regăsim întreg fluxul radiației reflectate $L' = \int_{\mathcal{S}} E d\mathcal{S}$. Rezultă

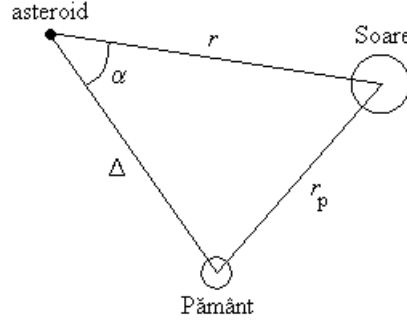


Figura 4.4. Simbolurile folosite în formulele fotometrice.

$$C = \frac{4\pi\Delta^2}{\int_S \Phi(\alpha) dS} = \frac{2}{\int_0^\pi \Phi(\alpha) \sin \alpha d\alpha}, \quad (4.25)$$

unde elementul de suprafață al sferei respective este $dS = \Delta^2 \sin \alpha d\alpha d\phi$, cu $\alpha \in [0, \pi]$ și $\phi \in [0, 2\pi]$.

Cantitatea $p = CA/4$ poartă numele de *albedo geometric* al asteroidului. Se poate arăta că acesta este egal cu raportul dintre fluxul radiație reflectate de asteroid și cel corespunzător unei suprafețe Lambertiene, ambele fluxuri fiind calculate la un unghi de fază nul. Albedoul geometric poate fi determinat observațional prin măsurători de radiometrie și polarimetrie. Valoarea sa este în strânsă corelație cu caracteristicile fizice ale suprafeței asteroidului, cuantificate prin clasa sa spectrală. Cele mai importante clase spectrale, împreună cu intervalele albedoului geometric corespunzător, sunt următoarele: S ($0.07 < p < 0.23$), C ($0.02 < p < 0.06$), M ($0.07 < p < 0.2$) și E ($p > 0.2$) [Consolmagno și Schaefer, 1994]. Pe de altă parte, $q = 2 \int_0^\pi \Phi(\alpha) \sin \alpha d\alpha$ se numește *integrala de fază*, care dacă este cunoscută, permite determinarea albedoului Bond, prin relația $A = pq$.

Făcând raportul dintre strălucirea aparentă a asteroidului, dată de expresia (4.24), și strălucirea aparentă a Soarelui la nivelul orbitei terestre $E_\odot(r_p) = F_\odot(R_\odot/r_p)^2$, obținem

$$\frac{E}{E_\odot(r_p)} = p \Phi(\alpha) \left(\frac{Rr_p}{r\Delta} \right)^2. \quad (4.26)$$

Diferența dintre magnitudinea aparentă a asteroidului (m) și cea a Soarelui (m_\odot) se obține din formula lui Pogson

$$m - m_\odot = -2.5 \lg \frac{E}{E_\odot(r_p)} = -2.5 \lg p \frac{R^2}{r_p^2} + 5 \lg \frac{r\Delta}{r_p^2} - 2.5 \lg \Phi(\alpha), \quad (4.27)$$

iar dacă notăm

$$H = m_\odot - 2.5 \lg p \frac{R^2}{r_p^2}, \quad (4.28)$$

obținem că

$$m = H + 5 \lg \frac{r\Delta}{r_p^2} - 2.5 \lg \Phi(\alpha). \quad (4.29)$$

Observațiile fotometrice pot furniza valoarea magnitudinii absolute a asteroidului la unghiul de fază α (corespunzătoare distanțelor $r = \Delta = 1$ UA), prin

$$H(\alpha) = m - 5 \lg \frac{r\Delta}{r_p^2}, \quad (4.30)$$

iar din (4.29) rezultă

$$H = H(\alpha) - 2.5 \lg \Phi(\alpha), \quad (4.31)$$

care se numește *magnitudinea absolută* a asteroidului la un unghi de fază de 0° .

Pentru funcția de fază se adoptă următoarea expresie de partiționare [Bowell *et al.*, 1989]

$$\Phi(\alpha) = (1 - G)\Phi_1(\alpha) + G\Phi_2(\alpha), \quad (4.32)$$

unde G poartă numele de *parametrul de pantă* (“slope parameter”), indicând gradientul curbei de fază, iar funcțiile Φ_1 și Φ_2 au următoarele expresii aproximative în banda vizuală

$$\Phi_i(\alpha) = \exp \left[-A_i \left(\tan \frac{\alpha}{2} \right)^{B_i} \right], \quad i = 1, 2 \quad (4.33)$$

valabile în domeniul $0^\circ \leq \alpha \leq 120^\circ$ și $0 \leq G \leq 1$. Constantele ce intervin au valorile $A_1 = 3.33$, $A_2 = 1.87$, $B_1 = 0.63$, și $B_2 = 1.22$.

H și G sunt parametri fotometrici fundamentali ai oricărui asteroid, ei fiind publicați în cataloage alături de elementele orbitale. Odată determinați observațional dintr-un set de date fotometrice prin metoda celor mai mici pătrate, acești parametri permit apoi estimarea magnitudinii aparente a asteroizilor la orice moment de timp, folosind relația (4.29). Pentru asteroizii din centura principală, o valoare tipică a parametrului de pantă este $G = 0.15$. Sistemul de magnitudini prezentat mai sus se numește *sistemul de magnitudini H-G*, el fiind adoptat oficial de către Uniunea Astronomică Internațională în anul 1985.

Dacă $D = 2R$ notează diametrul asteroidului, acesta poate fi evaluat din relația (4.28), cunoscând albedoul geometric p , prin

$$D = \frac{2r_p}{\sqrt{p}} 10^{(m_\odot - H)/5}. \quad (4.34)$$

Considerăm acum domeniul vizual, în care magnitudinea aparentă a Soarelui are valoarea $m_\odot = -26.73$. Punând $r_p = 1$ UA, deducem [Bowell *et al.*, 1989]

$$D = \frac{1349}{\sqrt{p}} 10^{-H/5} \text{ [km]}. \quad (4.35)$$

unde, atât H cât și p , vor fi specifici domeniului vizual.

Masa asteroidului va avea expresia

$$\begin{aligned} M &= 1.3 \times 10^{21-3H/5} \rho p^{-3/2} \text{ [kg]} \\ &= 6.5 \times 10^{-(10+3H/5)} \rho p^{-3/2} [M_\odot], \end{aligned} \quad (4.36)$$

evaluată atât în kilograme cât și în fracțiuni de masă solară. În aceste formule, densitatea medie ρ a asteroidului este exprimată în g/cm^3 .

Produsul $\rho p^{-3/2}$ este principala sursă de incertitudine în determinarea masei. Valoarea sa depinde de apartenența asteroidului la una din clasele spectrale amintite mai sus. Urmând proporția acestor clase spectrale printre asteroizii NEA [Chesley *et al.*, 2001], se obține o valoare medie a produsului respectiv, $\rho p^{-3/2} \approx 43$, corespunzătoare valorilor $\rho \approx 2.6 \text{ g/cm}^3$ și $p \approx 0.15$.

Magnitudinile absolute ale asteroizilor NEA descoperiți până în prezent variază în intervalul $10 < H < 29$, căruia îi corespunde (cu aproximație) un spectru de mărimi $5 \text{ m} < D < 40 \text{ km}$

și un spectru de mase $10^5 < M < 10^{17}$ kg. Într-adevăr, cel mai mare asteroid NEA descoperit este (1036) Ganymed, cu un diametru $D = 38.5$ km și un albedo geometric $p = 0.17$ [McFadden *et al.*, 1989], însă pentru care nu există încă estimări directe ale masei sale.

4.2 Asteroizi NEA de origine cometară

Numărul asteroizilor NEA descoperiți până în prezent este mult mai mare decât cel al cometelor scurt și lung periodice a căror orbită trece prin vecinătatea orbitei terestre (cu distanța la periheliu $q \leq 1$ UA). Raportul respectiv este de aproximativ 1600/40, el fiind într-o continuă creștere. Pe de altă parte, un nucleu cometar este activ (și deci ușor de identificat) doar pe un interval de timp cu câteva ordine de mărime mai mic decât timpul dinamic de viață în sistemul solar interior. Din acest motiv, este de așteptat ca numărul nucleelor cometare stinse (care și-au consumat complet componenta volatilă) să fie mult mai mare decât cel al cometelor active [Levison și Duncan, 1994]. Aceste nuclee stinse formează populația de origine cometară a asteroizilor NEA, contribuția lor la rata de formare a craterelor de impact terestru, cu diametre depășind 20 km, fiind estimată la 20% [Shoemaker *et al.*, 1994]. Paragraful de față va fi dedicat evoluției dinamice a nucleelor cometare din regiunile sursă a lor către orbita terestră.

4.2.1 Populații de corpuri în sistemul solar exterior

Asteroizi sau comete?

Urmând lucrarea [Weissman *et al.*, 1989], vom numi *cometă* (sau *nucleu cometar*) un corp format în sistemul solar exterior care conține elemente volatile capabile să dezvolte o coamă atunci când orbita sa îl aduce suficient de aproape de Soare, iar *asteroid* vom numi acel corp interplanetar fără un conținut bogat în elemente volatile, deci care nu poate prezenta activitate cometară. Dacă este observat, un nucleu cometar stins va avea aspect asteroidal, ascunzându-și astfel adevărata sa origine.

Există totuși evidențe observaționale ale faptului că anumiți asteroizi NEA au origine cometară [Weissman *et al.*, 1989]. În primul rând, este vorba despre caracteristicile dinamice ale orbitelor lor. Majoritatea cometelor sunt caracterizate printr-un parametru Tisserand în raport cu Jupiter $T_J < 3$, pe când majoritatea asteroizilor au $T_J > 3$, adică orbita lor nu traversează orbita planetei gigant (conform paragrafului 2.2.2 al lucrării). Există câteva zeci de asteroizi NEA descoperiți pe orbite de tip cometar. De asemenea, similitudinea dintre orbitele unor curenți meteorici și cele ale unor asteroizi trădează originea cometară a acestora (de exemplu, asteroidul (3200) Phaethon și curentul meteoric Geminide).

Asteroizii NEA de origine cometară au, în general, un albedo foarte scăzut și din acest motiv există un puternic efect de selecție observațională ce limitează descoperirea lor. Chiar dacă până în prezent au fost identificați doar câțiva candidați siguri (cu caracteristici fizice observate de tip cometar), contribuția lor la întreaga populația a NEA ar putea fi însemnată (40% conform cu [Weissman *et al.*, 1989]).

Regiuni sursă ale populației cometare

Din punct de vedere dinamic, cometele se împart în două mari categorii: *comete scurt periodice*, (a căror perioadă de revoluție orbitală este mai mică de 200 de ani) și *comete lung periodice*. Prima categorie de comete se divide la rândul ei în așa numitele *comete din familia lui Jupiter* și *comete de tip Halley*. Discriminarea dintre ele se face pe baza parametrului Tisserand, după cum $T_J > 2$, respectiv $T_J < 2$ [Levison și Duncan, 1994]. Așa cum vom sublinia ulterior, aceste două subpopulații ar putea să provină din regiuni sursă diferite.

Regiunea din spațiul elementelor orbitale pentru care distanța la periheliu $q < 2.5$ UA o vom numi *regiunea cometară activă*, deoarece o astfel de orbită permite nucleului cometar să devină suficient de activ pentru a putea fi detectat cu ușurință de pe Pământ.

Cometele din familia lui Jupiter, după cum le spune și numele, au orbite situate în vecinătatea planetei gigant (îndeosebi periheliul sau afeliul acestora) și din acest motiv ele sunt puternic perturbate gravitațional. Evoluția lor dinamică este haotică, corpurile migrând către regiunea cometară activă, iar apoi părăsind-o, de mai multe ori pe parcursul evoluției lor dinamice. O bună parte a lor ajung și în vecinătatea orbitei terestre, ca nuclee active (comete) sau ca nuclee stinse (asteroizi de origine cometară). O decuplare gravitațională de planeta Jupiter nu pare a fi însă un fenomen frecvent deși există un exemplu în acest sens, cometa Encke. Studii recente [Harris și Bailey, 1998] sugerează faptul că acțiunea forțelor nongravitaționale, specifice activității cometare, este în măsură să producă astfel de decuplări de planeta gigant, contribuind la creșterea timpului dinamic de viață al acestor asteroizi de origine cometară în preajma orbitei terestre.

Decenii la rând s-a considerat că principala regiune sursă pentru comete o reprezintă norul sferic al lui Oort, situat la frontiera sistemului solar, dincolo de 10^3 UA. Apoi, în anul 1951, astronomul Kuiper sugerează ideea existenței unei centuri de corpuri în planul eclipticii, situată dincolo de orbita planetei Neptun (între 35 – 50 UA), provenind din nebuloasa primordială solară și cu un conținut bogat în elemente ușoare, așa numita *centură a lui Kuiper*. În lucrarea [Fernández, 1980] este sugerată pentru prima dată ideea că centura lui Kuiper ar putea fi regiunea sursă principală a cometelor scurt periodice, arătându-se cum apropierea strânse mutuale dintre corpuri sunt capabile de expedierea lor pe orbite instabile.

În urma unor integrări numerice [Duncan *et al.*, 1988], s-a demonstrat că distribuția actuală a înclinației orbitale a cometelor din familia lui Jupiter nu poate fi explicată în ipoteza formării lor în norul sferic al lui Oort, inițial ca și comete lung periodice și ulterior perturbate pe orbite scurt periodice de planetele gigante. Originea lor în centura lui Kuiper pare acum mult mai plauzibilă, mai cu seamă că acest lucru explică înclinația orbitală relativ mică a cometelor din familia lui Jupiter. Cometele de tip Halley, care prezintă o distribuție mult mai omogenă a înclinației lor orbitale, rămân candidate sigure ale formării lor în norul lui Oort.

Populația de corpuri numită *Centaurus*, având orbite situate între orbitele planetelor gigante, ar putea face conexiunea dinamică între corpurile din centura lui Kuiper și cometele scurt periodice. Primul membru descoperit al acestei populații este Chiron, inițial identificat ca asteroid, însă apoi observându-se o activitate cometară. Populația respectivă se caracterizează prin orbite dinamic instabile.

Integrări numerice efectuate pe intervale mari de timp [Levison, 1991] dovedesc faptul că regiuni bine definite din centura lui Kuiper sunt caracterizate prin timpi dinamici de viață de ordinul vârstei sistemului nostru solar, fiind un indiciu că o întregă populație de corpuri poate supraviețui dinamic în regiunea trans-neptuniană. Într-adevăr, în anul 1992 a fost descoperit primul membru al acestei populații, anume 1992 QB₁, urmând apoi și alții [Jewitt și Luu, 1995]. Astăzi, numărul corpurilor descoperite în această regiune a sistemului solar este de peste 500, iar numărul total estimat al corpurilor cu diametre mai mari de 100 km este de aproximativ 70.000.

Observațional sau identificat trei componente ale populației trans-neptuniene: (i) *componenta clasică* sau *centura principală trans-neptuniană* (numită “Cubewano”), formată din corpuri cu orbite aproape circulare și semiaxe mari cuprinse între 35 – 50 UA (cu orbite stabile); (ii) *componenta rezonantă* (numită “Plutinos”), formată din corpuri situate în rezonanța 3:2 cu Neptun, ca și planeta Pluto (tot cu orbite stabile); (iii) *componenta de disc împrăștiat* (“scattered disk”), formată din corpuri situate pe orbite cu excentricități mari și semiaxe ce pot ajunge la câteva sute de UA. Aceste orbite sunt instabile dinamic, fiind susceptibile de difuzie haotică ulterioară prin sistemul solar exterior, contribuind la îmbogățirea populației de corpuri

Centaurus.

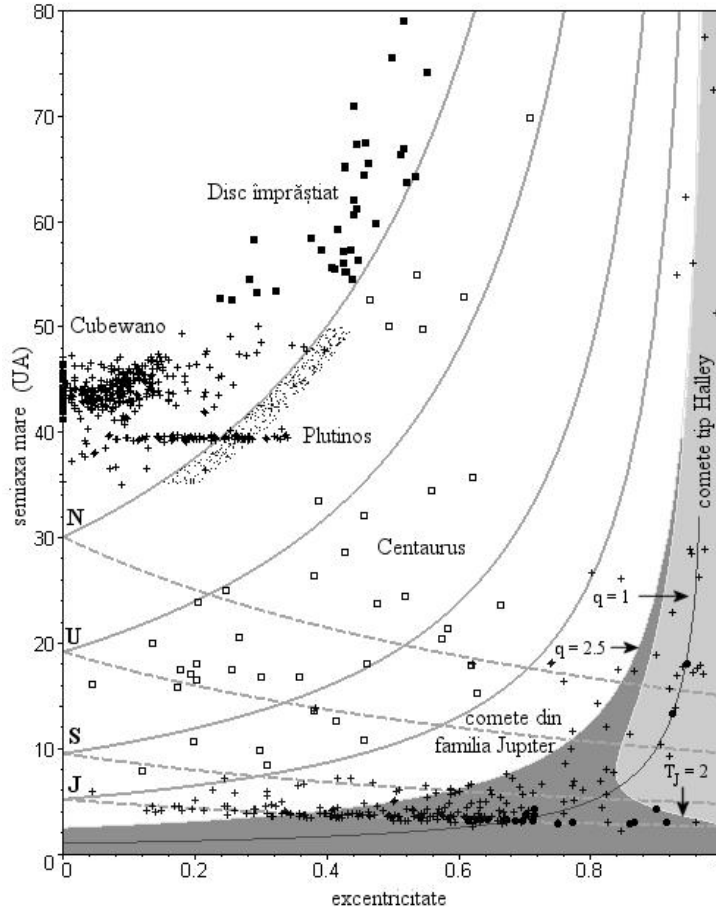


Figura 4.5. Populațiile de corpuri din sistemul solar exterior reprezentate în planul elementelor orbitale (e, a). Sunt marcate: câțiva asteroizi NEA situați pe orbite de tip cometar - prin cercuri pline, populația de comete scurt periodice (din familia lui Jupiter și de tip Halley) - prin cruciulițe, populația Centaurus - prin pătrate goale, populația trans-neptuniană (cu subpopulațiile Cubewano și Plutinos - tot prin cruciulițe, subpopulația de disc împrăștiat - prin pătrate pline), precum și o populație virtuală de corpuri cu orbite situate în vecinătatea orbitei lui Neptun (intoduse în paragraful următor) - prin puncte. De asemenea, mai sunt reprezentate contururile Tisserand corespunzătoare distanței la periheliul, respectiv la afeliul orbitei corpului, egală cu semiaxa orbitelor planetare (J-Jupiter, S-Saturn, etc) și contururile $q = 1$ UA, $q = 2.5$ UA și $T_J = 2$.

Populațiile de corpuri descrise anterior sunt reprezentate în figura 4.5, în planul elementelor orbitale (e, a), împreună cu câteva contururi Tisserand și cu contururile $q = 1$ UA, $q = 2.5$ UA și $T_J = 2$. De asemenea, pe figură sunt marcați și câțiva asteroizi NEA situați pe orbite de tip cometar.

4.2.2 Difuzia haotică a corpurilor din centura lui Kuiper spre interiorul sistemului solar

În ultimii ani asistăm la numeroase încercări de a stabili o conexiune calitativă și cantitativă între populația de corpuri din centura lui Kuiper și familia de comete a lui Jupiter [Duncan *et al.*, 1988], [Holman și Wisdom, 1993], [Duncan *et al.*, 1995]. Fenomenul de transport al acestor corpuri

poate fi privit ca un proces de difuzie prin sistemul solar exterior, datorat multiplelor apropieri strânse cu planetele gigante. Determinarea traiectoriei unui corp într-un astfel de proces dinamic este o sarcină dificilă, deoarece mișcarea sa este profund haotică și ea se poate extinde pe intervale de timp de ordinul vârstei sistemului solar. Din acest motiv, o modelare statistică a acestui fenomen pare a fi o cale rezonabilă de abordare [Berinde, 2001a], ea făcând subiectul paragrafului de față.

Descrierea procesului de difuzie

Metoda pe care o propunem are la bază o simulare de tip Monte-Carlo a traseului evolutiv al unei populații virtuale de corpuri originare în regiunile sursă trans-neptuniene, ce se presupun a expedia corpuri către planeta Neptun, printr-un proces de instabilitate dinamică slabă [Duncan *et al.*, 1995], datorat acțiunii unor rezonanțe planetare medii și seculare. Acestea au ca efect creșterea excentricității orbitelor respective, în timp ce semiaxa mare a lor rămâne aproape constantă [Holman și Wisdom, 1993]. Deci, distanța lor la periheliu se micșorează progresiv și astfel regiunea din vecinătatea orbitei lui Neptun poate fi alimentată în mod continuu cu corpuri. Acestea vor evolua apoi sub acțiunea perturbatoare a apropiierilor strânse cu Neptun și ulterior cu celelalte planete gigante, fiind împrăștiate în întreg sistemul solar și în particular către Soare. Simulările numerice arată că între orbitele planetelor gigante există foarte puține orbite stabile [Gladman și Duncan, 1990], încât este de așteptat ca timpul dinamic de viață al acestor corpuri tranzitorii să fie relativ scurt, înainte ca ele să fie expulzate pe orbite hiperbolice sau de tip zgârie-Soare, s-au să fie distruse prin coliziuni cu una din planetele gigante.

Modelul de difuzie propus se bazează exclusiv pe o evoluție dinamică sub acțiunea apropiierilor strânse planetare, acestea fiind modelate în cadrul formalismului geometric a lui Öpik. Harta completă a modificării orbitale, dezvoltată în paragraful 2.2.4 al lucrării, ne permite determinarea acestei evoluții dinamice cu ajutorul unor formule analitice. Între două apropieri strânse consecutive, orbitele sunt considerate kepleriene față de sistemul de referință heliocentric, însă animate de o variație seculară a longitudinii nodului orbital Ω și al periheliului orbitei ω , astfel încât $\omega = \omega_0 + d\omega t$ și $\Omega = \Omega_0 - d\Omega t$. Ratele de precesie $d\omega$ și $d\Omega$ sunt modificate arbitrar după fiecare apropiere strânsă, într-un interval de 0.01 – 0.1 ($^\circ$ /secol). Introducerea artificială a acestor mișcări de precesie face ca evoluția dinamică a orbitelor să fie mai aproape de realitate și în acord cu rezultatele unor integrări numerice [Levison și Duncan, 1994].

Constrânși fiind de ipotezele simplificatoare (i) - (v) din cadrul formalismului lui Öpik, cele patru planete gigante sunt considerate că evoluează pe orbite circulare și coplanare, iar o apropiere strânsă cu una dintre ele poate avea loc doar în preajma unuia din nodurile orbitale ale orbitei corpului. Se consideră că o apropiere strânsă are loc ori de câte ori $1 - e < a_p/a < 1 + e$ și $b < s_p$, notațiile fiind cele introduse în paragraful 2.2. De asemenea, impunând condițiile discutate la sfârșitul paragrafului respectiv, apropiierile strânse ce au loc departe de nodul orbital, pe care le caracterizăm aici prin $|d| > 0.1a_p$ sau $|d_p| > 0.1a_p$, precum și cele pentru care traiectoria neperturbată a corpului în vecinătatea nodului orbital este departe de aproximația rectilinară, alegând $d\alpha > 10^\circ$, sunt ignorate. Din acest motiv, modelul dinamic construit aici va genera orbite zgârie-Soare (pentru care s-a arătat că $d\alpha \gg 0$) la o rată mult mai redusă decât rezultă în urma integrărilor numerice. În orice caz, se pare că mecanismul cel mai eficient de producere a acestui tip de orbite este rezonanța Kozai acționând la înclinații orbitale mari [Bailey *et al.*, 1992]. Numărul corpurilor care se înscriu la un moment dat pe astfel de orbite este totuși redus, încât ignorarea lor nu modifică semnificativ rezultatele cu caracter statistic ce urmează a fi obținute.

Condiții inițiale

Determinarea regiunilor sursă din spațiul trans-neptunian rămâne încă o problemă deschisă. Se pare că cea mai eficientă regiune în expedierea de corpuri către Neptun se situează între limitele $35 < a < 50$ UA. Corpurile de aici sunt expediate preponderent la înclinații orbitale cuprinse între $0^\circ < I < 25^\circ$ pentru $a < 40$ UA, și la înclinații orbitale $0^\circ < I < 15^\circ$ pentru $a > 40$ UA [Duncan *et al.*, 1995].

Deoarece modelul dinamic construit este bazat exclusiv pe acțiunea perturbatoare a apropiierilor strânse, va trebui să presupunem că populația inițială de corpuri este deja plasată în vecinătatea orbitei lui Neptun. Astfel, elementele orbitale inițiale ale acestor corpuri se obțin în modul următor: se generează aleatoriu parametri a și I în intervalele mai sus menționate, iar apoi distanța la periheliu q în intervalul 28 – 30 UA, de unde va rezulta $e = 1 - q/a$. Elementele orbitale unghiulare Ω , ω și M vor avea valori arbitrare pe cercul trigonometric. O imagine a acestei populații virtuale de corpuri este prezentată în figura 4.5 prin puncte.

Acțiunea perturbatoare a planetelor gigante va determina migrația haotică a acestei populații de corpuri de-a lungul conturilor Tisserand, de la o planetă la alta, până în momentul când una din următoarele stări finale de evoluție va avea loc: înscrierea pe o orbită hiperbolică ($e > 1$), sau pe o orbită “aproape” parabolică, având afeliul situat în mediul interstelar ($a > 10^4$ UA), sau pe o orbită de tip zgârie-Soare ($q < 2R_\odot$), sau prin coliziunea cu o planetă gigant ($b \leq r_{imp}$).

Un exemplu de traseu evolutiv selectat din populația inițială simulată este prezentat în figura 4.6. Timpul dinamic de viață al corpului în cauză este de 1.3×10^8 ani, acesta sfârșind în cele din urmă printr-o coliziune cu planeta Jupiter.

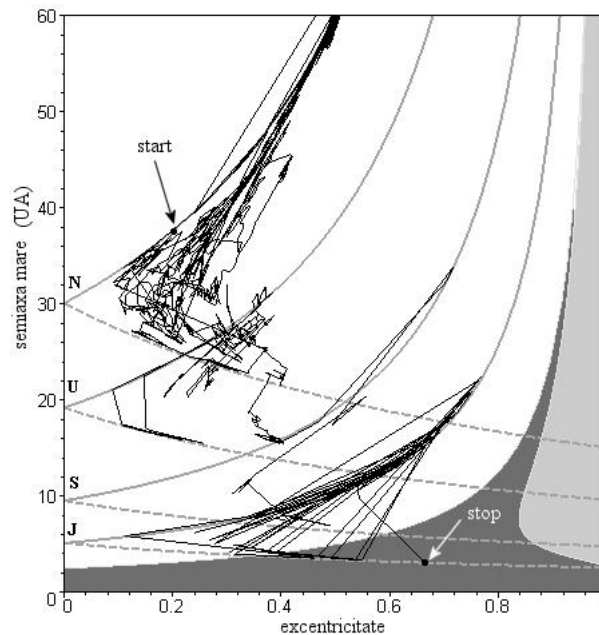


Figura 4.6. Traseul evolutiv prin sistemul solar exterior al unui corp originar în centura lui Kuiper. Sunt prezentate conturile Tisserand corespunzătoare distanței la periheliu, respectiv la afeliul orbitei corpului, egală cu semiaxa orbitelor planetare (J-Jupiter, S-Saturn, etc).

Ca și în cazul integrărilor numerice pe termen lung, modelul dinamic propus aici nu va oferi o imagine deterministă a traseelor evolutive individuale, ci doar una cu valoare statistică pentru întreaga populație simulată. Avantajul modelului este însă acela de a se baza pe un algoritm analitic de mare viteză. Acest lucru a permis simularea unui număr de 4000 de corpuri test pe întreg timpul dinamic de viață al acestora, rezultatele statistice obținute fiind prezentate în cele

ce urmează.

Rezultate statistice

Fiecare corp simulat a realizat, în medie, între 200 și 700 apropieri strânse planetare, unii ajungând însă până la 3000. Aceste apropieri strânse au avut loc preponderent în vecinătatea orbitei lui Neptun și, ulterior, a orbitei lui Uranus, deoarece corpurile au petrecut un timp mai îndelungat în regiunile respective. Figura 4.7 prezintă distribuția cumulată a numărului de apropieri strânse în planul elementelor orbitale (e, a), pentru întreaga populație de corpuri simulată. Nuanțelor mai întunecate le corespund un număr mai mare. Se remarcă frecvența mare a apropiierilor strânse de-a lungul conturilor Tisserand corespunzătoare distanței la periheliul, respectiv la afeliul orbitei corpului, egală cu semiaxa orbitelor planetare.

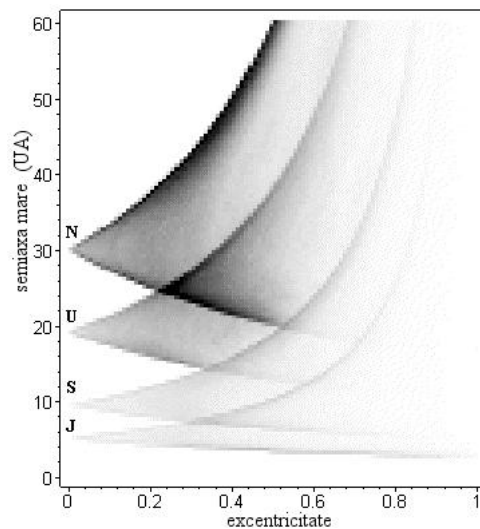


Figura 4.7. O compoziție în nuanțe de gri, prezentând distribuția cumulată a numărului de apropieri strânse în planul elementelor orbitale (e, a), pentru întreaga populație de corpuri simulată. Nuanțelor mai întunecate le corespund numere mai mari.

Data fiind distribuția inițială a înclinației lor orbitale, sub 0.1% din corpuri ajung la un moment dat pe orbite retrograde, majoritatea orbitelor fiind menținute la înclinații orbitale mici ($I \approx 10^\circ$). Acest lucru este în concordanță cu distribuția orbitală a cometelor scurt periodice observate, confirmându-se astfel ipoteza formării lor în centura lui Kuiper.

Stările evolutive finale sunt prezentate în tabelul următor. În plus, doar 0.1% din corpuri ajung pe orbite de tip zgârie-Soare și un singur corp din 4000 a supraviețuit pe durata vârstei sistemului solar (4.5×10^9 ani).

Aproximativ 42% din numărul total de corpuri ajung la un moment dat în regiunea cometary activă ($q < 2.5$ UA) pe orbite de tipul cometelor din familia lui Jupiter. Această valoare este în bună concordanță cu valoarea de 34%, adoptată în lucrarea [Duncan *et al.*, 1995]. În schimb, doar 1% dintre corpuri ajung în categoria cometelor de tip Halley. Acest lucru sugerează faptul că regiunea principală de formare a acestor corpuri rămâne norul sferic al lui Oort.

Așa cum se remarcă pe figura 4.8, timpul dinamic de viață mediu al acestor corpuri în zonele de tranziție din sistemul solar exterior este în jur de 10^8 ani, tot în acest răstimp corpurile ajungând eventual și în regiunea cometary activă, unde timpul dinamic de viață al lor este cuprins între $10^3 - 10^5$ ani.

Concluzionăm că procesul de difuzie haotică din sistemul solar exterior permite corpurilor originare din centura lui Kuiper să migreze pe întreg cuprinsul său și, în particular, către orbita

Planeta	Coliziune	Orbită hiperbolică sau parabolică
Jupiter	15.5	27.0
Saturn	4.1	25.0
Uranus	1.1	5.9
Neptun	1.9	19.6
-total-	22.5 %	77.4 %

Tabelul 4.1. Procentul stărilor evolutive finale, în funcție de planeta gigant responsabilă de producerea lor.

Pământului, sub formă de comete scurt periodice. În relativ scurt timp, datorită pierderii materialului volatil, nucleele stinse ale acestora vor îmbogăți populația de asteroizi NEA.

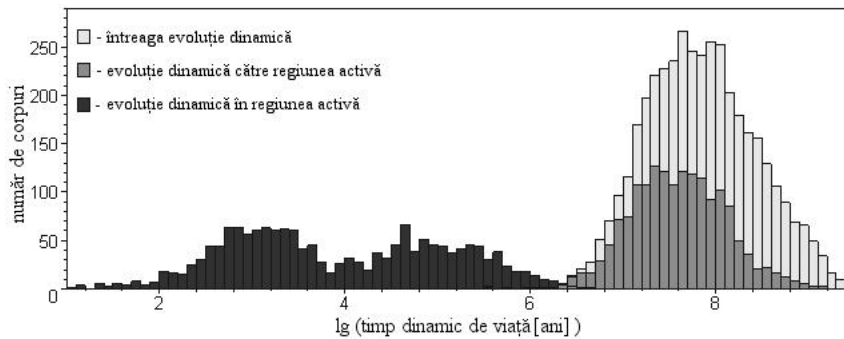


Figura 4.8. Distribuția numărului de corpuri simulate în funcție de timpul dinamic de viață total al acestora, apoi în funcție de timpul dinamic necesar pentru a intra în regiunea activă, respectiv timpul dinamic de viață în această regiune.

Capitolul 5

Metode de estimare a probabilității de impact cu Pământul

Chiar dacă problemele legate de originea și evoluția în spațiu a asteroizilor NEA, discutate în paragrafele anterioare, continuă să fascineze și să ridice numeroase semne de întrebare în rândul comunității astronomice, problemele legate de posibilitatea unui impact cu planeta noastră (sau cu oricare alta) au devenit în ultima vreme vârful de lance în studiul acestor corpuri cerești. Fără îndoială, acest lucru se datorează în mare măsură îngrijorării manifestată față de acest fenomen, ce ar putea avea consecințe dintre cele mai grave pentru echilibrul biosferei terestre și perpetuarea speciei umane pe planeta noastră.

Din acest motiv, vom dedica capitolul de față studiului fenomenului de impact, prin parcurgerea celor mai importante metode actuale de estimare a probabilității de impact cu Pământul, spre final prezentând și câteva rezultate teoretice legate de estimarea consecințelor distructive ale sale, la nivelul scoarței terestre.

5.1 Probabilități medii de impact

Probabilitățile medii de impact sunt evaluate pe baza unui model matematic simplificat de evoluție dinamică (numeric sau analitic), ce se presupune a fi consistent din punct de vedere statistic pe intervale mari de timp. Pe aceste intervale, anumiți parametri dinamici ai asteroidului sunt considerați că înregistrează o variabilitate aleatoare. Probabilitățile de impact estimate în acest fel vor avea semnificația unor probabilități medii pe intervalul de timp considerat.

5.1.1 Probabilități extrapolate din frecvența apropiierilor strânse

Modelul matematic pe care se construiește această metodă are la bază ipoteza distribuției aleatoare a pozițiilor asteroidului în vecinătatea orbitei terestre, presupunere valabilă pe intervale de timp mai mari decât perioadele de precesie orbitală a asteroidului. Această distribuție aleatoare poate fi descrisă printr-o “densitate spațială” constantă (s) a pozițiilor asteroidului în unitatea de volum de spațiu. Presupunem că această densitate spațială rămâne constantă și atunci când raportăm mișcarea asteroidului la planeta față de care intenționăm să evaluăm probabilitatea de impact. Dacă \bar{u} reprezintă mărimea vitezei medii planetocentrice a asteroidului, produsul $s \cdot \bar{u}$ are semnificația fluxului trecerilor prin unitatea de arie normală la vectorul viteză. De aici rezultă imediat că numărul $N(D)$ al apropiierilor strânse planetare, ce au loc la o distanță mai mică sau egală cu D de planetă, în intervalul de timp τ , va fi $N(D) = \pi D^2 s \bar{u} \tau$. Dacă vom ține seama acum și de efectul atracției gravitaționale a planetei, distanța D se va reduce prin factorul f de convergență gravitațională, dat de expresia (2.82), încât pentru noua distanță $d = D/f$, vom avea evaluarea

$$N(d) = \pi d^2 \left[1 + \frac{R_p}{d} \left(\frac{v_{par}}{\bar{u}} \right)^2 \right] s\bar{u}\tau, \quad (5.1)$$

unde R_p notează raza planetei, iar v_{par} este viteza parabolică la suprafața sa.

Dacă $N_c = N(R_p)$ notează numărul (fracțional al) coliziunilor cu planeta ce au loc în intervalul τ (număr ce va avea și semnificația probabilității medii de impact), vom evalua următorul raport

$$\frac{N(d)}{N_c} = \left(\frac{d}{R_p} \right)^2 \left[\frac{1 + \frac{R_p}{d} \left(\frac{v_{par}}{\bar{u}} \right)^2}{1 + \left(\frac{v_{par}}{\bar{u}} \right)^2} \right], \quad (5.2)$$

ce permite determinarea următoarei expresii aproximative pentru probabilitatea medie de impact, prin neglijarea puterilor superioare lui 2 ale fracției subunitare R_p/d [Sekanina și Yeomans, 1984]

$$N_c \approx N(d) \left[1 + \left(\frac{v_{par}}{\bar{u}} \right)^2 \right] \left(\frac{R_p}{d} \right)^2. \quad (5.3)$$

Astfel, evaluând numărul apropiierilor strânse până la distanța $d \gg R_p$ de planetă, vom putea extrapola apoi, cu ajutorul formulei anterioare, valoarea probabilității de impact. Această aproximație este bună în cazul când influența gravitațională a planetei este neglijabilă, adică pentru planetele de tip terestru [Nakamura și Kurahashi, 1998] și atunci când viteza planetocentrică a asteroidului este suficient de mare, încât raportul v_{par}/\bar{u} să aibă cel mult ordinul unității.

Procedeul practic de determinare a probabilității de impact este următorul: în urma unei integrări numerice a mișcării asteroidului, efectuată pe un interval de timp suficient de extins, se vor monitoriza toate apropiierile strânse cu planeta de referință și se va reprezenta apoi pe o scară logaritmică în ambele axe numărul cumulat al apropiierilor în funcție de distanța minimă planetocentrică. În practică se va considera o reprezentare discretă pe intervale de lungime egală pe scara logaritmică (figura 5.1). Prin extrapolarea (ajustarea) acestor valori până la distanța de impact R_p cu planeta, cu dreapta de ecuație

$$\mathbf{D}: \quad \lg N(d) = A + 2 \lg \left(\frac{d}{R_p} \right) \quad (5.4)$$

scrisă în variabila $\lg d$, rezultă valoarea cea mai probabilă pentru parametrul real A și valoarea probabilității medii de impact $N_c = 10^A$.

Așa cum menționam anterior, extrapolarea cu o dreaptă este o aproximație bună doar pentru anumite cazuri, mai mult, în practică dependența pătratică prezisă de modelul teoretic $N(d) \sim d^2$ este doar aproximativ verificată, ea trebuind înlocuită cu una mai generală, $N(d) \sim d^{A_2}$. Acestea fiind spuse, vom rafina acum metoda de extrapolare a probabilității medii de impact, considerând următoarea curbă dedusă din expresia (5.2)

$$\mathbf{C}: \quad \lg N(d) = A_1 + A_2 \lg \left(\frac{d}{R_p} \right) + \lg \left[1 + \left(\frac{v_{par}}{\bar{u}} \right)^2 10^{-\lg \left(\frac{d}{R_p} \right)} \right], \quad (5.5)$$

scrisă în variabila $\lg d$ și cu parametri de ajustare A_1 și A_2 . În urma procedurii de extrapolare cu această curbă, rezultă următoarea estimare pentru probabilitatea de impact

$$N_c = 10^{A_1} \left[1 + \left(\frac{v_{par}}{\bar{u}} \right)^2 \right], \quad (5.6)$$

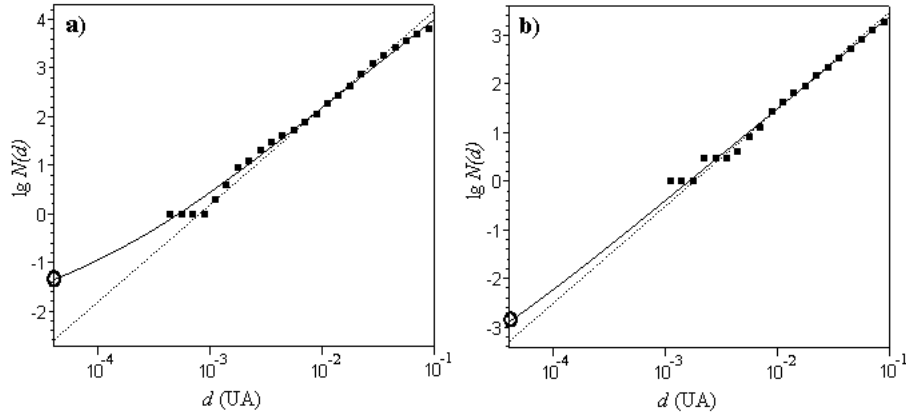


Figura 5.1. Extrapolarea probabilității medii de impact cu Pământul a asteroizilor a) 2000 SG₃₄₄ și b) 1999 AN₁₀. Linia punctată marchează extrapolarea liniară iar linia continuă extrapolarea pe curbă.

cu va avea o valoare mai mare decât cea estimată în cadrul extrapolării liniare, datorită efectului atracției gravitaționale a planetei.

În continuare exemplificăm metoda descrisă, prin estimarea probabilității medii de impact cu Pământul a asteroizilor 2000 SG₃₄₄ și 1999 AN₁₀. Figura 5.1 prezintă rezultatele calculului, atât prin extrapolarea liniară (linia punctată) cât și pe curbă (linia continuă) a numărului cumulat al apropiierilor strânse cu Pământul, pe un interval de 100.000 de ani. Valorile extrapolate ale probabilităților de impact (marcate pe figură printr-un cerc ce corespunde distanței de impact $R_p \approx 4.2 \times 10^{-5}$ UA) sunt $N_c \approx 4.4 \times 10^{-2}$ (sau 4.4×10^{-7} /an) pentru primul asteroid și $N_c \approx 1.3 \times 10^{-3}$ (sau 1.3×10^{-8} /an) pentru cel de-al doilea. În primul caz se remarcă o diferență semnificativă între cele două tipuri de extrapolări, datorată vitezei planetocentrice mici a asteroidului, $\bar{u} \approx 1.9$ km/s, comparativ cu viteza parabolică la suprafața planetei, $v_{par} \approx 11.2$ km/s, ce duce la accentuarea influenței gravitaționale planetare.

Metoda poate fi folosită cu succes și la estimarea probabilității medii de impact a unei întregi populații de obiecte, prin cumularea tuturor apropiierilor strânse planetare [Sekanina și Yeomans, 1984].

5.1.2 Probabilități mediate de-a lungul orbitei

În acest paragraf vom deduce o expresie a probabilității medii de impact dintre două corpuri arbitrare cu orbite heliocentrice, pe baza unei teorii analoge cu teoria cinetică a gazelor [Steel și Baggaley, 1985].

Vom nota cu indicele “1” elementele asociate primului corp, iar cu indicele “2” elementele asociate celui de-al doilea. Probabilitatea căutată va fi o funcție de elementele orbitale (a_1, e_1, I_1) și (a_2, e_2, I_2) și de doi parametri fizici, masele m_1 și m_2 (neglijabile în raport cu masa centrală) și razele R_1 și R_2 ale celor două corpuri. Argumentele periheliilor și longitudinile nodurilor orbitale se vor considera că înregistrează o variație aleatoare, presupunere valabilă pe intervale de timp mult mai mari decât perioadele de precesie asociate lor.

Considerăm volumul de spațiu în care este posibil ca cele două corpuri să ocupe simultan aceeași poziție și îl împărțim în elemente infinitezimale de volum $\delta\nu$. Presupunând că în interiorul fiecărui element cele două corpuri ocupă poziții aleatoare (precum moleculele unui gaz), fluxul asociat trecerii simultane a celor două corpuri prin elementul de volum $\delta\nu$, flux raportat la unul dintre corpuri, va fi $F = s_1 s_2 u$, unde s_1 și s_2 notează “densitățile spațiale” medii ale celor două corpuri în elementul respectiv de volum, iar u este viteza relativă a lor în $\delta\nu$.

Numărul impacturilor între cele două corpuri, având secțiunea eficace de coliziune σ , în timpul τ , va fi $n = s_1 s_2 u \sigma \tau$ și deci, probabilitatea de impact pe unitatea de timp, în elementul de volum $\delta\nu$, va fi dată de

$$p = \frac{n}{\tau} = s_1 s_2 u \sigma. \quad (5.7)$$

Probabilitatea de impact în întreg spațiul accesibil celor două corpuri va fi atunci

$$P = \int_{\mathcal{V}} s_1 s_2 u \sigma d\nu. \quad (5.8)$$

Această integrală poate fi evaluată numeric, considerând elementele de volum suficient de mici pentru ca mărimile ce intervin sub integrală să nu varieze semnificativ. Le putem astfel aproxima cu valorile lor medii în elementul de volum respectiv, și integrala (5.8) se transformă în

$$P = \sum_j \bar{s}_{1j} \bar{s}_{2j} \bar{u}_j \bar{\sigma}_j \delta\nu_j. \quad (5.9)$$

În cele ce urmează vom determina expresiile analitice ale tuturor mărimilor ce intervin în această relație.

Evaluarea densității spațiale

Deoarece argumentul periheliului înregistrează o variație aleatoare, este suficient să parametrizăm spațiul după două coordonate, distanța r la corpul central și latitudinea ecliptică β . Densitatea spațială a oricăruia dintre corpuri va fi o funcție de acești doi parametri, mai mult, va fi separabilă după aceștia, $s(r, \beta) = \rho(r) \psi(\beta)$. ρ are semnificația densității spațiale la distanța r de corpul central, mediată după toate latitudinile, iar ψ semnifică raportul dintre densitatea spațială la latitudinea ecliptică β și densitatea spațială mediată după toate latitudinile. ρ va depinde, de asemenea, de mărimea și forma orbitei, adică de a și e (sau similar, de distanțele la periheliu și afeliu orbitei, q și Q , iar ψ va depinde de înclinația orbitei I . În continuare vom evalua separat expresiile fiecăreia din aceste mărimi.

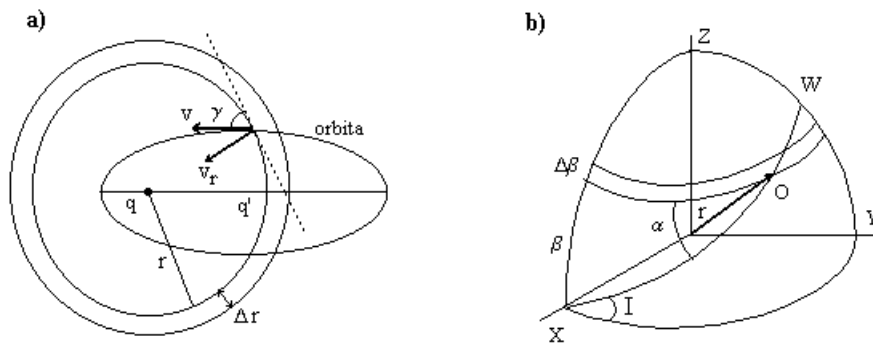


Figura 5.2. Calculul variației densității spațiale relativ la: **a)** distanța r la corpul central; **b)** latitudinea ecliptică β .

În figura 5.2a considerăm un înveliș sferic de grosime Δr situat la distanța r de corpul central, astfel încât $q \leq r \leq Q$. Dacă Δt este timpul petrecut de corp în acest înveliș, iar T este perioada sa orbitală, atunci avem

$$\rho = \frac{\Delta t}{T} \cdot \frac{1}{\delta\nu_r}, \quad (5.10)$$

pe unitatea de volum $\delta\nu_r = 4\pi r^2 \Delta r$. Timpul Δt este dat de $\Delta t = 2\Delta r/v_r$, unde v_r este componenta radială a vitezei heliocentrice v a corpului, acesta trecând de două ori prin învelișul respectiv pe parcursul unei perioade orbitale. Viteza radială $v_r = v \sin \gamma$ este considerată pozitivă spre interior încât, de la afeliu spre periheliu avem $0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$, iar de la periheliu spre afeliu $270^\circ \leq \gamma \leq 360^\circ$ (figura 5.2a).

Din conservarea momentului cinetic, evaluat în trei puncte ale orbitei: la periheliu, la afeliu și la distanța r de centru, deducem

$$q \left[G \left(\frac{2}{q} - \frac{1}{a} \right) \right]^{1/2} = Q \left[G \left(\frac{2}{Q} - \frac{1}{a} \right) \right]^{1/2} = r \left[G \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \right]^{1/2} \cos \gamma, \quad (5.11)$$

unde s-a folosit pentru viteza heliocentrică v expresia (2.29). Din aceste egalități, precum și din faptul că $a = (q + Q)/2$, rezultă o expresie pentru unghiul γ

$$\cos^2 \gamma = \frac{qQ}{r(2a - r)}, \quad (5.12)$$

și astfel

$$v_r = \left[G \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \left(1 - \frac{qQ}{r(2a - r)} \right) \right]^{1/2}. \quad (5.13)$$

Înlocuind $T = 2\pi a^{3/2}/\sqrt{G}$ și celelalte mărimi în ecuația (5.10), deducem

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi^2 r a \sqrt{(r - q)(Q - r)}}. \quad (5.14)$$

Aceasta este probabilitatea de a găsi obiectul într-un înveliș sferic de volum unitate situat la distanța r de corpul central, mediată după toate latitudinile. Când $r < q$ sau $r > Q$ avem $\rho(r) = 0$. Cazurile limită $r \rightarrow q$ și $r \rightarrow Q$ necesită o analiză specială și vor fi tratate separat.

Considerăm acum corpul situat în învelișul sferic de grosime Δr la distanța r de centru. Noua cerință este de a afla probabilitatea de a găsi corpul într-o bandă cuprinsă între latitudinile ecliptice β și $\beta + \Delta\beta$. Referindu-ne la figura 5.2b, planul XY este planul ecliptic, iar punctul O de coordonate (r, β) notează poziția corpului (considerat staționar în orbita sa). În urma fenomenului de precesie orbitală, acesta va descrie o orbită imaginară circulară de înclinație I (aceeași ca și cea a orbitei reale), parcurgând pe figură traiectoria WOX .

Dacă argumentul periheliului precesionează cu viteza unghiulară constantă $\dot{\omega}$, atunci perioada acestei orbite imaginare va fi $T' = 2\pi/\dot{\omega}$. Timpul necesar traversării benzii de grosime $\Delta\beta$ este $\Delta t' = (\Delta\beta/\dot{\omega}) \sin \alpha$, unde α este unghiul dintre traiectoria imaginară și paralela de latitudine β . Deoarece corpul traversează această latitudine de două ori, fracțiunea de timp petrecută în banda de grosime $\Delta\beta$ va fi

$$\frac{2\Delta t'}{T'} = \frac{\Delta\beta}{\pi \sin \alpha}. \quad (5.15)$$

Densitatea spațială după latitudinea ecliptică β , în învelișul sferic considerat, are expresia

$$\psi(\beta) = \frac{2\Delta t'}{T'} \cdot \frac{\delta\nu_r}{\delta\nu}, \quad (5.16)$$

fiind raportată la noul element de volum $\delta\nu = 2\pi r^2 \cos \beta \Delta r \Delta\beta$, definit de banda de grosime $\Delta\beta$ în învelișul sferic de grosime Δr .

Din aceeași figură (5.2b) deducem egalitatea $\cos I = \cos \alpha \cos \beta$ de unde rezultă $\sin \alpha \cos \beta = [\sin^2 I - \sin^2 \beta]^{1/2}$. Făcând înlocuirile de rigoare în expresia (5.16), obținem

$$\psi(\beta) = \frac{2}{\pi \sqrt{\sin^2 I - \sin^2 \beta}}. \quad (5.17)$$

Pentru $|\beta| > I$ vom avea $\psi(\beta) = 0$. Cazurile limită $\beta \rightarrow \pm I$ vor fi tratate separat.

Relațiile (5.14) și (5.17) ne conduc la expresia densității spațiale la distanța r de centru și la latitudinea ecliptică β

$$s(r, \beta) = \frac{1}{2\pi^3 r a \sqrt{(\sin^2 I - \sin^2 \beta)(r - q)(Q - r)}}. \quad (5.18)$$

Medierea densității spațiale

În procesul de aproximare a integralei (5.8) cu suma (5.9), va trebui să evaluăm valoarea medie a expresiei (5.18) în unitatea de volum $\delta\nu = 2\pi r^2 \cos \beta \Delta r \Delta \beta$, prin

$$\bar{s}(r, r', \beta, \beta') = \frac{1}{2\pi^3 \bar{r} a \sqrt{(\sin^2 I - \sin^2 \bar{\beta})(\bar{r} - q)(Q - \bar{r})}}, \quad (5.19)$$

unde $r' = r + \Delta r$, $\beta' = \beta + \Delta \beta$, $\bar{r} = (r + r')/2$ și $\bar{\beta} = (\beta + \beta')/2$. Această formulă este aplicabilă în cazurile $q \leq r < r' \leq Q$ și $-I \leq \beta < \beta' \leq I$. Când ambii parametri (r, r') sau (β, β') sunt înafara intervalelor sus menționate, densitatea spațială \bar{s} este nulă. Pe de altă parte, este posibil ca unul dintre parametri să fie situat în interiorul intervalului, iar celălalt să fie în exterior. În aceste cazuri limită medierea anterioară nu este valabilă, ea necesitând un tratament special, după cum vom arăta în cele ce urmează.

Expresia densității spațiale medii pe unitatea de volum se mai scrie

$$\bar{s}(r, r', \beta, \beta') = \frac{\int_{\mathcal{V}} s \, d\nu}{\int_{\mathcal{V}} d\nu} = \frac{\int_r^{r'} \int_{\beta}^{\beta'} \rho(r) \psi(\beta) r^2 \cos \beta \, dr \, d\beta}{\int_r^{r'} \int_{\beta}^{\beta'} r^2 \cos \beta \, dr \, d\beta} = \bar{\rho}(r, r') \cdot \bar{\psi}(\beta, \beta'), \quad (5.20)$$

unde

$$\bar{\rho}(r, r') = \int_r^{r'} \rho(r) r^2 \, dr \bigg/ \int_r^{r'} r^2 \, dr \quad (5.21)$$

semnifică densitatea spațială medie calculată între r și r' și mediată după toate latitudinile, iar

$$\bar{\psi}(\beta, \beta') = \int_{\beta}^{\beta'} \psi(\beta) \cos \beta \, d\beta \bigg/ \int_{\beta}^{\beta'} \cos \beta \, d\beta \quad (5.22)$$

semnifică raportul dintre densitatea spațială medie calculată între β și β' și densitatea spațială mediată după toate latitudinile.

Considerăm grosimea învelișului sferic Δr suficient de mică, încât distanța radială la oricare punct din interiorul său să fie bine aproximată prin \bar{r} . În această situație expresia (5.21) se simplifică în

$$\bar{\rho}(r, r') = \frac{1}{\Delta r} \int_r^{r'} \rho(r) \, dr = \frac{1}{4\pi^2 a \bar{r} \Delta r} \int_r^{r'} \frac{dr}{\sqrt{(r - q)(Q - r)}}, \quad (5.23)$$

cu soluția

$$\bar{\rho}(r, r') = \frac{1}{4\pi^2 a \bar{r} \Delta r} \left[\arcsin \left(\frac{2r' - 2a}{Q - q} \right) - \arcsin \left(\frac{2r - 2a}{Q - q} \right) \right], \quad (5.24)$$

valabilă în cazul $q \leq r < r' \leq Q$. În cele două cazuri limită $r \lesssim q$, respectiv $r' \gtrsim Q$, al doilea termen din paranteza dreaptă (cu semn cu tot) se va înlocui cu $\pi/2$ (punând $r = q$), respectiv primul termen din paranteza dreaptă se va înlocui cu $\pi/2$ (punând $r' = Q$). În această manieră singularitățile legate de evaluarea expresiei (5.14) în vecinătatea punctelor q și Q au fost înlăturate.

În mod similar, relația (5.22) se scrie astfel

$$\bar{\psi}(\beta, \beta') = \frac{1}{(\sin \beta' - \sin \beta)} \int_{\beta}^{\beta'} \frac{2 \cos \beta}{\pi \sqrt{\sin^2 I - \sin^2 \beta}} d\beta, \quad (5.25)$$

cu soluția

$$\bar{\psi}(\beta, \beta') = \frac{2}{\pi(\sin \beta' - \sin \beta)} \left[\arcsin \left(\frac{\sin \beta'}{\sin I} \right) - \arcsin \left(\frac{\sin \beta}{\sin I} \right) \right], \quad (5.26)$$

valabilă pentru $-I \leq \beta < \beta' \leq I$. Cazurile limită $\beta \lesssim -I$, respectiv $\beta' \gtrsim I$, se vor trata în mod analog, înlocuind termenul corespunzător din paranteza dreaptă a egalității (5.26) cu valoarea $\pi/2$.

Relațiile (5.24) și (5.26) conduc la expresia finală

$$\bar{s}(r, r', \beta, \beta') = \frac{1}{2\pi^3 a \bar{r} \Delta r (\sin \beta' - \sin \beta)} \left[\arcsin \left(\frac{2r' - 2a}{Q - q} \right) - \arcsin \left(\frac{2r - 2a}{Q - q} \right) \right] \cdot \left[\arcsin \left(\frac{\sin \beta'}{\sin I} \right) - \arcsin \left(\frac{\sin \beta}{\sin I} \right) \right], \quad (5.27)$$

cu ajutorul căreia se va evalua densitatea spațială medie pe unitatea de volum în preajma punctelor de singularitate a relației (5.19). În acest mod toate cazurile posibile au fost epuizate. De precizat că densitatea spațială medie, \bar{s} , ia valori extreme (finite) tocmai în aceste puncte de singularitate.

Evaluarea vitezei relative și a suprafeței efective de coliziune

Pentru două corpuri cu orbite arbitrare ce au un punct comun, viteza relativă de întâlnire se obține după cum urmează

$$u^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos \theta, \quad (5.28)$$

unde v_1 și v_2 sunt vitezele heliocentrice ale celor două corpuri, iar θ este unghiul de întâlnire. În figura 5.3 este reprezentat un sistem de coordonate rectangular CXYZ, centrat în punctul de întâlnire al celor două corpuri C, având planul XCY perpendicular pe învelișul sferic din figura 5.2a, iar planul YCZ tangent la suprafața exterioară a acestuia. Are loc egalitatea trigonometrică

$$\cos \theta = \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \cos (\alpha_1 - \alpha_2), \quad (5.29)$$

notațiile fiind cele din figură. Valorile $\cos \gamma_1$ și $\cos \gamma_2$ sunt date de ecuația (4.12), în ambele cazuri alegându-se soluția pozitivă (deoarece $-90^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$). În schimb, valorile $\sin \gamma_1$ și $\sin \gamma_2$ pot avea ambele semne. În ceea ce privește valorile lui α_1 și α_2 , din figura 5.2b avem relația $\cos \alpha = \cos I / \cos \beta$. Cantitatea $\cos (\alpha_1 - \alpha_2)$ poate avea, de asemenea, ambele semne deoarece $-90^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$. Obținem astfel patru valori distincte pentru unghiul θ , date de

$$\cos \theta = \pm \sin \gamma_1 \sin \gamma_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \cdot \frac{\cos I_1 \cos I_2 \pm \sqrt{(\sin^2 I_1 - \sin^2 \beta)(\sin^2 I_2 - \sin^2 \beta)}}{\cos^2 \beta}. \quad (5.30)$$

Din ecuația (5.28) se vor obține patru valori posibile ale vitezei de întâlnire, a căror medie aritmetică va indica viteza medie căutată.

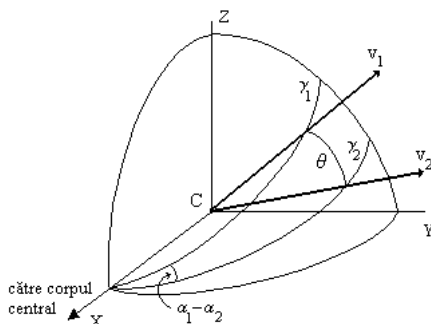


Figura 5.3. Calculul unghiului de întâlnire a două corpuri în coliziune

Ultimul termen de determinat este secțiunea eficace de coliziune σ . Dacă (R_1, R_2) sunt razele celor două corpuri, atunci $\pi(R_1 + R_2)^2$ este secțiunea geometrică de coliziune. Prezența câmpului gravitic comun duce la extinderea acestei suprafețe cu factorul f de convergență gravitațională (relația 2.81), încât secțiunea eficace de coliziune devine

$$\sigma = \pi(R_1 + R_2)^2 f = \pi(R_1 + R_2)^2 \left[1 + \frac{2G(m_1 + m_2)}{(R_1 + R_2)u^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.31)$$

Toți termenii din ecuația (5.9) sunt deja evaluați. Densitățile spațiale medii ale celor două corpuri, \bar{s}_1 și \bar{s}_2 , sunt date de (5.19) sau (5.27), după cum sumarea se face în vecinătatea punctelor singulare sau nu. Viteza medie se obține din (5.28), folosind valorile medii \bar{r} și $\bar{\beta}$. Secțiunea eficace medie de coliziune $\bar{\sigma}$ rezultă din (5.31), folosindu-ne de valoarea vitezei medii, iar elementul de volum în raport cu care se face integrarea este $\delta\nu = 2\pi\bar{r}^2 \cos \bar{\beta} \Delta r \Delta \beta$. Considerând cel puțin 100 de pași de integrare pe direcția radială și 50 de pași de-a lungul latitudinii ecliptice (de obicei $\Delta r \leq 0.01 r$ și $\Delta \beta \leq 3^\circ$), se va obține o precizie satisfăcătoare în determinarea probabilității căutate [Steel și Baggaley, 1985].

Caz particular: problema restrânsă circulară a celor trei corpuri

Pentru determinarea probabilității de impact cu Pământul a asteroizilor NEA, este suficient să exploatăm următorul caz particular căruia i se poate formula o soluție analitică, și anume când unul dintre corpuri este o planetă situată pe o orbită circulară.

Notăm cu a_p raza orbitei planetare și considerăm planul acesteia ca plan de referință pentru sistemul de coordonate din figura 5.2b. Fie mărimile $r = a_p - \Delta r/2$, $r' = a_p + \Delta r/2$, $\beta = -\Delta\beta/2$ și $\beta' = \Delta\beta/2$, încât $\Delta\nu = 2\pi a_p^2 \Delta r \Delta \beta$ definește acum elementul de volum de-a lungul orbitei planetare, singurul în care trebuie evaluate cantitățile ce compun expresia probabilității de impact (5.9).

Densitatea spațială asociată planetei este zero înafara punctului $(r, \beta) = (a_p, 0)$. În acest punct valoarea sa este dată de formula alternativă (5.27)

$$\bar{s}_p = \frac{1}{2\pi a_p^2 \Delta r \Delta \beta} = \frac{1}{\Delta\nu}. \quad (5.32)$$

La fel și pentru densitatea spațială a celui de-al doilea corp (asteroidul), ea trebuie evaluată tot într-un singur punct, folosindu-ne de (5.19)

$$\bar{s} = \frac{1}{2\pi^3 a_p a \sin I \sqrt{(a_p - q)(Q - a_p)}}, \quad (5.33)$$

unde a , $q = a(1 - e)$, $Q = a(1 + e)$ și I notează elementele orbitale ale asteroidului.

Viteza relativă de impact u se poate obține din formalismul lui Öpik (relația 2.62), iar secțiunea eficace de coliziune se scrie

$$\sigma = \pi R_p^2 \left[1 + \frac{2Gm_p}{R_p u^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (5.34)$$

în ipoteza că dimensiunile celui de-al doilea corp sunt neglijabile în raport cu planeta. Reamintim că R_p notează raza planetei, iar m_p masa sa (în mase solare).

Expresia finală a probabilității medii de impact este $P = \bar{s} u \sigma$, ce poate fi aplicată cu destulă acuratețe la determinarea probabilității de impact cu Pământul a populației de corpuri studiate, cu singura restricție (impusă de metodă) ca asteroizii respectivi să fie de tip ECA.

Marele avantaj al metodei îl reprezintă viteza de calcul, permițând evaluarea probabilității de impact a unui număr arbitrar de mare de corpuri, cu un cost de calcul mic. Este ceea ce vom întreprinde în rândurile următoare, unde vom evalua probabilitatea anuală medie individuală de impact cu Pământul a tuturor asteroizilor ECA descoperiți până în prezent. Figura următoare prezintă probabilitățile respective pe o scară logaritmică, în raport cu viteza de impact u . Aceste probabilități cuprind un spectru a patru ordine de mărime și relevă o dependență accentuată față de valoarea vitezei u . Această dependență pare a fi de forma $P \sim 1/u^2$, așa cum se poate deduce empiric de pe figură.

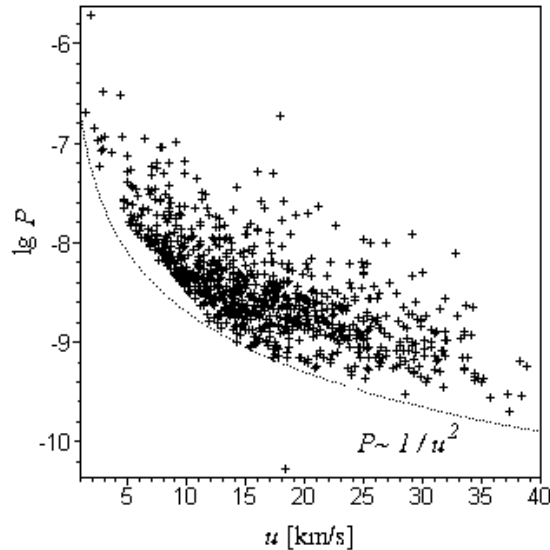


Figura 5.4. Probabilitățile medii anuale de impact cu Pământul ale tuturor asteroizilor de tip ECA descoperiți până în prezent (peste 900), funcție de viteza lor de impact.

Se remarcă o valoare particulară maximă pentru probabilitatea de impact ($> 10^{-6}/\text{an}$), ce corespunde asteroidului 2000 SG₃₄₄, care are o orbită foarte asemănătoare cu cea a Pământului.

Distribuția probabilităților de impact prezentată în figura 5.4 este puternic influențată de efectul de selecție observațională, care favorizează descoperirea de asteroizi având orbite apropiate de cea terestră, deci cu probabilități de impact mai mari. Probabilitatea anuală

medie de impact a întregii populații (reale) de asteroizi NEA este estimată la aproximativ 4×10^{-9} /an/obiect [Milani, 1998].

5.2 Probabilități intrinseci de impact

5.2.1 Determinarea regiunii de incertitudine orbitală

În anul 1809 Gauss a dezvoltat teoria calculului de orbită dintr-un set de observații astrometrice, formulând ipoteza distribuției normale a erorilor de observație și creând metoda celor mai mici pătrate de determinare a elementelor orbitale [Milani, 1999]. Devenită între timp clasică, metoda sa a fost aplicată cu succes la determinarea orbitelor primilor asteroizi descoperiți, (1) Ceres și (2) Pallas, rămânând până în zilele noastre teoria fundamentală a calculului de orbită.

Calcul de orbită

Fiecare set de date observaționale furnizează coordonatele ecuatoriale ale asteroidului pe sfera cerească, (α_k^o, δ_k^o) , valabile la momentul de timp t_k , $k = \overline{1, n}$. Acestea le corespund reziduurile $O - C$, adică diferențele dintre valorile observate și cele calculate

$$\begin{cases} \xi_{2k-1} = w_{2k-1} \cdot [\alpha_k^o - \alpha^c(t_k)] \cos \delta_k^o \\ \xi_{2k} = w_{2k} \cdot [\delta_k^o - \delta^c(t_k)], \end{cases} \quad k = \overline{1, n}, \quad (5.35)$$

unde $\alpha^c = \alpha^c(t)$ și $\delta^c = \delta^c(t)$ sunt coordonatele ecuatoriale calculabile la orice moment de timp din elementele orbitale osculatoare ale corpului, (e_1, \dots, e_6) , valabile la o anumită epocă (de exemplu, mijlocul intervalului de observație). Aceste elemente sunt a priori determinate dintr-un set mai vechi de observații, sau din oricare trei observații distincte ale setului curent. Până la urmă, scopul metodei de calcul este tocmai îmbunătățirea valorilor acestor elemente și determinarea regiunii de incertitudine a lor, adică a mulțimii tuturor acelor elemente orbitale, prezentând o aceeași abatere medie față de valorile cele mai probabile calculate (valorile nominale). Ponderile w_k sunt atașate fiecărui reziduu, alegerea lor fiind un lucru dificil, depinzând de calitatea setului respectiv de observații.

Reziduurile $O - C$ au trei origini diferite: în erorile de propagare a orbitei în cadrul modelului dinamic folosit, în imprecizia elementelor orbitale (e_1, \dots, e_6) și în erorile de observație. Acestea din urmă vor trebui să fie de așa natură, încât erorile în valorile presupuse ale elementelor orbitale să exercite o influență apreciabilă, și astfel să fie ușor corectabile [Brouwer și Clemence, 1961].

Erorile observaționale, în măsura în care nu sunt sistematice, se presupun că urmează o lege de distribuție normală. Această presupunere are la bază o teoremă limită centrală din teoria probabilităților, care ne asigură că suma unui număr mare de variabile aleatoare independente (fiecare descriind eroarea unei măsurători), având dispersii finite, urmează (asimptotic) o lege de distribuție normală [Oprișan și Sebe, 1999].

Dacă reziduurile sunt normalizate printr-o alegere corespunzătoare a ponderilor w_k , acestea vor urma o lege de distribuție normală cu abateri medii pătratice egale cu unitatea, având densitatea de probabilitate

$$P(\xi_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi_k^2/2}, \quad k = \overline{1, 2n}. \quad (5.36)$$

Dacă erorile de observație sunt independente, întreg setul de reziduuri va urma o lege de distribuție multidimensional normală, cu densitatea de probabilitate

$$P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n}) = \prod_{k=1}^{2n} P(\xi_k) \propto e^{-\frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_{2n}^2)} = e^{-\frac{1}{2}\xi^T \xi}, \quad (5.37)$$

unde $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n})^T$ este vectorul transpus al reziduurilor. Dacă erorile de observație sunt însă corelate (așa cum se întâmplă de obicei în practică), fie W matricea lor de corelație (simetrică), atunci

$$P(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{2n}) \propto e^{-\frac{1}{2}\xi^T W^{-1}\xi}. \quad (5.38)$$

Orbita cea mai probabilă corespunde valorii maxime a acestei distribuții, și ea se obține prin minimizarea funcției țintă

$$Q(E) = \xi^T W^{-1}\xi, \quad (5.39)$$

în raport cu vectorul elementelor orbitale $E = (e_1, \dots, e_6)$. În cazul în care erorile de observație nu sunt corelate, ea se transcrie

$$Q(E) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_{2n}^2. \quad (5.40)$$

Acest procedeu poartă numele de *metoda celor mai mici pătrate*, fiind folosit la estimarea soluției cele mai probabile (soluția nominală), chiar și în cazul când erorile de observație nu urmează o lege de distribuție normală [Press *et al.*, 1997].

În esență, vom avea de determinat punctele staționare ale funcției $Q = Q(E)$, care vor fi soluțiile următorului sistem de ecuații algebrice neliniare

$$\frac{\partial Q}{\partial E}(E) = 2\xi^T W^{-1} \frac{\partial \xi}{\partial E} = 2\xi^T W^{-1} J = 0, \quad (5.41)$$

unde $J = \partial \xi / \partial E$ reprezintă matricea Jacobi a derivatelor parțiale ale funcției $\xi = \xi(E)$, de dimensiune $2n \times 6$.

Sistemul anterior se rezolvă prin metode iterative, cum ar fi *metoda corecțiilor diferențiale* (*metoda lui Newton*). Dat fiind sistemul de ecuații algebrice neliniare [Press *et al.*, 1997]

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad i = \overline{1, n} \quad (5.42)$$

într-o vecinătate a punctului $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, ales inițial în apropierea soluției căutate, avem dezvoltarea în serie Taylor

$$f_i(X + \delta X) = f_i(X) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \delta x_j + O(\delta X^2) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (5.43)$$

care, prin egalarea cu zero și neglijarea termenilor de ordin superior lui δX , ne conduce la un sistem algebric linear în necunoscutele $\delta X = (\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_n)$, cu soluția

$$(\delta X)^T = - \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)^{-1} F^T(X), \quad (5.44)$$

unde s-a notat $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$. Procedeu se repetă iterativ, pentru $X' = X + \delta X$, până la convergență, când $\delta X \simeq 0$ cu precizia dorită.

În cazul de față avem $F(E) = \xi^T W^{-1} J$, cu matricea Jacobi

$$\frac{\partial F}{\partial E}(E) = \left(J^T W^{-1} J + \xi^T W^{-1} \frac{\partial J}{\partial E} \right). \quad (5.45)$$

Pentru simplificarea calculelor, derivatele parțiale de ordinul doi ale reziduurilor în raport cu elementele orbitale, scrise sub forma unui tablou tridimensional de dimensiune $2n \times 6 \times 6$

$$\frac{\partial J}{\partial E} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial E^2} = \left(\frac{\partial^2 \xi_k}{\partial e_i \partial e_j} \right)_{k=\overline{1, 2n}, i, j=\overline{1, 6}}, \quad (5.46)$$

se neglijează. Aceasta deoarece contribuția lor în expresia (5.45) este mică, în măsura în care la convergență vectorul reziduurilor ξ^T , cu care se înmulțesc, este mic [Milani, 1999].

Corecțiile ce trebuiesc aplicate pe pasul de iterație vor fi

$$\delta E^T = -(J^T W^{-1} J)^{-1} J^T W^{-1} \xi, \quad (5.47)$$

obținând în final soluția nominală $E^* = (e_1^*, \dots, e_6^*)$, pentru care $\delta E = 0$. Terminologia uzuală este $N = J^T W^{-1} J$ *matricea normală* (presupusă inversabilă), $C = N^{-1}$ *matricea covariantă*, iar $N \delta E^T = -J^T W^{-1} \xi$ *ecuațiile normale* [Milani, 1999]. În acest moment am obținut elementele orbitale cele mai probabile, compatibile cu setul de observații și cu ponderile w_k alese inițial. Cum caracterizăm însă regiunea de incertitudine în jurul acestei soluții nominale?

Elipsoidul de încredere (incertitudine)

Funcția țintă $Q(E)$ se dezvoltă în serie Taylor în jurul soluției E^* , astfel

$$Q(E) = Q(E^*) + \frac{\partial Q}{\partial E}(E^*) \delta E^T + \frac{1}{2} \delta E \frac{\partial^2 Q}{\partial E^2}(E^*) \delta E^T = Q(E^*) + \delta E N \delta E^T + \dots, \quad (5.48)$$

unde punctele înglobează termeni superiori în $\delta E = E - E^*$, precum și tabloul tridimensional al derivatelor parțiale de ordinul doi dat în (5.46), și neglijat de altfel în procesul de rezolvare a ecuațiilor normale. Matricea normală N este calculată aici în punctul de convergență E^* .

Incetitudinea soluției E^* poate fi descrisă în termenii *regiunii de încredere (incertitudine)*, definită prin inegalitatea

$$\delta Q(E) = Q(E) - Q(E^*) \leq \sigma^2, \quad (5.49)$$

pentru diferite valori ale parametrului adimensional σ . În aproximația pătratică, această regiune se poate aproxima cu un hiperelipsoid hexadimensional, derivat din (5.48)

$$\delta Q(E) \approx \delta E N \delta E^T \leq \sigma^2, \quad (5.50)$$

numit *elipsoidul de încredere (incertitudine)*. El înglobează mulțimea tuturor acelor orbite aflate în apropierea orbitei nominale, apropiere cuantificată printr-o valoare atribuită lui σ .

Expresia (5.50) a regiunii de încredere s-a obținut neconsiderând ipoteza distribuției normale a erorilor de observație, dobândind astfel un caracter mai general de aplicabilitate [Milani, 1999]. Dacă facem însă uz de această ipoteză, atunci o teoremă din teoria probabilităților ne asigură că vectorul de variație al elementelor orbitale δE va urma de asemenea o distribuție multidimensional normală în jurul valorii zero [Press *et al.*, 1997], cu densitatea de probabilitate

$$P(E) \propto e^{-\frac{1}{2} \delta E N \delta E^T}. \quad (5.51)$$

Astfel, valorilor lui σ egale cu 1,2,3, respectiv 4, le vor corespunde elipsoidele de încredere ce includ 68.3%, 95.4%, 99.73%, respectiv 99.99%, din mulțimea orbitelor compatibile cu erorile de observație. În aplicațiile practice, regiunea de încredere a unei orbite se alege, de cele mai multe ori, pentru $3 \leq \sigma \leq 4$.

Intervalele de încredere individuale ale elementelor orbitale se pot calcula din relațiile

$$\delta e_i = \pm \sigma \sqrt{c_{ii}}, \quad i = \overline{1, 6}, \quad (5.52)$$

ele fiind deduse imediat din ecuațiile normale [Press *et al.*, 1997]. c_{ii} reprezintă elementele de pe diagonala principală a matricii covariante.

Elipsoidul de incertitudine este bine definit de matricea normală N , care exprimă gradul de corelație al incertitudinilor orbitale $\delta e_1, \dots, \delta e_6$. Cunoscând această matrice, vom cunoaște elipsoidul de incertitudine asociat unui asteroid la un moment dat. Elementele acestor matrici, în număr de $6 \times 6 = 36$, dar distincte doar 21 (datorită simetriei), sunt incluse împreună cu elementele orbitale în anumite cataloage de asteroizi, scutind astfel utilizatorul de a repeta procesul complicat al calculului de orbită din seturile de observații existente [Chesley și Milani, 1999].

Cum se modifică elipsoidul de incertitudine la o schimbare de coordonate? Fie $(e_1, \dots, e_6) \rightarrow (e'_1, \dots, e'_p)$ o schimbare de coordonate, cu $E'(e_1, \dots, e_6) = (e'_1(e_1, \dots, e_6), \dots, e'_p(e_1, \dots, e_6))$, unde numărul p al noilor coordonate poate fi diferit de 6. Variația acestor coordonate, corespunzătoare variației originale δE în jurul soluției nominale, se poate aproxima liniar prin dezvoltarea

$$(\delta E')^T = [E' - E'(e_1^*, \dots, e_6^*)]^T \approx \frac{\partial E'}{\partial E}(E^*) \delta E^T, \quad (5.53)$$

unde $\partial E'/\partial E$ este jacobianul transformării de coordonate, de dimensiune $p \times 6$. Dacă exprimăm reziduurile ξ în funcție de noile coordonate, matricea normală corespunzătoare va avea expresia

$$N' = \left(\frac{\partial \xi}{\partial E'} \right)^T W^{-1} \left(\frac{\partial \xi}{\partial E'} \right), \quad (5.54)$$

care poate fi legată de matricea normală scrisă în vechile coordonate, prin expresia

$$\begin{aligned} N &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial E} \right)^T W^{-1} \left(\frac{\partial \xi}{\partial E} \right) = \left(\frac{\partial E'}{\partial E} \right)^T \left(\frac{\partial \xi}{\partial E'} \right)^T W^{-1} \left(\frac{\partial \xi}{\partial E'} \right) \left(\frac{\partial E'}{\partial E} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial E'}{\partial E} \right)^T N' \left(\frac{\partial E'}{\partial E} \right). \end{aligned} \quad (5.55)$$

Urmând un rezultat fundamental din teoria probabilităților, vectorul variație $\delta E'$ va urma la rândul său o distribuție multidimensional normală [Milani, 1999] și astfel, elipsoidul de incertitudine asociat va fi

$$\delta E' N' (\delta E')^T = \delta E \left(\frac{\partial E'}{\partial E} \right)^T N' \left(\frac{\partial E'}{\partial E} \right) \delta E^T = \delta E N \delta E^T \leq \sigma^2, \quad (5.56)$$

care este tocmai imaginea elipsoidului de incertitudine dat de (5.50) în noul sistem de coordonate. Această aproximație liniară a regiunii de incertitudine este bună în preajma soluției nominale doar în măsura în care funcțiile ce descriu transformarea de coordonate nu sunt puternic neliniare.

O aplicație imediată a rezultatelor anterioare rezultă făcând schimbarea de variabile $(e_1, \dots, e_6) \rightarrow (x, y, z)$. Acestea transformă elementele orbitale ale corpului în coordonate rectangulare heliocentrice, la epoca de timp când acestea sunt valabile, folosind binecunoscutele formule din problema celor două corpuri [Ureche, 1982]. Imaginea elipsoidului de incertitudine în noul sistem de coordonate este într-adevăr un elipsoid tridimensional, în centrul căruia se găsește asteroidul nominal, înconjurat de asteroizii “virtuali” ce umplu regiunea de incertitudine până la frontiera definită de parametrul σ (figura 5.5). Dacă erorile de observație urmează o distribuție normală, atunci și acești asteroizi virtuali vor urma o distribuție gaussiană în elipsoid.

Elipsoidul de incertitudine (5.50) este descris prin intermediul unei forme pătratice pozitiv definită

$$\sum_{i,j=1,n} n_{ij} \delta e_i \delta e_j \leq \sigma^2, \quad (5.57)$$

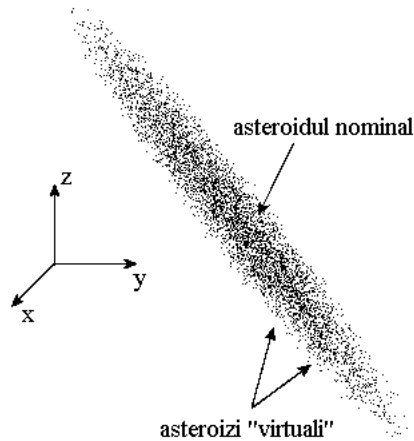


Figura 5.5. Imaginea elipsoidului de incertitudine în spațiul tridimensional al mișcării.

unde n_{ij} sunt elementele matricii normale N . Pentru a putea pune în evidență dimensiunile regiunii de incertitudine (semiaxele elipsoidului), membrul stâng din (5.57) trebuie adus la forma canonică (sumă de pătrate). Aceasta se realizează prin diagonalizarea matricii normale N , printr-o succesiune de rotații plane (transformări Jacobi) ce au menirea de a anula, rând pe rând, fiecare element non-diagonal al său [Press *et al.*, 1997]. Aceste rotații reorientează axele sistemului de coordonate, $(\delta e_1, \dots, \delta e_6) \rightarrow (\delta e'_1, \dots, \delta e'_6)$, astfel încât acestea devin paralele cu axele elipsoidului. Matricea normală diagonalizată va fi $N_d = V^T N V$, unde $V = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \dots$ reprezintă succesiunea rotațiilor plane considerate. Transformarea menționată este una de similaritate, $N \rightarrow V^{-1} N V$, matricile de rotație fiind ortogonale. Acest tip de transformare are proprietatea de a conserva valorile proprii ale matricii originale, în virtutea șirului de egalități

$$\begin{aligned} \det|V^{-1} N V - \lambda I_6| &= \det|V^{-1} \cdot (N - \lambda I_6) \cdot V| = \\ &= \det|V^{-1}| \cdot \det|N - \lambda I_6| \cdot \det|V| = \det|N - \lambda I_6| = 0, \end{aligned} \quad (5.58)$$

și deci, N_d va conține valorile proprii ale matricii normale, sau similar, inversele valorilor proprii ale matricii covariante C . Fie acestea din urmă $(\lambda_1, \dots, \lambda_6)$. Elipsoidul de incertitudine adus la forma canonică este

$$\frac{1}{\lambda_1} \delta e_1'^2 + \dots + \frac{1}{\lambda_6} \delta e_6'^2 \leq \sigma^2, \quad (5.59)$$

având semiaxele $\sigma\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sigma\sqrt{\lambda_6}$. Valorile lor sunt cu atât mai apropiate de incertitudinile individuale ale elementelor orbitale prognozate prin (5.52), cu cât acestea din urmă sunt mai slab corelate. Așa cum vom vedea într-un paragraf ulterior, una dintre incertitudini va domina întotdeauna, generând astfel un elipsoid puternic alungit.

Aproximația liniară de elipsoid dată pentru regiunea de incertitudine inițială este de cele mai multe ori suficientă, având în vedere faptul că majoritatea asteroizilor NEA descoperiți sunt intens monitorizați în timp și deci au orbite bine determinate, a căror incertitudini sunt menținute la valori mici.

5.2.2 Propagarea regiunii de incertitudine orbitală

Odată cu evoluția dinamică în timp a orbitei asteroidului, regiunea sa de incertitudine va cunoaște de asemenea modificări esențiale (în general de extindere). În acest paragraf vom trece

în revistă principalele metode liniare și neliniare de propagare a regiunii de incertitudine, ce permit evaluarea mărimi sale la orice moment de timp.

Considerăm regiunea inițială de incertitudine bine aproximată printr-un elipsoid de incertitudine, descris de matricea normală N^0 , sau similar, prin matricea covariantă $C^0 = (c_{ij}^0)_{1 \leq i, j \leq 6}$, la momentul inițial de timp t_0 . Dacă E_0 notează setul elementelor orbitale la acest moment de timp, iar E_t setul elementelor orbitale la un moment ulterior t , din relația (5.55) rezultă modul de propagare al matricii covariante

$$C^t = \left(\frac{\partial E_t}{\partial E_0} \right) C^0 \left(\frac{\partial E_t}{\partial E_0} \right)^T, \quad (5.60)$$

a cărei inversă este matricea normală N^t , ce caracterizează elipsoidul de incertitudine la noul moment de timp. Vom analiza pe rând principalele metode aproximative de propagare a regiunii de incertitudine, de la cele mai simple la cele mai performante, începând cu aproximarea din cadrul problemei celor două corpuri și terminând cu metode numerice de tip Monte Carlo ce modelează eficient caracterul neliniar al propagării.

În problema celor două corpuri

În această primă aproximație, valabilă pentru orbite slab perturbate gravitațional, elementele orbitale ale corpului se conservă în timp, exceptând anomalia mijlocie pe orbită, M , care urmează o lege de variație liniară. Datorită simplității modelului, el poate fi abordat analitic.

Așa cum rezultă din expresiile date în paragraful anterior, atât matricea normală cât și cea covariantă se calculează în funcție de elementele orbitale ale asteroidului. Se știe că elementele kepleriene $(a, e, I, \Omega, \omega, M)$ nasc singularități în cazurile $e \approx 0$ sau $I \approx 0$, ceea ce introduce în mod artificial efecte neliniare de propagare. Pentru a evita acest neajuns, se aleg *elementele equinoctale* ale corpului $E = (a, h, k, p, q, \lambda)$, definite prin [Milani, 1999]

$$\begin{cases} a = a \\ h = e \sin \varpi \\ k = e \cos \varpi \\ p = \tan(I/2) \sin \Omega \\ q = \tan(I/2) \cos \Omega \\ \lambda = M + \varpi, \end{cases} \quad (5.61)$$

unde $\varpi = \Omega + \omega$ este longitudinea periheliului. Folosirea acestor elemente înlătură singularitățile sus-menționate, în schimb introduce altele pentru $e \approx 1$ sau $I \approx \pi$. Aceste cazuri sunt însă atipice orbitelor asteroidale la care teoria de față se aplică. Corespondența dintre elementele kepleriene și cele equinoctale este biunivocă, relațiile inverse fiind

$$\begin{cases} a = a \\ e = \sqrt{h^2 + k^2} \\ I = 2 \arctan \sqrt{p^2 + q^2} \\ \Omega = 2 \arctan \frac{p}{q + \sqrt{p^2 + q^2}} \\ \omega = 2 \arctan \frac{h}{k + \sqrt{h^2 + k^2}} \\ M = \lambda - \varpi. \end{cases} \quad (5.62)$$

Pentru simplificarea ulterioară a scrierilor, vom introduce vectorii hexadimensionali O_i ce au toate elementele nule, exceptândul pe cel de pe poziția a i -a, care este egal cu 1, și matricile

O_{ij} de dimensiune 6×6 , ale căror elemente sunt nule, exceptândul pe cel de pe poziția (i,j) , care este egal cu 1. Aceste matrici cu un singur element nenul au următoarea proprietate de multimplicitate $O_{ij}O_{kr} = \delta_{jk}O_{ir}$, unde $\delta_{jk} = 0$ pentru $j \neq k$ și $\delta_{jk} = 1$ pentru $j = k$. De asemenea, dacă $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 6}$ notează o matrice oarecare 6×6 , atunci

$$AO_{ij} = \sum_{k=1}^6 a_{ki}O_{kj}, \quad O_{ij}A = \sum_{k=1}^6 a_{jk}O_{ik}. \quad (5.63)$$

Relația $E_t = E_0 + \sqrt{G}a_0^{-3/2}(t-t_0) \cdot O_6$ descrie, în formă matriceală, modificarea elementelor orbitale din cadrul problemei celor două corpuri. Astfel

$$\frac{\partial E_t}{\partial E_0} = I_6 - \frac{3}{2}\sqrt{G}a_0^{-5/2}(t-t_0) \cdot O_{61} \quad (5.64)$$

și din (5.60) rezultă

$$C^t = \left[I_6 - \frac{3}{2}\sqrt{G}a_0^{-5/2}(t-t_0) \cdot O_{61} \right] C^0 \left[I_6 - \frac{3}{2}\sqrt{G}a_0^{-5/2}(t-t_0) \cdot O_{16} \right], \quad (5.65)$$

iar prin inversare

$$N^t = \left[I_6 + \frac{3}{2}\sqrt{G}a_0^{-5/2}(t-t_0) \cdot O_{16} \right] N^0 \left[I_6 + \frac{3}{2}\sqrt{G}a_0^{-5/2}(t-t_0) \cdot O_{61} \right]. \quad (5.66)$$

Efectuând calculele în (5.65), deducem [Milani, 1999]

$$C^t = C^0 - \frac{3}{2}\sqrt{G}a_0^{-5/2}(t-t_0) \left[\sum_{j=1}^6 c_{1j}^0 \cdot O_{6j} + \sum_{i=1}^6 c_{i1}^0 \cdot O_{i6} \right] + \left[\frac{3}{2}\sqrt{G}a_0^{-5/2}(t-t_0) \right]^2 c_{11}^0 \cdot O_{66} \quad (5.67)$$

de unde vom desprinde câteva concluzii importante. Elementele de pe diagonala principală a noii matrici covariante rămând neschimbate, exceptând elementul al 6-lea

$$c_{66} = c_{66}^0 + \left[\frac{3}{2}\sqrt{G}a_0^{-5/2}(t-t_0) \right]^2 \cdot c_{11}^0 - \frac{3}{2}\sqrt{G}a_0^{-5/2}(t-t_0) \cdot (c_{16}^0 + c_{61}^0). \quad (5.68)$$

Folosind relațiile (5.52), rezultă că incertitudinile individuale în elementele orbitale se conservă, exceptându-l pe $\delta\lambda$. Dacă δa_0 și $\delta\lambda_0$ notează incertitudinile inițiale (presupuse mici) corespunzătoare elementelor orbitale a_0 și λ_0 , pe care le considerăm necorelate, atunci $c_{16}^0 = c_{61}^0 = 0$ și din egalitatea anterioară deducem expresia incertitudinii $\delta\lambda$, pentru $\sigma = 1$,

$$\delta\lambda = \pm \sqrt{\delta\lambda_0^2 + \left[\frac{3}{2}\sqrt{G}a_0^{-5/2}(t-t_0) \right]^2 \delta a_0^2} \approx \pm \left[\delta\lambda_0 + \frac{3}{2}\sqrt{G}a_0^{-5/2}(t-t_0) \delta a_0 \right], \quad (5.69)$$

sau similar pentru incertitudinea δM . Aceeași relație sa obținut de altfel în (3.16), considerând variația absolută a funcției $M(t)$.

Din această analiză deducem că incertitudinea inițială în semiaxa mare induce o creștere liniară a incertitudinii în anomalia mijlocie, având ca efect extinderea regiunii de incertitudine de-a lungul orbitei. Acesta este principalul comportament dinamic al regiunii de incertitudine, ce este resonsabil de degradarea în timp a preciziei elementelor orbitale. În mod corespunzător, elipsoidului de incertitudine va avea o semiaxă orientată aproximativ de-a lungul coordonatei $\delta\lambda$, ce va domina întotdeauna, transformându-l pe acesta cu timpul într-un elipsoid foarte alungit, deseori bine aproximat printr-un segment de dreaptă. Direcția acestei drepte se numește direcția

slabă de propagare (corespunzătoare celei mai mari valori proprii a matricii covariante) sau *linia de variație*, pe care o vom nota în cele ce urmează cu LOV (“line of variation”) [Milani, 1999].

Mai menționăm faptul că, chiar dacă incertitudinile inițiale ale elementelor orbitale sunt presupuse necorelate, adică matricea C^0 este diagonală ($c_{ij} = 0$, pentru $i \neq j$), noua matrice C^t va conține totuși elementul c_{16} nenul (5.67), ceea ce arată că între noile incertitudini δa_0 și $\delta \lambda$ s-a realizat o corelație.

În problema restrânsă circulară a celor trei corpuri

În această aproximație considerăm asteroidul perturbat gravitațional de către o planetă situată pe o orbită circulară (identificată cu Pământul), caz în care vom face uz de expresiile analitice ale elementelor orbitale deduse în cadrul formalismului lui Öpik dezvoltat în paragraful 2.2 al lucrării. Exploatând aceste expresii analitice, vom putea evalua modificarea incertitudinilor individuale ale elementelor orbitale în urma unei apropieri strânse cu planeta. Ne vom mărgini doar la determinarea incertitudinii în semiaxa mare, ce ne va permite apoi stabilirea unor rezultate calitative importante [Berinde, 2001b].

Păstrând notațiile din cadrul teoriei respective, vom avea succesiv expresia semiaxe mari a asteroidului în urma apropierii strânse, dedusă din (2.73)

$$a' = a_p / \left[1 - 2 \left(\frac{u}{v_p} \right) \cos \theta' - \left(\frac{u}{v_p} \right)^2 \right], \quad (5.70)$$

cu a_p raza orbitei planetare, v_p viteza circulară pe orbită a planetei, u viteza planetocentrică neperturbată a asteroidului și $\cos \theta' = \cos \theta \cos \gamma + \sin \theta \sin \gamma \cos \psi$, unde unghiurile (θ, ϕ) caracterizează orientarea vectorului viteză planetocentrică a asteroidului, relațiile (2.74) și (2.76), iar expresiile unghiului de deflexie gravitațională și a înclinației orbitale planetocentrice sunt

$$\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{R_p}{2b} \left(\frac{v_{\text{par}}}{u} \right)^2, \quad (5.71)$$

$$\cos \psi = \frac{d \cos \theta \sin \phi + d_p \sin \theta}{b}, \quad (5.72)$$

unde R_p este raza planetei, v_{par} este viteza parabolică la suprafața sa, $b^2 = b_{\text{moid}}^2 + (d \sin \phi \cos \theta + d_p \sin \theta)^2$ dă expresia parametrului apropierii, d este distanța de la nodul orbitei la orbita planetei, iar $d_p = a_p(l_p - \Omega)$ este lungimea arcului de orbită (mic și aproximat printr-o dreaptă) măsurat de la linia nodurilor orbitei asteroidale în direcția de mișcare a planetei, până în punctul unde se află planeta (de longitudine mijlocie l_p) atunci când asteroidul trece prin nodul respectiv (figura 2.7).

Pentru simplificarea calculului vom face uz de concluzia obținută în cadrul modelului celor două corpuri de propagare a regiunii de incertitudine, și anume considerăm că incertitudinea orbitală inițială se reduce doar la incertitudinea în anomalia mijlocie δM . Dispersia de-a lungul orbitei a asteroizilor virtuali ce umplu această regiune de incertitudine generează, în urma apropierii strânse cu planeta, dispersii în toate elementele orbitale, fiecare asteroid virtual urmând o traiectorie planetocentrică distinctă. Dispersia finală în semiaxa mare, $\delta a'$, se obține prin diferențierea expresiei (5.70), precum și a tuturor cantităților ce depind de M , după cum urmează [Berinde, 2001b]

$$\delta a' = 2a_p \left(\frac{a'}{a_p} \right)^2 \left(\frac{u}{v_p} \right) (\delta \cos \theta'), \quad (5.73)$$

$$\delta \cos \theta' = (\sin \theta \cos \gamma \cos \psi - \cos \theta \sin \gamma) \delta \gamma + \sin \theta \sin \gamma (\delta \cos \psi), \quad (5.74)$$

$$\delta \gamma = - \left(\frac{v_{\text{par}}}{u} \right)^2 \left[1 + \frac{1}{4} \left(\frac{v_{\text{par}}}{u} \right)^4 \right]^{-1} \left(\frac{R_p}{b^2} \right) \delta b \approx \quad (5.75)$$

$$\approx - \left(\frac{v_{\text{par}}}{u} \right)^2 \left(\frac{R_p}{b^2} \right) \delta b, \quad \text{pentru } R_p \ll b, \quad (5.76)$$

$$\delta b = \sin \theta \cos \psi \delta d_p, \quad (5.77)$$

$$\delta \cos \psi = \frac{1}{b} \left(\frac{b_{\text{moid}}}{b} \right)^2 \sin \theta \delta d_p, \quad (5.78)$$

$$\delta d_p = a_p \left(\frac{a}{a_p} \right)^{3/2} \delta M, \quad (5.79)$$

unde, pe parcurs, s-a făcut înlocuirea $|d \cos \phi| = b_{\text{moid}}$. Cu substituțiile de rigoare, rezultă

$$\delta a' = C_1 \left(\frac{a'}{b} \right) \left[C_2 \left(\frac{R_p}{b} \right) + C_3 \left(\frac{b_{\text{moid}}}{b} \right)^2 \right] \delta M, \quad (5.80)$$

unde coeficienții

$$\begin{cases} C_1 = 2a' \left(\frac{a}{a_p} \right)^{3/2} \left(\frac{u}{v_p} \right) \sin \theta \\ C_2 = \left(\frac{v_{\text{par}}}{u} \right)^2 (\cos \theta \sin \gamma - \sin \theta \cos \gamma \cos \psi) \cos \psi \\ C_3 = \sin \theta \sin \gamma \end{cases} \quad (5.81)$$

au, în general, ordinul unității (folosind UA ca unitate de măsură).

Așa cum era de așteptat, incertitudinea în semiaxa mare devine cu atât mai mare cu cât parametrul apropierii b este mai mic, adică cu cât apropierea este mai strânsă. În cazul NEA, raportul (a'/b) are un ordin de mărime cuprins între $10^2 - 10^4$. Pentru evaluarea ordinului de mărime a cantității din paranteza dreaptă a expresiei (5.80), vom distinge două situații limită: prima, când apropierea este cea mai strânsă posibil, $b \approx b_{\text{moid}}$, atunci ordinul de mărime este 1, și a doua, când $b \gg b_{\text{moid}}$, ordinul de mărime fiind dat acum de raportul (R_p/b) , adică $10^{-3} - 10^{-1}$. Obținem astfel valori ale $\delta a'$ cuprinse între $(10^{-1} - 10^4) \cdot \delta M$ UA, cu δM exprimat în radiani. Pe parcursul timpului δM devine din ce în ce mai mare, atât datorită caracterului liniar de variație, cât și creșterii ratei de variație, prin augmentarea incertitudinii în semiaxa mare, datorită apropierilor strânse multiple. O lege de variație a δM , în aceste circumstanțe, este dată de expresia (3.19), în esență ea fiind o lege exponențială.

În final dorim să punem în evidență o caracteristică calitativă importantă a propagării incertitudinii în anomalia mijlocie sub acțiunea perturbatoare a apropierilor strânse, și anume caracterul oscilatoriu [Berinde, 2001b]. Pe parcursul apropierii strânse este posibil ca asteroizii virtuali ce umplu segmentul de incertitudine δM să fie perturbați în mod diferit de planetă, astfel încât ordonarea lor inițială după mișcarea medie zilnică (sau similar, după semiaxa mare) să fie alterată. În aceste condiții, va începe un proces de rearanjare al lor de-a lungul direcției de mișcare, cei cu mișcări medii mai mari trecând în față. Este posibil ca întreg șirul de asteroizi virtuali să se reordoneze, având ca efect colapsarea temporară a acestuia (figura 5.6) și micșorarea incertitudinii în anomalia mijlocie. Acest fenomen dinamic poate fi cuantificat pe

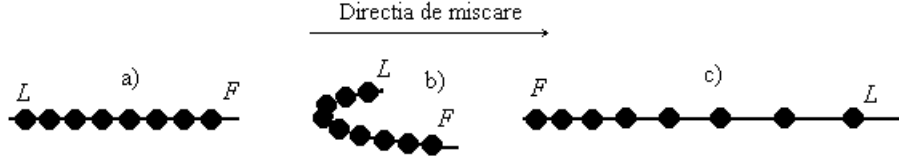


Figura 5.6. Procesul de reordonare a asteroizilor virtuali de-a lungul direcției de mișcare (F marchează primul asteroid din șir, iar L ultimul).

ecuația (5.80) și anume, în cazul $\delta a' > 0$, semiaxele mari ale asteroizilor având anomalia mijlocie mai mare, devin mai mari decât ale celor din urmă, și astfel condițiile de reordonare sunt îndeplinite. Semnul lui $\delta a'$ este dat de coeficienții din paranteza dreaptă. În mod sigur, când $b \approx b_{\text{moid}}$ atunci $\delta a'$ are semnul lui C_3 , care este pozitiv. Dacă $b \gg b_{\text{moid}}$, semnul său este dat de coeficientul C_2 care, în aceste circumstanțe, va avea semnul cantității $-\sin(\theta \pm \gamma)$, în general fiind negativ. În această situație, ordonarea inițială după semiaxa mare este conservată.

Acest comportament oscilatoriu este întâlnit la numeroși asteroizi NEA, cel puțin atunci când dispersia în anomalia mijlocie, convertită în UA de-a lungul orbitei, este mult mai mică decât raza sferei de acțiune gravitațională a planetei perturbatoare. Manifestarea acestui comportament permite ca incertitudinea în anomalia mijlocie să fie menținută la valori mici un interval mai îndelungat de timp, încetinind astfel procesul de degradare orbitală (figura 5.7) [Berinde, 2001b].

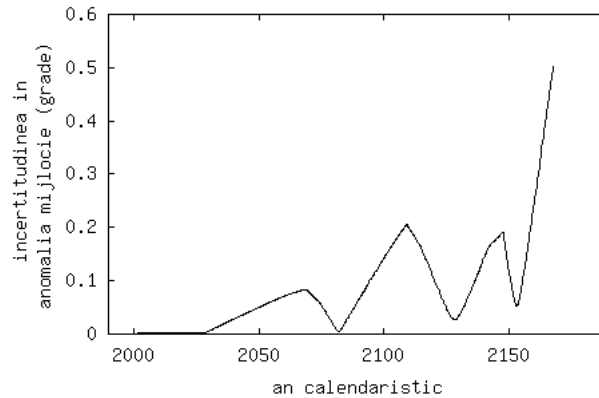


Figura 5.7. Comportamentul oscilatoriu al incertitudinii în anomalia mijlocie pentru asteroidul 1999 AN₁₀, în urma unei integrări numerice complete a unui set de 100 de asteroizi virtuali repartizați uniform în regiunea inițială de incertitudine, pentru $\sigma = 1$.

În problema generală a celor n corpuri

În acest caz, modificarea elementelor orbitale este descrisă prin intermediul fluxului integral, introdus în paragraful 3.1.2 al lucrării. El este o aplicație $\Phi^t : E_0 \rightarrow E_t$ ce asociază setului de elemente orbitale inițiale, setul de elemente orbitale la noul moment de timp t . Se determină integrând numeric ecuațiile de mișcare în cadrul modelului dinamic respectiv. Atunci

$$\frac{\partial E_t}{\partial E_0} \equiv \frac{\partial \Phi^t}{\partial E_0}(E_0) \quad (5.82)$$

reprezintă tocmai soluția ecuațiilor cu variații (3.10), care se rezolvă și ele numeric, odată cu ecuațiile de mișcare [Milani, 1999]. Având această matrice a derivatelor parțiale disponibilă,

vom putea utiliza ecuația (5.60) pentru a propaga matricea covariantă până la momentul de timp t .

În concluzie, pentru a propaga matricea normală și covariantă și pentru a determina elipsoidul de încredere la orice moment de timp, este suficientă rezolvarea ecuațiilor de mișcare împreună cu cele cu variații. Pe de altă parte, așa cum vom sublinia în paragraful următor, ipoteza liniarității pe care s-a construit teoria propagării regiunii de încredere este chestionabilă pe intervale mari de timp, și vom trece în revistă câteva metode neliniare alternative.

Limite ale teoriei liniare. Metode de tip Monte Carlo

Ipoteza liniarității, în cadrul teoriei elaborate anterior, a intervenit în două puncte cheie, odată la aproximarea regiunii de încredere printr-un elipsoid, iar apoi la propagarea acesteia în timp cu ajutorul fluxului integral.

În cazul asteroizilor cu date observaționale puține, distribuite pe un interval mic de timp, orbita nominală determinată prin metoda celor mai mici pătrate va fi slab constrânsă ecuațiilor normale, rezultând de aici o regiune de incertitudine inițială foarte extinsă, insuficient de bine aproximată prin elipsoidul de incertitudine [Chesley și Milani, 2001]. O metodă alternativă de descriere a regiunii inițiale de incertitudine este *metoda soluțiilor multiple*. Așa cum subliniam anterior, regiunea de incertitudine este deseori puternic alungită pe o direcție (LOV) care coincide cu semiaxa mare a elipsoidului de incertitudine în aproximația liniară. În cazul neliniar, LOV este asimilată cu o curbă de-a lungul regiunii de incertitudine. Ideea metodei este de a eșantiona această direcție slabă cu un număr finit de corpuri uniform distribuite, fiecare fiind atribuită o regiune reprezentativă de incertitudine (de dimensiuni reduse), reuniunea tuturor acestora fiind o bună aproximare a regiunii inițiale. Urmează apoi procedeu standard de propagare a fiecărei regiuni, până la momentul de timp dorit, când reuniunea lor reconstituie noua imagine a regiunii de incertitudine. Eșantionarea inițială a LOV se realizează printr-un procedeu numeric iterativ (corecții diferențiale), pornind de la soluția nominală, în ambele direcții, până la limita σ dorită [Milani, 1999]. Un exemplu de asteroid NEA care necesită modelarea neliniară a regiunii sale de incertitudine este 1998 OX₄.

Vom considera în cele ce urmează că regiunea de încredere este bine aproximată prin elipsoidul de încredere. Propagarea liniară în timp a acestuia, în cadrul problemei generale a celor n corpuri, presupune o variație liniară a fluxului integral. Această ipoteză cade atunci când se dorește o propagare pe intervale mari de timp, mai cu seamă la orbitele puternic perturbate gravitațional. Vom prezenta în cele ce urmează două metode alternative de propagare a elipsoidului de incertitudine [Chesley și Milani, 2001].

Metoda frontierei de incertitudine în aproximația semiliniară se poate descrie pe scurt astfel: se propagă liniar elipsoidul inițial de încredere, \mathcal{E}_0 , prin fluxul integral liniarizat, obținând imaginea sa curentă \mathcal{E} . Preimaginea, \mathcal{C}_0 , a frontierei sale $bd(\mathcal{E})$ prin această aplicație va fi situată pe frontiera $bd(\mathcal{E}_0)$. Atunci, frontiera de incertitudine în aproximația semiliniară va fi imaginea lui \mathcal{C}_0 prin fluxul integral neliniarizat, $\mathcal{C} = \Phi^t(\mathcal{C}_0)$. Totuși, cazurile puternic neliniare nu pot fi abordate nici cu această metodă.

O metodă numerică cu caracter universal de aplicabilitate, ce modelează corect toate particularitățile neliniare ale propagării este eșantionarea statistică de tip Monte-Carlo. O prezentare matematică riguroasă a sa este dată într-un paragraf ulterior. Metoda Monte-Carlo își găsește o aplicabilitate naturală în acest domeniu, dat fiind caracterul statistic al problemei ce descrie incertitudinea orbitală. În esență, ea presupune eșantionarea elipsoidului de încredere cu un număr arbitrar de corpuri (cu cât mai multe, cu atât mai bine) ce vor urma o anumită lege de distribuție în elipsoid. Natural ar fi să se aleagă legea de distribuție normală, însă distribuția uniformă s-a dovedit a da rezultate la fel de consistente [Milani *et al.*, 2002]. Au fost propuse și legi de distribuție mult mai complexe, cum ar fi distribuția *kappa* [Muinonen și Bowell, 1993].

Fiecare asteroid virtual este propagat apoi numeric în cadrul modelului dinamic folosit, până la epoca de timp dorită. Regiunea ocupată de aceștia în spațiul elementelor orbitale va aproxima cu atât mai bine noua regiune de incertitudine, cu cât numărul lor este mai mare. Din păcate, propagarea unui număr mare de orbite în cadrul problemei celor n corpuri este un proces intens consumator de resurse de calcul, de aceea va exista întotdeauna un compromis între numărul de corpuri folosit și precizia cu care aceștia descriu regiunea de incertitudine. În figura următoare este prezentată evoluția dinamică (neliniară) a regiunii de incertitudine a asteroidului 2001 GP₂, în urma unei apropieri strânse cu Pământul, proces modelat cu ajutorul metodei numerice Monte-Carlo.

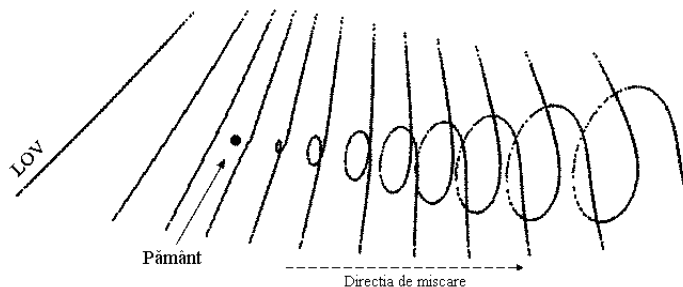


Figura 5.8. Propagarea numerică de tip Monte-Carlo a regiunii de incertitudine a asteroidului 2001 GP₂ în spațiul tridimensional al mișcării, în urma unei apropieri strânse cu Pământul (distanța minimă Pământ - LOV: 0.0013 UA, la 5 octombrie 2020). Se remarcă caracterul neliniar dobândit în urma apropierii.

5.2.3 Analiza posibilității de impact în planul țintă

În literatura de specialitate a devenit deja clasică analiza apropiierilor strânse și evaluarea probabilității de impact într-un așa numit *plan țintă*. Din punct de vedere geometric, acesta este un plan ce trece prin centrul planetei față de care dorim să studiem fenomenele respective, și este normal la vectorul viteză planetocentric al asteroidului. În acest plan se consideră un sistem de axe rectangulare cu originea în centrul planetei și având o orientare arbitrară. Punctul de intersecție al traiectoriei asteroidului cu planul țintă furnizează detalii dinamice importante asupra naturii apropierii strânse și a evaluării unui posibil impact, mai cu seama când se ia în considerare și proiecția regiunii de incertitudine în acest plan [Milani *et al.*, 2002].

Când planul țintă se consideră normal la vectorul viteză planetocentrică neperturbată (vectorul \mathbf{u} în notația folosită în paragraful 2.2 al lucrării), el mai poartă numele de *plan țintă b* [Valsecchi *et al.*, 2001], deoarece conține vectorul \mathbf{b} , al cărui modul este parametrul apropierii b , și a cărui direcție este perpendiculară pe asimptota traiectoriei hiperbolice planetocentrice a asteroidului (în formalismul lui Öpik). Distanța TP dintre punctul unde traiectoria asteroidului întâlnește planul țintă și centrul planetei este tocmai parametrul b al apropierii (figura 5.8), adică distanța minimă neperturbată dintre cele două corpuri. O alegere convenabilă a sistemului de coordonate în acest plan ne permite identificarea câtorva parametri dinamici importanți [Milani *et al.*, 2002]. Astfel, fie $P\bar{x}\bar{y}$ un sistem rectangular de coordonate, în care axa $P\bar{x}$ este perpendiculară pe vectorul viteză heliocentrică al planetei \mathbf{v}_p , iar axa $P\bar{y}$ este orientată de-a lungul proiecției vectorului \mathbf{v}_p pe acest plan, dar în sens opus. Coordonatele punctului T sunt $\bar{x}_T = -b \sin \psi$ și $\bar{y}_T = b \cos \psi$. Din ecuația (2.97) rezultă că $\bar{x}_T = -b_{\text{moid}}$, care este tocmai distanța minimă de intersecție orbitală (MOID), luată cu semn schimbat. Aceasta fiind o constantă, înseamnă că punctul T descrie în planul țintă b o dreaptă, atunci când asteroidul este lăsat liber pe orbita sa. Această dreaptă este tocmai linia de variație (LOV), corespunzătoare incertitudinii în anomalia mijlocie. Analiza posibilității de impact în acest plan a fost deja

schițată în paragraful 2.2.3, prin compararea parametrului apropierii, b , cu raza de impact r_{imp} asociată planetei respective (ecuația 2.84).

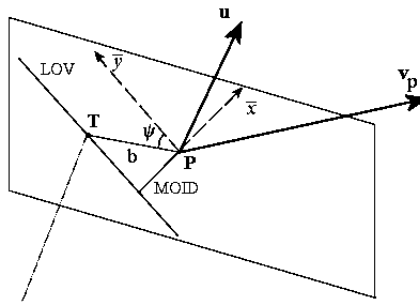


Figura 5.9. Planul țintă b în care s-a evidențiat direcția LOV și distanța MOID.

În ultimii ani, datorită abordării numerice pe scară largă a evoluției dinamice a corpurilor, planul țintă b a fost înlocuit treptat de așa numitul plan țintă modificat, MTP (“modified target plane”) [Milani și Valsecchi, 1999], care se consideră normal la vectorul viteză planetocentrică (perturbată) al asteroidului. În acest plan distanța minimă față de planetă, afectată fiind de atracția gravitațională a acesteia, va fi indicată corect. Când apropierea dintre corpuri are loc la viteză mare, sau la distanțe mutuale mari, influența gravitațională a planetei este mică și diferența dintre cele două planuri țintă devine neglijabilă. Construirea planului MTP se face pe parcursul integrării numerice a traiectoriei asteroidului, când trebuie identificate distanțele minime mutuale într-un interval ce nu depășește raza sferei de acțiune gravitațională a planetei. Dacă (dx, dy, dz) notează coordonatele rectangulare ecliptice planetocentrice al asteroidului, soluțiile ecuației

$$\frac{d}{dt}(\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}) = 0 \quad (5.83)$$

vor da extremele distanțelor mutuale, ceea ce este echivalent cu $dxdu + dydv + dzdw = 0$, unde (du, dv, dw) notează componentele vitezei planetocentrice a asteroidului. Dacă soluția găsită $(dx_m, dy_m, dz_m, du_m, dv_m, dw_m)$ corespunde unei distanțe minime $r_m = \sqrt{dx_m^2 + dy_m^2 + dz_m^2}$, atunci vom putea specifica coordonatele punctului T de intersecție a traiectoriei asteroidului cu planul MTP, în sistemul de coordonate deja specificat. Ecuațiile axei $P\bar{x}$ (aflată la intersecția planului normal pe vectorul v_p cu planul țintă MTP) și a axei $P\bar{y}$ (ca proiecție a vectorului v_p pe acest plan) se pot determina analitic. Proiectând vectorul distanță (dx_m, dy_m, dz_m) pe aceste axe, vom obține coordonatele căutate (\bar{x}_T, \bar{y}_T) . Vom nota cu $\bar{T} : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aplicația ce transformă elementele orbitale ale corpului în aceste coordonate din planul țintă, obținută prin compunerea transformării de coordonate din elementele orbitale heliocentrice în coordonate rectangulare planetocentrice (din cadrul problemei celor două corpuri), cu proiecția acestor coordonate rectangulare în planul țintă.

De asemenea, vom introduce un alt sistem de coordonate $P\bar{x}'\bar{y}'$ în planul țintă MTP, față de care coordonatele punctului T sunt ușor exprimabile. Deci, axa $P\bar{x}'$ va fi proiecția pe plan a normalei PZ la planul ecliptic, iar axa $P\bar{y}'$ va forma un sistem direct orientat. Coordonatele căutate sunt atunci

$$\begin{cases} \bar{x}'_T = dz_m \sqrt{1 + \frac{dw_m^2}{du_m^2 + dv_m^2}} \\ \bar{y}'_T = \frac{dy_m du_m - dx_m dv_m}{\sqrt{du_m^2 + dv_m^2}}, \end{cases} \quad (5.84)$$

pentru care se verifică ușor că $r_m^2 = (\bar{x}'_T)^2 + (\bar{y}'_T)^2$.

Oricare ar fi sistemul de coordonate ales, testarea posibilității unui impact se face prin compararea distanței minime r_m cu raza planetei R_p . De notat că limita inferioară pentru această distanță este mai mică decât distanța MOID dintre orbite, datorită efectului de convergență gravitațională produs de planetă. În cazul Pământului, se adaugă în plus și acțiunea perturbatoare a satelitului său natural (Luna), ce induce oscilații periodice ale MOID cu amplitudini de câteva zecimi de rază terestră.

O analiză completă a posibilității de impact presupune luarea în calcul și a imaginii regiunii de incertitudine orbitală în planul țintă. În aproximația liniară, aplicația \bar{T} liniarizată transformă elipsoidul de incertitudine \mathcal{E} din spațiul elementelor orbitale într-o elipsă de incertitudine \mathcal{E}_T în planul țintă, conform formulei generale de schimbare de coordonate (5.53). În literatura de specialitate, pentru $\sigma = 1$, semiaxa mare a acestei elipse, notată cu Λ , poartă numele de *factor de deformare* (“stretching factor”), pe direcția s-a proiectându-se linia de variație LOV, iar semiaxa mică, notată cu w , se numește *semilățime*, fiind o măsură a lățimii regiunii de incertitudine și, de asemenea, a incertitudinii în distanța orbitală MOID [Milani *et al.*, 2002]. Aceste semiaxe vor fi orientate aproximativ pe aceeași direcție ca și axele sistemului de coordonate $P\bar{x}\bar{y}$ (figura 5.9) și din acest motiv ecuația elipsei de incertitudine va avea forma canonică. Când factorul de deformare este foarte mare, $\Lambda \gg w$, elipsa de incertitudine se va aproxima printr-un segment de dreaptă (LOV).

Se poate construi și o aproximație semiliniară a elipsei de incertitudine, folosind metoda frontierei de incertitudine sau aproximații numerice unidimensionale (arc de curbă), prin metoda soluțiilor multiple (metode discutate în paragraful anterior). Pe de altă parte, abordarea numerică de tip Monte-Carlo oferă o imagine discretă a regiunii de incertitudine prin proiectarea fiecărui asteroid virtual pe propriul său plan țintă, foarte aproape de realitate, însă cu un cost de calcul semnificativ.

Pentru fiecare apropiere strânsă identificată de-a lungul propagării asteroidului nominal trebuie determinată distanța minimă dintre imaginea regiunii de incertitudine în planul țintă și planetă, pentru a fi în măsură să decidem posibilitatea unui impact. Mulțimea tuturor asteroizilor virtuali din regiunea de incertitudine ce realizează un impact cu ocazia unei apropieri strânse date se numesc *impactori virtuali* (“virtual impactors”) [Milani *et al.*, 2000a]. Pentru evaluarea probabilității de impact pe un anumit interval de timp va fi necesară, în prealabil, identificarea tuturor apropiierilor strânse ce vor avea loc. Din nefericire, monitorizarea apropiierilor strânse ale asteroidului nominal nu este suficientă, deoarece este posibil ca o parte din asteroizii virtuali din regiunea de incertitudine să realizeze apropieri strânse suplimentare cu planeta. Astfel, se pune problema identificării și catalogării tuturor apropiierilor strânse ale asteroizilor virtuali din regiunea de incertitudine, acesta fiind subiectul paragrafului următor.

5.2.4 Identificarea și catalogarea apropiierilor strânse

În general prima apropiere strânsă ce are loc după ultima îmbunătățire orbitală este ușor de indentificat, regiunea de incertitudine având dimensiuni reduse. În urma acestei apropieri, asteroizii virtuali vor înregistra perturbații gravitaționale diferite, după cum sunt poziționați față de planetă la momentul apropierii minime. Astfel, perioadele lor orbitale se vor modifica (ca o consecință a modificării semiaxelor mari) într-un interval cuprins între o valoare minimă P_{min} și una maximă P_{max} , exprimate în perioade orbitale planetare (ani, pentru Pământ). Fiecărui număr rațional h/k din acest interval îi va corespunde o așa numită *întoarcere rezonantă* (“resonant return”) [Milani *et al.*, 2000b]. După h revoluții orbitale ale planetei, asteroidul virtual respectiv va completa exact k revoluții, revenind din nou în preajma planetei. Această condiție se poate rafina adăugând la raportul de rezonanță o cantitate Δt ce semnifică intervalul de timp cu care asteroidul virtual a ajuns mai repede decât planeta în poziția unde se realizează

minimul distanței mutuale, în cadrul apropierii strânse curente. Astfel, în planul $(P, \Delta t)$ se va reprezenta regiunea de incertitudine orbitală, iar intersecția acesteia cu dreptele de ecuație $h + \Delta t = kP$, cu $h, k \in \mathbb{N}$, va pune în evidență viitoarele întoarceri rezonante, când diferența Δt va fi recuperată.

Mai menționăm faptul că, dacă geometria orbitei asteroidului permite realizarea de apropierii strânse în mai multe puncte de-a lungul orbitei planetare (spre exemplu, la ambele noduri orbitale), atunci se poate vorbi și de *întoarceri non-rezonante*, când apropierea strânsă curentă va genera viitoare reîntoarceri ale asteroizilor virtuali într-un alt punct din preajma orbitei planetare. Un exemplu de acest gen este asteroidul 1999 AN₁₀ [Milani *et al.*, 1999].

Fiecare apropiere strânsă ce are loc ca rezultat al unei întoarceri rezonante sau non-rezonante poate fi analizată la rândul ei sub aspectul generării de noi reîntoarceri, așa numitele reîntoarceri secundare. Va rezulta de aici o cascadă de reîntoarceri posibile într-un interval dat de timp, din ce în ce mai greu de pus în evidență.

Când regiunea de incertitudine devine foarte extinsă, o apropiere strânsă cu planeta va avea loc doar față de un subset restrâns de asteroizi virtuali. Vom numi acest subset, un *curent virtual* [Milani *et al.*, 2000b], căruia îi este caracteristic momentul apropierii strânse. Un curent virtual va putea conține asteroizi virtuali ce au urmat evoluții dinamice calitativ diferite până la momentul respectiv (spre exemplu, reîntoarceri rezonante cu rapoarte diferite de rezonanță). Separând aceste evoluții dinamice distincte, spunem că am descompus curentul virtual în *șiruri virtuale*. Fiecare șir provine din asteroizi virtuali aflați inițial într-o aceeași vecinătate a regiunii de incertitudine. Această proprietate topologică va fi exploatată într-un paragraf ulterior, la elaborarea unei metode iterative de determinare a impactorilor virtuali.

Imaginea unui șir virtual în planul țintă va fi un arc de curbă (de multe ori un segment de dreaptă), caracterizat printr-o anumită valoare a MOID, adică a distanței minime posibile dintre planetă și șirul respectiv. Există însă o categorie aparte de șiruri virtuale, pentru care toți asteroizii virtuali ce îi compun se găsesc de aceeași parte a orbitei lor în raport cu punctul unde se realizează distanța minimă cu planeta. Acestea se numesc *șiruri întrerupte*, a căror distanță minimă față de planetă este mai mare decât propriul MOID, și deci au șanse mici de a conține impactori virtuali.

De-a lungul evoluției dinamice a asteroidului nominal și a regiunii sale de incertitudine, fiecărui șir virtual din planul țintă asociat fiecărei apropieri stânse cu planeta, îi va corespunde o probabilitate intrinsecă de impact, astfel încât, pe un interval dat de timp, probabilitatea cumulată de impact a asteroidului nominal va fi egală cu suma probabilităților intrinseci (ele fiind cantități mici). Astfel, procesul de determinare al probabilității de impact constă, în prealabil, în identificarea tuturor apropierilor strânse posibile, prin metoda soluțiilor multiple de-a lungul LOV sau prin metoda numerică de tip Monte-Carlo, iar apoi în determinarea probabilităților intrinseci de impact, acest ultim deziderat făcând subiectul următorului paragraf al lucrării.

5.2.5 Estimarea probabilității intrinseci de impact

Fie \mathcal{E}_0 regiunea inițială de incertitudine în care vectorul de variație al elementelor orbitale δE , măsurat în raport cu soluția nominală, urmează o lege de distribuție (normală), cu densitatea de probabilitate $P_0(E)$. Fie, de asemenea, \mathcal{C}_E mulțimea tuturor elementelor orbitale ce corespund traiectoriilor colizionale cu planeta în cadrul apropierii strânse fixate. Probabilitatea intrinsecă de impact va fi [Muinonen și Bowell, 1993]

$$\mathcal{P}_{imp} = \int_{\mathcal{C}_E} P_0(E) dE. \quad (5.85)$$

În cele ce urmează vom trece în revistă principalele metode de evaluare a acestei integrale.

Aproximații analitice (liniarizate)

Pentru o abordare analitică a expresiei (5.85), aceasta va trebui transcrisă în coordonate în planul țintă corespunzător apropierii strânse. Fie $\overline{T} \circ \Phi^t : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^2$ transformarea de coordonate (liniarizată), ce duce setul de elemente orbitale inițiale $E \in \mathcal{E}_0$ în coordonatele din planul țintă $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathcal{E}_T$, notațiile fiind cele introduse anterior. Atunci

$$\mathcal{P}_{imp} = \int_{\mathcal{E}_T \cap \mathcal{R}_p} P(\bar{x}_0 - \bar{x}, \bar{y}_0 - \bar{y}) d\tau, \quad (5.86)$$

unde \mathcal{R}_p este imaginea corpului sferic planetar în planul țintă, (\bar{x}_0, \bar{y}_0) sunt coordonatele asteroidului nominal în acest plan, iar $d\tau$ este elementul de arie. Densitatea de probabilitate $P(\bar{x}_0 - \bar{x}, \bar{y}_0 - \bar{y})$, derivată din P_0 în urma transformării de coordonate, se poate scrie sub forma

$$P(\bar{x}_0 - \bar{x}, \bar{y}_0 - \bar{y}) = \frac{P_\sigma(\sigma_\Lambda)P_\sigma(\sigma_w)}{\Lambda w}, \quad (5.87)$$

printr-o scalare în coordonate adimensionale, descrise de sistemul

$$\begin{cases} \sigma_\Lambda = (\bar{y}_0 - \bar{y})/\Lambda \\ \sigma_w = (\bar{x}_0 - \bar{x})/w, \end{cases} \quad (5.88)$$

unde Λ și w sunt semiaxele elipsei de incertitudine. Descompunerea densității de probabilitate bidimensionale P ca produs a două densități de probabilitate unidimensionale, normalizate și necorelate, este posibilă datorită orientării elipsei de incertitudine de-a lungul axelor de coordonate din planul țintă. De notat că P_σ este densitatea de probabilitate a unei legi de distribuție de același tip ca și cea descrisă de P_0 , deoarece transformarea de coordonate s-a considerat liniarizată. În aplicațiile practice, P_σ este modelat adesea printr-o lege de distribuție normală, sau printr-o lege de distribuție uniformă. În primul caz, valoarea sa maximă se atinge pentru soluția nominală, adică $P_\sigma(0) = 1/\sqrt{2\pi}$, iar în al doilea caz, vom avea o valoare constantă $P_\sigma = 1/(2\sigma)$ în orice punct.

Când elipsa de incertitudine corespunzătoare unui parametru de încredere a priori dat σ , nu are puncte comune cu imaginea corpului planetei, probabilitatea de impact se consideră zero. În caz contrar, distingem următoarele două situații limită abordabile analitic [Milani *et al.*, 2002].

a) Pentru $w \gg R_p$, putem presupune că densitatea de probabilitate este constantă în interiorul domeniului restrâns $\mathcal{R}_p \subseteq \mathcal{E}_T$, și astfel

$$\mathcal{P}_{imp} = \frac{P_\sigma(\sigma_\Lambda^0)P_\sigma(\sigma_w^0)}{\Lambda w} \pi R_p^2, \quad (5.89)$$

unde $(\sigma_\Lambda^0, \sigma_w^0)$ notează poziția în coordonate adimensionale a centrului planetei, adică pentru $(\bar{x}, \bar{y}) = (0, 0)$. Se observă că probabilitatea de impact va avea o valoare cu atât mai mare cu cât dimensiunile regiunii de incertitudine sunt mai mici.

b) Pentru $w \ll R_p$, elipsa de incertitudine se reduce doar la linia de variație (LOV). Dacă L notează lungimea corzii decupată de LOV în domeniul \mathcal{R}_p , de-a lungul căreia vom presupune că densitatea de probabilitate este constantă, integrala (5.86) se reduce la

$$\mathcal{P}_{imp} = \frac{P_\sigma(\sigma_\Lambda^0)}{\Lambda} L. \quad (5.90)$$

Când propagarea liniară a regiunii de incertitudine este o bună aproximație, aceste formule vor indica corect ordinul de mărime al probabilității de impact. Pentru cazurile neliniare, va fi necesară o abordare numerică a integralei (5.85).

Evaluarea numerică. Metoda de integrare Monte-Carlo

Considerăm N puncte distribuite aleator într-un volum multidimensional $V \subseteq \mathbb{R}^n$, după o lege de distribuție având densitatea de probabilitate p în V . Spunem ca domeniul V a fost *eșantionat* cu punctele respective. *Teorema fundamentală a integrării Monte-Carlo* estimează integrala dintr-o funcție $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ peste domeniul V , prin [Press *et al.*, 1997]

$$\int_V f dV \approx \left\langle \frac{f}{p} \right\rangle \pm \sqrt{\frac{\langle f^2/p^2 \rangle - \langle f/p \rangle^2}{N}}, \quad (5.91)$$

unde $\langle \cdot \rangle$ semnifică media aritmetică discretă a variabilei aleatoare din argument peste cele N puncte de eșantionare.

Acest rezultat se obține ușor, aproximând media aritmetică discretă a variabilei aleatoare f/p peste cele N puncte de eșantionare, cu valoarea medie calculată pe domeniul V , adică

$$\left\langle \frac{f}{p} \right\rangle \approx \left\langle \frac{f}{p} \right\rangle_V = \int_V \left(\frac{f}{p} \right) p dV = \int_V f dV, \quad (5.92)$$

având eroarea medie de estimare $\sigma(f/p)/\sqrt{N}$, în ipoteza distribuției gaussiene a erorilor de eșantionare, unde

$$\sigma(f/p) = \sqrt{\langle f^2/p^2 \rangle - \langle f/p \rangle^2} \quad (5.93)$$

notează abaterea medie pătratică a variabilei aleatoare f/p .

Un caz particular remarcabil este cazul distribuției uniforme a punctelor de eșantionare, când $p = 1/V$, și astfel teorema (5.91) devine

$$\int_V f dV \approx V \langle f \rangle \pm V \sqrt{\frac{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}{N}}. \quad (5.94)$$

Revenind acum la cazul general, vom particulariza funcția f în modul următor: dacă $V' \subseteq V$ este un subdomeniu nevid al lui V , atunci considerăm

$$f : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} p, & x \in V' \\ 0, & x \in V \setminus V'. \end{cases} \quad (5.95)$$

Dacă k notează numărul de puncte din totalul de N care aparțin subdomeniului V' în urma distribuției lor aleatoare, atunci $\langle f/p \rangle = \langle f^2/p^2 \rangle = k/N$ și în plus avem estimarea

$$\int_{V'} p dV = \int_V f dV \approx \frac{k}{N} \pm \frac{k}{N} \sqrt{\frac{1}{k} - \frac{1}{N}}, \quad (5.96)$$

care este tocmai probabilitatea ca cele N puncte de eșantionare să se găsească toate în subdomeniul V' . Această estimare este cu atât mai exactă cu cât numărul N de puncte este mai mare. Dacă $k = 0$, estimare poate fi eronată, deoarece nu înseamnă că probabilitatea respectivă este zero, ci mai degrabă că numărul punctelor de eșantionare a fost prea mic, încât nici unul nu a fost generat în subdomeniul V' , probabil mult mai restrâns ca V . Concluzionăm că estimarea ordinului de mărime al unei probabilități, prin relația (5.96), necesită un număr de puncte de eșantionare cel puțin egal cu inversul probabilității respective.

Se observă că evaluarea probabilității de impact (5.85) constituie o aplicație imediată a acestei teoreme de integrare Monte-Carlo. Și anume, se consideră un număr arbitrar de asteroizi virtuali generați în regiunea inițială de incertitudine după o lege de distribuție prestabilită, care sunt apoi propagați în planul țintă corespunzător apropierei strânse date, unde se evaluează numărul impactorilor virtuali. Raportul dintre acest număr și numărul asteroizilor virtuali generați va fi o estimare numerică a probabilității de impact căutate. Estimarea va fi cu atât mai bună, cu cât eșantionarea regiunii inițiale de incertitudine va fi mai densă.

5.2.6 Eșantionarea iterativă de tip Monte-Carlo

Metoda Monte-Carlo aplicată în maniera descrisă anterior nu permite detectarea probabilităților de impact având valori foarte mici. Spre exemplu, estimarea unei probabilități cu ordinul de mărime 10^{-8} necesită propagarea în timp, în cadrul problemei generale a celor n corpuri, a unui număr de cel puțin 10^8 corpuri, acesta fiind un proces de calcul mult prea costisitor pentru aplicațiile practice. Din acest motiv, s-au căutat căi alternative de interpolare a rezultatelor în cadrul metodei Monte-Carlo, folosind un număr mai redus de corpuri. În acest paragraf vom propune o astfel de metodă alternativă de estimare a probabilității de impact [Berinde, 2002].

Pentru cele ce urmează, vom presupune că regiunea inițială de incertitudine este bine aproximată printr-un elipsoid de incertitudine \mathcal{E}_0 , căruia îi sunt caracteristice cele șase semiaxe din spațiul elementelor orbitale, $\sigma\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sigma\sqrt{\lambda_6}$, exprimate în funcție de valorile proprii ale matricii covariante (ecuația 5.59), și densitatea de probabilitate $P_0(E)$ ce descrie distribuția elementelor orbitale E în elipsoid, în raport cu soluția nominală.

Problema de natură topologică ce ne propunem să o rezolvăm este aceea de a izola, în elipsoidul de incertitudine adus la forma canonică, regiunea care este preimaginea impactorilor virtuali dintr-un anumit șir virtual din planul țintă, folosind pentru aceasta un număr cât mai mic de puncte de eșantionare (asteroizi virtuali), precum și calitatea topologică a unui șir virtual de a proveni dintr-o aceeași vecinătate a elipsoidului. Ideea metodei este de a considera mai multe etape succesive de eșantionare a unor regiuni din ce în ce mai restrânse care, în final, să izoleze cât mai bine mulțimea impactorilor virtuali. Evaluând apoi funcția de repartiție a elementelor orbitale în ultima regiune eșantionată, vom putea da o estimare a probabilității de impact.

Prima etapă de eșantionare presupune generarea unui număr N de asteroizi virtuali în întreg elipsoidul de incertitudine, având seturile de elemente orbitale E_1, E_2, \dots, E_N . Aceștia se propagă numeric pe planul țintă corespunzător în punctele T_1, T_2, \dots, T_N . Presupunem că asteroizii virtuali sunt deja indexați în ordinea crescătoare a distanțelor lor la centrul planetei, măsurate pe planul respectiv, anume $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_N$. Asteroidul cu elementele orbitale inițiale E_1 , ajungând cel mai aproape de planetă, va fi considerat centrul noii regiuni de eșantionare. În continuare vom întreprinde o analiză locală în jurul punctului T_1 , pentru a fi în măsură să precizăm dimensiunile acestei regiuni.

Fie $\rho_{12}, \rho_{13}, \dots, \rho_{1N}$ distanțele de la acest asteroid la toți ceilalți măsurate, de asemenea, în planul țintă. Definim mulțimea,

$$M = \{T_2\} \cup \{T_i \mid d_i \leq R_p, i = \overline{3, N}\} \cup \{T_j \mid \rho_{1j} \leq d_1, j = \overline{3, N}\}, \quad (5.97)$$

ce reunește în jurul lui T_1 pe următorul asteroid, în ordinea distanței sale la planetă, pe potențialii asteroizi ce au fost deja identificați ca impactori virtuali, precum și pe acei a căror distanță la asteroidul T_1 este mai mică decât distanța minimă la planetă, d_1 . În această manieră, vom fi siguri că noua regiune ce urmează a fi eșantionată nu devine prea mică înainte de a izola suficient de bine mulțimea impactorilor virtuali.

Dacă M^{-1} notează preimaginea mulțimii M în elipsoidul de incertitudine, numărul

$$r = \max\{\|E - E_1\|, E \in M^{-1}\} \quad (5.98)$$

definește raza unei vecinătăți $H(E_1, r) = \{E \in \mathbb{R}^6, \|E - E_1\| \leq r\}$ cu centrul în E_1 , ce conține mulțimea M^{-1} . Intersecția acestei regiuni cu elipsoidul de incertitudine va forma noua regiune de eșantionare. Pentru simplitatea procesului de eșantionare, metrica cu ajutorul căreia vom măsura distanțele în elipsoid o alegem metrica Cebășev

$$\|X - Y\| = \max\{|x^1 - y^1|, |x^2 - y^2|, \dots, |x^6 - y^6|\}, \quad X, Y \in \mathbb{R}^6, \quad (5.99)$$

astfel încât, $H(E_1, r)$ va fi un hiper cub hexadimensional de latură $2r$.

Pașul următor constă în eșantionarea regiunii $S = H(E_1, r) \cap \mathcal{E}_0$, tot cu un număr N de puncte, care se vor propaga din nou în planul țintă unde, în general, vor ocupa o suprafață mult mai restrânsă, dar care va prezenta un grad ridicat de alungire de-a lungul LOV, precum regiunea inițială. Se va identifica din nou cel mai apropiat asteroid virtual de planetă, prin intermediul căruia se va construi o nouă mulțime M , o nouă rază r și o nouă regiune de eșantionare S .

În urma unui proces iterativ de eșantionare, fie $E^{(n)}$ șirul elementelor orbitale ale asteroizilor virtuali identificați ca centre ale regiunilor de eșantionare, iar $S^{(n)}$ șirul acestor regiuni de eșantionare. În condiții optime de eșantionare, șirul $E^{(n)}$ va converge spre elementele orbitale ale celui mai apropiat impactor virtual de centrul planetei, iar $S^{(n)}$ va conține toți impactorii virtuali. Metoda iterativă se oprește după un număr predefinit de pași, sau când se constată că procesul de eșantionare nu scoate la iveală asteroizi virtuali mai apropiați de planetă decât predecesorii.

Dacă S^n notează ultima regiune de eșantionare după n pași de iterație, având centrul în E^n , iar k reprezintă numărul de impactori virtuali conținuți de aceasta, o estimare a probabilității de impact se obține din

$$\mathcal{P}_{imp} = \frac{k}{N} \int_{S^n} P_0(E) dE, \quad (5.100)$$

pentru care a fost necesară generarea unui număr de doar nN asteroizi virtuali, cu câteva ordine de mărime mai mic decât inversul probabilității determinate. Integrala din membrul drept se poate determina, spre exemplu, tot printr-o procedură de tip Monte-Carlo descrisă prin relația (5.96), eșantionând întregul elipsoid de incertitudine \mathcal{E}_0 . Pe de altă parte, se pot formula câteva aproximații analitice valabile în anumite cazuri limită particulare, pe care le vom analiza în cele ce urmează.

Dacă $r_n \ll \min\{\sigma\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sigma\sqrt{\lambda_6}\}$ atunci S^n este suficient de restrânsă pentru ca $S^n = H(E^n, r_n) \subset \mathcal{E}_0$ și densitatea de probabilitate din interiorul său să poată fi considerată constantă. Vom avea aproximarea

$$\mathcal{P}_{imp} = (2r_n)^6 \frac{k}{N} P_0(E^n). \quad (5.101)$$

Dacă legea de distribuție în elipsoid se consideră una normală, atunci valoarea maximă se obține în punctul corespunzător soluției nominale $P_0(E^*) = 1/(8\pi^3\sqrt{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_6})$, iar dacă legea de distribuție este uniformă, atunci vom avea o valoare constantă în întreg elipsoidul de incertitudine $P_0(E) = 6/(\pi^3\sigma^6\sqrt{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_6})$, expresie determinată din condiția

$$P_0(E) \int_{\mathcal{E}_0} dE = 1. \quad (5.102)$$

Un al doilea caz limită îl regăsim atunci când elipsoidul inițial de incertitudine este foarte alungit (de-a lungul LOV), spre exemplu, $\lambda_6 \gg \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_5\}$. Atunci, mai mult ca sigur vom avea și $r_n \gg \max\{\sigma\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sigma\sqrt{\lambda_5}\}$ și astfel putem considera că regiunea de eșantionare S^n va conține o porțiune a LOV cuprinsă între longitudinile mijloci λ și λ' (cu $\lambda' - \lambda \approx 2r_n$), încât putem estima

$$\mathcal{P}_{imp} = \frac{k}{N} \int_{\lambda}^{\lambda'} P_0(\lambda) d\lambda, \quad (5.103)$$

unde $P_0(\lambda)$ notează acum densitatea de probabilitate unidimensională de-a lungul LOV. În cazul distribuției uniforme, vom avea simplu

$$\mathcal{P}_{imp} = \frac{k}{N} \frac{r_n}{\sigma\sqrt{\lambda_1}}. \quad (5.104)$$

Această metodă de determinare a probabilității de impact are și ea, desigur, limite de aplicabilitate (în timp). Ele sunt legate, în primul rând, de necesitatea eșantionării șirului virtual asupra căruia ne-am fixat atenția cu un număr suficient de mare de puncte, astfel încât regiunile de eșantionare rezultate în urma analizei topologice locale să nu cuprindă asteroizi virtuali aparținând altor șiruri virtuale, a căror preimagine în elipsoidul de incertitudine nu se găsească în vecinătatea ce dorim să o izolăm. În acest caz, eșecul metodei constă în imposibilitatea identificării de impactori virtuali. În general, alegerea unui număr mai mare N de puncte de eșantionare (cel puțin pe primul pas de iterație) înlătură acest neajuns.

Prezentăm în continuare două aplicații practice ale metodei iterative expusă anterior, și anume, la determinarea probabilității de impact cu Pământul a doi asteroizi NEA, 2000 SG₃₄₄ și 2001 BA₁₆, la primele lor apropieri strânse cu planeta noastră pentru care am identificat impactori virtuali. Elementele orbitale inițiale și elementele matricii covariante ce definesc elipsoidul de incertitudine sunt valabile la epoca 2001 Oct. 18.00 UT (JD 2452200.5).

Pentru primul asteroid, intervalul de timp JD 2477700–2477900 delimitează perioada de producere a apropierii strânse cu Pământul care generează impactorii virtuali, iar pentru cel de-al doilea asteroid, intervalul respectiv de timp este JD 2466400–2466600. Pentru identificarea impactorilor virtuali a fost folosit un număr de 500 de puncte de eșantionare pe pasul de iterație, rezultatele calculelor fiind prezentate în tabelul următor. Eșantionarea s-a efectuat considerând o distribuție uniformă a asteroizilor virtuali în acest elipsoid, până la limita $\sigma = 3$.

Nume asteroid	2000 SG ₃₄₄	2001 BA ₁₆
Număr de iterații efectuate	$n = 2$	$n = 3$
Impactori identificați	$k = 9$	$k = 10$
Elementele orbitale ale celui mai apropiat impactor virtual identificat, valabile la epoca inițială 2001 Oct. 18.00 UT (JD 2452200.5)	$a = 0.9776044188$ UA $e = 0.0669830990$ $I = 0^\circ.10934932$ $\Omega = 192^\circ.53703809$ $\omega = 274^\circ.61406671$ $M = 300^\circ.46664608$	$a = 0.9404420998$ UA $e = 0.1370062676$ $I = 5^\circ.75614065$ $\Omega = 115^\circ.64065318$ $\omega = 242^\circ.81635947$ $M = 40^\circ.17319347$
Distanța minimă de impact	0.16 (raze terestre)	0.54 (raze terestre)
$\int_{S^n} P_0(E) dE$	$3 \cdot 10^{-3} \pm 2\%$	$7 \cdot 10^{-5} \pm 3\%$
Data producerii evenimentului	2071 Sep. 16.05 UT (JD 2477735.55)	2041 Ian. 15.06 UT (JD 2466534.56)
Probabilitatea de impact	$\approx 5 \cdot 10^{-5}$	$\approx 10^{-6}$

Tabelul 5.1. Date privind probabilitățile de impact cu Pământul ale asteroizilor 2000 SG₃₄₄ și 2001 BA₁₆, cu ocazia a două apropieri strânse pentru care există impactori virtuali.

Dimensiunile ultimei regiuni eșantionate au fost determinate numeric prin metoda Monte-Carlo, în tabel figurând și eroarea de estimare (folosind relația 5.96).

În figurile (5.10) și (5.11) sunt prezentate imaginile discrete ale regiunii de incertitudine pe planul țintă, pentru fiecare pas de iterație. Pentru această reprezentare au fost folosite formulele de proiecție (5.84). Au fost marcați cu o săgeată asteroizii virtuali a căror preimagine în elipsoidul inițial de incertitudine a constituit centrul noii regiuni de eșantionare. Se remarcă aici propagarea neliniară a regiunii de incertitudine în preajma Pământului, datorită efectului de atracție gravitațională al acestuia.

De precizat că elipsoidele inițiale de incertitudine ale celor doi asteroizi sunt destul de reduse, spre exemplu, asteroidul 2000 SG₃₄₄ are o incertitudine în anomalia mijlocie (pentru $\sigma = 1$) de $\delta M = 0^\circ.00057$, iar pentru asteroidul 2001 BA₁₆ avem $\delta M = 0^\circ.00566$. Ulterior însă, cei doi asteroizi vor înregistra apropieri strânse cu Pământul (în anul 2029, respectiv 2032) ce vor

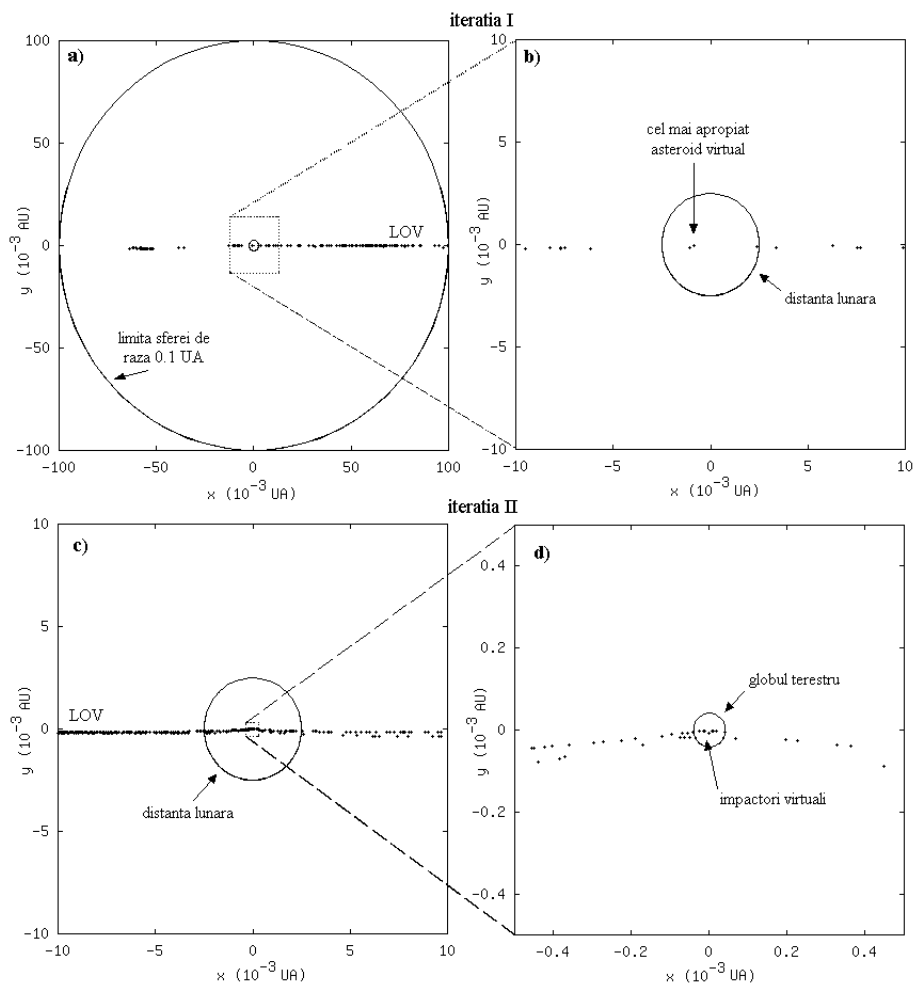


Figura 5.10. Imaginile pe planul țintă a regiunii de incertitudine a asteroidului 2000 SG₃₄₄ în cele două etape de iterație ale metodei Monte-Carlo de determinare a impactorilor virtuali.

genera “explozia” regiunii de incertitudine de-a lungul linie de variație (LOV), permițând astfel asteroizilor virtuali să ocupe zone extinse pe orbită.

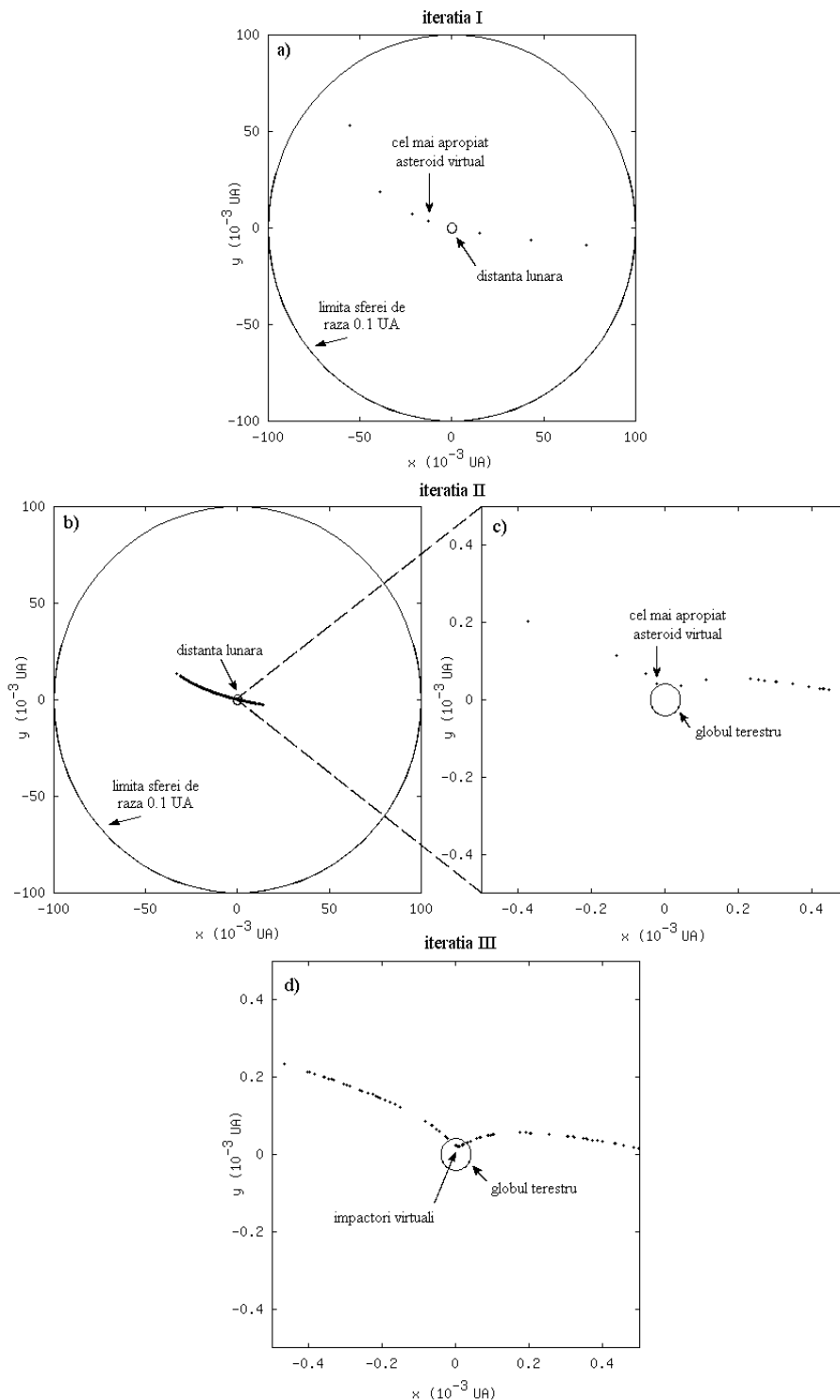


Figura 5.11. Imaginile pe planul țintă a regiunii de incertitudine a asteroidului 2000 BA₁₆ în cele trei etape de iterație ale metodei Monte-Carlo de determinare a impactorilor virtuali.

5.3 Cuantificarea pericolului de impact

Creșterea din ultimii ani a ratei descoperirilor de asteroizi NEA, precum și interesul tot mai mare manifestat de comunitatea astronomică internațională față de acest domeniu, au con-

dus la concentrarea eforturilor către dezvoltarea de modele matematice de estimare a probabilității de impact cu Pământul (prezentate în paragraful anterior). Ca rezultat, s-au determinat deja numeroase orbite de impact cu Pământul pe parcursul acestui secol, compatibile cu datele observaționale ale unor asteroizi NEA. A apărut astfel necesitatea de a măsura importanța relativă și absolută a unui potențial impact, atât pentru a putea decide lista de priorități observaționale și de calcul, cât și de a comunica publicului larg gradul de pericolozitate al fenomenului respectiv. În ultimii ani au fost introduse două scări ce cuantifică pericolul de impact, *scara Torino* și *scara Palermo*, ambele purtând numele orașelor italiene unde au avut loc manifestările științifice de adoptare oficială a lor, Torino (1999) și Palermo (2001).

5.3.1 Scara Torino

Scara Torino constituie, în principal, un sistem simplu de comunicare către publicul larg a importanței unui potențial impact cu Pământul. Această importanță este cuantificată în termeni: energie de impact și probabilitate de impact (cumulată pe 100 de ani), mărimi reprezentate pe o scară bidimensională ce permite apoi citirea așa numitului *grad de pericolozitate* (“hazard index”) [Binzel, 1997].

Energia cinetică de impact este $E = \frac{1}{2}mv^2$, unde m reprezintă masa asteroidului, iar v viteza sa de impact. Masa unui asteroid este foarte greu de estimat cu tehnicile observaționale actuale, mai ales în cazul asteroizilor NEA care pot fi observați doar pe perioade scute de timp când sunt în preajma Pământului. Câteva metode de estimare a masei au fost deja prezentate în paragraful 4.3 al lucrării. Amintim aici doar faptul că valoarea adoptată pentru masă este sursa principală de incertitudine în ceea ce privește estimarea valorii energiei de impact, deci și a consecințelor distructive ale sale.

Estimarea vitezei de impact se poate da cu o acuratețe suficientă pentru nevoile curente, folosind formalismul lui Öpik de descriere al apropierilor strânse. Astfel, din relația (2.86) avem

$$v^2 = v_\infty^2 + (11.18 \text{ km/s})^2, \quad (5.105)$$

unde “viteza la infinit”, care este tot una cu viteza planetocentrică neperturbată (relația 2.62), se obține din

$$v_\infty^2 = G \left[3 - \frac{1}{a} - \sqrt{a(1 - e^2)} \cdot \cos I \right], \quad (5.106)$$

exprimată în funcție de elementele heliocentrice ale orbitei asteroidului (a, e, I) și de constanta gravitațională heliocentrică G .

Pentru a oferi un termen de comparație, va fi utilă exprimarea energiei cinetice de impact în modul următor, funcție de densitatea asteroidului ρ , de diametrul său mediu d (obținute din descompunerea $m = \frac{\pi}{6}\rho d^3$, valabilă pentru un corp sferic omogen) și de viteza de impact v [Hills și Goda, 1993]

$$E \approx 75 \text{ Mt} \left(\frac{d}{100 \text{ m}} \right)^3 \left(\frac{\rho}{3 \text{ g/cm}^3} \right) \left(\frac{v}{20 \text{ km/s}} \right)^2, \quad (5.107)$$

exprimată în megatone TNT ($1 \text{ Mt} = 4.2 \times 10^{15} \text{ J}$). La numitor figurează presupusele valori medii ale mărimilor respective.

În funcție de valorile energiei de impact, s-a adoptat o clasificare a consecințelor distructive (la scară planetară a) unui impact, ordonată pe patru nivele (globale, regionale, locale și fără consecințe) [Binzel, 1997]. Această clasificare este prezentată în figura următoare unde, pe axa verticală, figurează energia cinetică de impact, dublată fiind și de o reprezentare după diametrul asteroidului calculat pentru valori medii ale densității și vitezei de impact. O caracterizare matematică riguroasă a acestor consecințe distructive va fi dată în ultimul paragraf al capitolului.

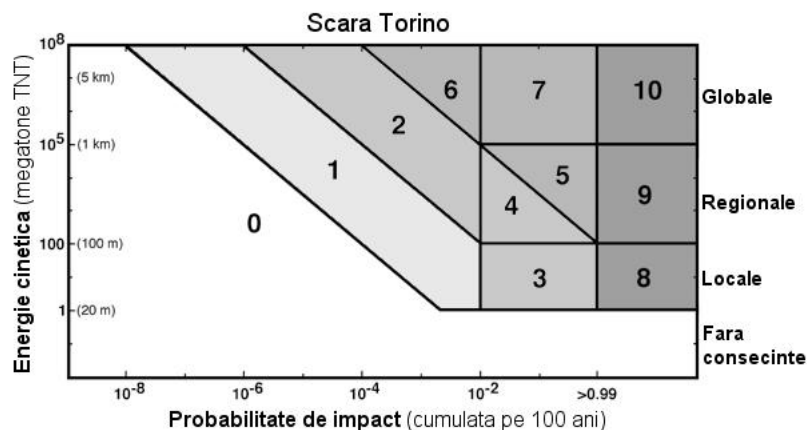


Figura 5.12. Scara bidimensională Torino și gradele de pericolozitate asociate.

Pe de altă parte, probabilitatea cumulată de impact (pe 100 de ani) se poate exprima în funcție de probabilitățile intrinseci P_i calculate în intervalul de timp respectiv, prin

$$P_c = 1 - (1 - P_1)(1 - P_2) \dots (1 - P_n), \quad (5.108)$$

sau când acestea sunt cantități mici, prin însumarea lor. Determinarea acestor probabilități intrinseci a făcut subiectul paragrafelor anterioare, aici vom sublinia doar faptul că incertitudinea estimărilor lor, în cadrul modelelor matematice actuale, poate atinge în unele cazuri un ordin de mărime [Chesley *et al.*, 2001].

Pe aceeași figură (5.12), sunt reprezentate șase clase asociate acestei probabilități cumulate de impact, ele având la bază clasificarea empirică din tabelul următor [Binzel, 1997].

Posibilitatea unui impact	Probabilitate cumulată
practic nulă	$P_c < 10^{-8}$
extrem de improbabilă	$10^{-8} \leq P_c < 10^{-6}$
foarte improbabilă	$10^{-6} \leq P_c < 10^{-4}$
improbabilă	$10^{-4} \leq P_c < 10^{-2}$
posibilă	$0.01 \leq P_c < 0.99$
sigură	$P_c \geq 0.99$

Tabelul 5.2. Clasificarea empirică a posibilității producerii unui impact, în funcție de probabilitatea de impact asociată asteroidului respectiv.

Prin combinarea celor două clasificări într-o reprezentare grafică, rezultă scara bidimensională Torino, pe care se poate citi acum gradul de pericolozitate, având valori întregi cuprinse între 0 și 10. Printr-o reuniune subiectivă a acestor grade, rezultă cinci categorii de caracterizare a importanței unui potențial impact. Acestea sunt prezentate în tabelul (5.3).

Gradul de pericolozitate asociat unui asteroid NEA este dependent de momentul de timp când acesta se evaluează. Astfel, contribuția unor date observaționale ulterioare vor conduce la micșorarea incertitudinii orbitale, deci la o mai bună precizare a probabilității de impact, încât gradul de pericolozitate s-ar putea modifica, în general, de la valori intermediare spre valori extreme. Majoritatea covârșitoare a asteroizilor NEA descoperiți până în prezent au gradul de pericolozitate 0, doar câțiva cu orbite insuficient de bine precizate figurând în categoria 1. Cu noi date observaționale ce vor deveni disponibile, aceștia vor intra probabil și ei în prima categorie.

Grad de pericolozitate	Caracterizare
0	Eveniment fără consecințe
1	Eveniment ce merită atenție
(2,3,4)	Eveniment ce produce îngrijorare
(5,6,7)	Eveniment amenințător
(8,9,10)	Coliziune sigură

Tabelul 5.3. Caracterizarea subiectivă a importanței unui posibil impact în funcție de gradul de pericolozitate.

5.3.2 Scara Palermo

Scara Torino are dezavantajul de a nu include în evaluarea importanței unui impact și intervalul de timp ce se va scurge până la producerea evenimentului în sine, așa numitul *timp de avertisment* (“warning time”) [Isobe, 2000]. Un potențial impact cu un timp de avertisment scurt este, indiscutabil, mai amenințător decât un impact prognozat a avea loc peste zeci de ani, timp suficient pentru elaborarea unor strategii de minimizare a efectelor sale. Acest argument, precum și nevoia de a avea un sistem de caracterizare mai robust și mai bine fundamentat științific, a condus la crearea scării Palermo [Chesley *et al.*, 2001].

Scara Palermo are ca principal scop facilitarea comunicării între astronomi a importanței unui potențial impact, având la bază cei trei factori relevanți: timpul de avertisment, energia cinetică de impact și probabilitatea de impact (intrinsecă sau cumulată într-un interval arbitrar de timp). Gradul de pericolozitate caracteristic acestei scări se evaluează în funcție de câteva mărimi având măsura energiei de impact, pe care le vom defini în cele ce urmează.

Dacă E notează energia de impact așa cum a fost ea introdusă anterior, iar P este probabilitatea de impact, produsul $\tilde{E} = PE$ definește *energia anticipată de impact* proprie evenimentului respectiv, care este o cantitate de natură probabilistică. Aceasta va fi apoi raportată la fluxul energiei de impact (calculat la energii similare cu E) asociat întregii populații de obiecte NEA, pe intervalul de timp scurs până la producerea evenimentului. În acest mod vom obține o caracterizare în termeni naturali (riscul normalizat) a relevanței evenimentului respectiv, pe o scară adimensională.

Frecvența medie anuală a impacturilor cu Pământul a întregii populații de asteroizi NEA, având energii de impact mai mari decât E (exprimat în megatone TNT), determinată din înregistrările craterelor lunare, poate fi descrisă (aproximativ) printr-o lege exponențială [Chesley *et al.*, 2001]

$$f_B(E) = \frac{3}{100} E^{-4/5} \text{ (/an)}. \quad (5.109)$$

Dacă dăm acestei mărimi sensul unei probabilități anuale de impact pentru energii mai mari ca E , putem introduce densitatea de probabilitate de impact corespunzătoare $\phi(E) = \frac{3}{125} E^{-9/5}$, dedusă din condiția $f_B(E) = \int_E^\infty \phi(E) dE$. Cu această mărime vom putea evalua acum fluxul mediu anual al energiei de impact asociat întregii populații NEA, în banda de energie $(\alpha - \alpha^{-1})E$

$$\tilde{E}_B(E, \alpha) = \int_{E/\alpha}^{\alpha E} E \phi(E) dE = \frac{3}{25} (\alpha^{1/5} - \alpha^{-1/5}) E^{1/5}. \quad (5.110)$$

Dacă ΔT notează timpul de avertisment corespunzător, iar $k = 4(\alpha^{1/5} - \alpha^{-1/5})$, vom defini *riscul normalizat* \mathcal{R} ca raportul dintre energia anticipată de impact și fluxul energiei de impact (calculat la energii similare cu E) asociat întregii populații de obiecte NEA, pe intervalul de timp mai sus menționat

$$\mathcal{R} = \frac{\tilde{E}}{\tilde{E}_B(E, \alpha)\Delta T} = \frac{P}{k f_B \Delta T}, \quad (5.111)$$

având și sensul unei probabilități normalizate de impact. Cu cât banda de energie folosită este mai largă, cu atât mai mică va fi valoarea riscului normalizat. Pentru scara ce urmează a fi introdusă se adoptă valoarea $k = 1$, careia îi corespunde o bandă de energie egală cu aproximativ $1.33 E$. Gradul de periculozitate pe scara Palermo se definește prin $\mathcal{P} = \lg \mathcal{R}$, cu valori tipice cuprinse între -11 și -1. Importanța unui potențial impact cu Pământul va fi astfel caracterizată într-un mod consistent doar prin mărimea \mathcal{P} . O valoare pozitivă a sa semnifică faptul că evenimentul respectiv este mai amenințător decât întreaga populație de obiecte NEA (de dimensiuni similare asteroidului în cauză) luată la un loc, pe același interval de timp, putând fi astfel considerat ca fiind o sursă majoră de pericol.

Acest mod de definire al scării Palermo permite estimarea gradului de periculozitate al unui asteroid pe intervale oricât de mari de timp, caz în care se poate folosi în formula (5.111) și valori ale probabilității medii de impact, deduse prin diverse procedee de mediere sau extrapolare (paragraful 5.1).

Pentru asterozii 2000 SG₃₄₄ și 2001 BA₁₆, ale căror probabilități de impact cu Pământul au fost evaluate pe parcursul acestui capitol, avem următoarele estimări ale gradului de periculozitate pe scara Palermo, prezentate împreună cu câteva mărimi auxiliare în tabelul următor.

Obiect	v (km/s)	d (m)	E (Mt)	f_B (/an)	ΔT (ani)	P	\mathcal{R}	\mathcal{P}
2000 SG ₃₄₄	11.34	40	1.1	2.8×10^{-2}	100	5×10^{-5}	1.8×10^{-5}	-4.7
2000 SG ₃₄₄ †	11.34	40	1.1	2.8×10^{-2}	10^5	4.4×10^{-2}	1.6×10^{-5}	-4.8
2001 BA ₁₆	12.14	20	0.3	7.9×10^{-2}	50	10^{-6}	2.5×10^{-7}	-6.6

Tabelul 5.4. Parametri relevanți pentru calculul gradului de periculozitate al asteroizilor 2000 SG₃₄₄ și 2001 BA₁₆. († în acest caz parametri sunt calculați pentru o probabilitate de impact extrapolată din frecvența apropiierilor strânse cu Pământul, într-un interval de 100.000 de ani).

5.3.3 Consecințe ale fenomenului de impact

O evaluare a consecințelor fenomenului de impact la nivelul solului va trebui să ia în considerare, pe lângă energia cinetică inițială a asteroidului (E), și modul în care aceasta se diminuează datorită interacțiunii cu atmosfera terestră ($E_f \leq E$) și natura mediului în care are loc impactul (uscat sau ocean).

Interacțiunea cu atmosfera se poate descrie în termenii procesului de ardere (ablație) și al procesului de fragmentare [Hills și Goda, 1993]. Modul de desfășurare al acestor fenomene va depinde de parametri fizici și dinamici inițiali ai asteroidului (masa, densitatea, rezistența internă, viteza și unghiul de intrare în atmosferă). Un nucleu cometar va avea șanse puține de a ajunge pe sol, depozitându-și întreaga energie cinetică în atmosferă, pe când un asteroid cu nucleu fieros va suferi puține transformări, ajungând aproape intact la nivelul solului. Majoritatea asteroizilor NEA au însă o structură pietroasă și deci traseul lor evolutiv prin atmosferă se va situa undeva între cele două scenarii descrise. Oricum, pentru dimensiuni mai mari de 100 de metri în diametru, influența atmosferei terestre va fi neglijabilă.

Chiar dacă întreaga energie cinetică a unui asteroid cu structură internă slabă (de origine cometară) este depozitată în atmosferă în urma unei explozii, unda de șoc rezultată poate avea consecințe distructive majore (fenomenul Tunguska). Astfel, dacă explozia respectivă are loc la o altitudine h în atmosferă, raza regiunii de pe suprafața Pământului în care presiunea indusă de unda de șoc este capabilă să distrugă orice construcție urbană este dată de formula aproximativă

$$R_e \approx 2.09 h - 0.449 h^2 E^{-1/3} + 5.08 E^{1/3} \text{ [km]}, \quad (5.112)$$

dedusă din datele experimentale ale efectelor exploziilor nucleare efectuate în anii '40 și '50 [Hills și Goda, 1993]. În această formulă distanțele sunt exprimate în kilometri iar energia cinetică în Mt. Se pot deduce următoarele valori critice ale înălțimii în atmosferă: înălțimea minimă pentru care efectul undei de șoc devine nedestructiv ($R_e = 0$) este $h_{min} = 6.42 E^{1/3}$ și înălțimea “optimă” pentru o rază maximă de distrugere este $h_{opt} = 2.33 E^{1/3}$. Astfel, diametrul maxim al regiunii distruse de unda de șoc, în funcție de parametri inițiali ai impactorului, este

$$D_e \approx 15.8 \text{ km} \left(\frac{d}{100 \text{ m}} \right) \left(\frac{\rho}{3 \text{ g/cm}^3} \right)^{1/3} \left(\frac{v}{20 \text{ km/s}} \right)^{2/3}, \quad (5.113)$$

notațiile fiind cele din relația (5.107).

Diametrul craterului produs în urma unui impact (sau explozie nucleară), având energia cinetică E_f la nivelul solului, este dat de $D_c \approx 1.02 E_f^{1/3}$ [km]. Presupunând că dimensiunile impactorului sunt suficient de mari, încât acesta să nu piardă o cantitate semnificativă din energia sa la trecerea prin atmosferă (în general pentru $d > 100$ m), iar rezistența internă suficient de mare pentru ca să nu sufere fragmentări (compoziție pietroasă sau fieroasă), diametrul craterului produs de acesta se exprimă prin

$$D_c \approx 4.3 \text{ km} \left(\frac{d}{100 \text{ m}} \right) \left(\frac{\rho}{3 \text{ g/cm}^3} \right)^{1/3} \left(\frac{v}{20 \text{ km/s}} \right)^{2/3}. \quad (5.114)$$

Comparând expresiile (5.113) și (5.114), obținem că gradul de distrugere la sol datorat exploziei în atmosferă ar putea fi mai mare decât cel produs printr-un impact efectiv la nivelul solului, în acest ultim caz o mare parte din energia de impact fiind absorbită de scoarța terestră. Pe de altă parte însă, procesul de formare al craterului va fi însoțit de un seism al cărui magnitudine pe scara Richter este evaluată la

$$\begin{aligned} M &\approx 6.0 + 0.7 \lg E_f \\ &\approx 7.3 + 2.1 \lg \left(\frac{d}{100 \text{ m}} \right) + 0.7 \lg \left(\frac{\rho}{3 \text{ g/cm}^3} \right) + 1.4 \lg \left(\frac{v}{20 \text{ km/s}} \right), \end{aligned} \quad (5.115)$$

unde a doua egalitate are la bază din nou ipoteza $E_f \approx E$.

Valurile declanșate de impacturi în ocean se pare că sunt cea mai distructivă formă de manifestare a acestui fenomen, pentru impactori de dimensiuni medii ($100 < d < 1000$ m). Astfel, experimentele nucleare subacvatice relevă următoarea dependență a înălțimii valului produs în apă adâncă, datorită fenomenului de golire și reumplere al craterului subacvatic format, funcție de distanța r la locul detonării

$$H_w \approx 15.7 \text{ m} \left(\frac{100 \text{ km}}{r} \right) E_f^{0.54}. \quad (5.116)$$

Doar jumătate din această înălțime va corespunde părții superioare a valului situată deasupra nivelului oceanului [Hills și Mader, 1997]. Pentru asteroizii mai mari care nu suferă pierderi semnificative de energie în atmosferă, expresia anterioară se scrie

$$H_w \approx 16.2 \text{ m} \left(\frac{1000 \text{ km}}{r} \right) \left[\left(\frac{d}{100 \text{ m}} \right)^3 \left(\frac{\rho}{3 \text{ g/cm}^3} \right) \left(\frac{v}{20 \text{ km/s}} \right)^2 \right]^{0.54}. \quad (5.117)$$

Viteza inițială a valului format în apă adâncă este de câteva sute de km/h. Odată ajuns în preajma țărmului, unde apa este mai mică, viteza sa scade iar amplitudinea sa crește, formând

așa numitul *tsunami*. Înălțimea unui tsunami este, în medie, de 40 de ori mai mare decât a valului de apă adâncă ce la generat. Datorită faptului că majoritatea resurselor umane de pe glob se găsesc pe coasta oceanelor, acest tip de impact se dovedește a fi cel mai distructiv.

Capitolul 6

Pachetul de programe SolSyIn

Numeroase rezultate cuprinse în capitolele anterioare ale lucrării au la bază simulări numerice ale evoluției dinamice a unor sisteme de corpuri. Dezvoltarea tehnicii de calcul din ultimii ani conferă algoritmilor numerici rapiditatea și capacitatea de stocare necesare abordării unor astfel de probleme, ce sunt intens consumatoare de resurse informatice.

În acest capitol este prezentat un pachet de programe destinat manipulării sistemelor dinamice de corpuri, cu ajutorul cărui au fost reproduse scenariile de evoluție dinamică cuprinse în lucrare. După o scurtă prezentare a pachetului, se face apoi o descriere matematică a integratorului Radau-Everhart, optimizat pentru tratarea cu mare acuratețe a apropiierilor strânse dintre corpuri. O prezentare exhaustivă a tuturor facilităților oferite de pachet este dată în manualul său de utilizare [Berinde, 2001c].

6.1 Prezentarea pachetului

SolSyIn (de la “SOLar SYstem INtegrator”) este un pachet de programe destinat efectuării de integrări numerice asupra evoluției dinamice a corpurilor în sistemul solar (și nu numai). În primul rând, el conține un program de integrare numerică a ecuațiilor de mișcare a unui număr arbitrar de corpuri, ce evoluează în câmp gravitațional (newtonian/relativist) și, eventual, în câmp radiativ, al cărui algoritm numeric are la bază integratorul Radau-Everhart. De asemenea, conține un program de afișare grafică în proiecție bidimensională a traiectoriilor corpurilor, un program de analizare a bazelor de date obținute în urma integrării, un program de creare a noi sisteme dinamice în diverse moduri, precum și un program de generare de tabele și grafice, ce conțin variațiile în timp ale diversilor parametri dinamici introduși pe parcursul lucrării.

Condițiile inițiale ale sistemelor de corpuri sunt descrise în așa numitele fișiere de definiție, iar rezultatele intermediare și finale ale integrărilor numerice sunt stocate în fișiere binare, ale căror date pot fi ulterior analizate. Există câteva fișiere de definiție standard, ce descriu cu mare acuratețe condițiile inițiale ale principalelor corpuri perturbatoare din sistemul solar. Acestea li se pot adăuga apoi condițiile inițiale ale corpurilor a căror mișcare dorim să o studiem, luate direct din cataloage sau introduse de utilizator (sub forma coordonatelor rectangulare ecliptice sau a elementelor orbitale kepleriene). De asemenea, se poate eșantiona o anumită regiune din spațiu cu un număr arbitrar de corpuri, în particular regiunea de incertitudine a unui asteroid de tip NEA, atunci când matricea covariantă a elementelor sale orbitale este disponibilă.

Se pot genera tabele și grafice ce conțin evoluția în timp a următorilor parametri dinamici: coordonate rectangulare, elemente orbitale kepleriene și equinoctale, distanțe mutuale între corpuri, distanțe MOID între orbite, parametri Tisserand, argumente de rezonanță și coordonate în planul țintă. Este posibil și calculul deviației standard (RMS) a acestor parametri, pentru o mulțime oarecare de corpuri din sistem.

Accesul la programele pachetului se poate face interactiv sau doar prin intermediul parametrilor în linie de comandă. În acest ultim caz, se pot crea ședințe de lucru complet automatizate, ce pot fi gestionate cu un fișier de comenzi (“batch file”). Un exemplu în acest sens este dat în paragraful 6.3.

Pachetul de programe SolSyIn a fost creat, cu precădere, pentru studiul următoarelor fenomene dinamice:

- determinarea traiectoriei și a variației elementelor orbitale ale asteroizilor și cometelor;
- identificarea apropiierilor strânse cu Pământul;
- variația pe termen lung a distanței MOID față de orbita Pământul;
- determinarea gradului de haoticitate al unei mișcări, prin estimarea numerică a LCE;
- identificarea mișcărilor rezonante (medii și seculare);
- propagarea regiunii de incertitudine orbitală a asteroizilor NEA;
- determinarea condițiilor de impact și a probabilității de impact cu Pământul a asteroizilor NEA;
- efectul radiației electromagnetice solare asupra mișcării corpurilor mici în sistemul solar.

Ultimul paragraf al lucrării prezintă un exemplu succint de evoluție dinamică, în care sunt evidențiate o parte din aceste fenomene.

Pachetul de programe SolSyIn este un software pe 32 de biți, scris în limbajul de programare Free Pascal [FPC, 2001] și conține 4500 de linii de cod sursă. Este disponibil pe internet la adresa conținută în referința bibliografică [Berinde, 2001c].

6.2 Metoda de integrare numerică Radau-Everhart

Intenția noastră în acest paragraf este aceea de a prezenta un integrator numeric performant din punctul de vedere al aplicabilității sale la sistemele dinamice de corpuri asociate mișcărilor în vecinătatea orbitei terestre. Așa cum s-a subliniat pe parcursul lucrării, acest tip de mișcări au un grad ridicat de haoticitate, dominate fiind de numeroase apropieri strânse, punând-se astfel la grea încercare stabilitatea în timp a algoritmului numeric.

Integratorul numeric Radau-Everhart de ordinul 15 [Everhart, 1974], [Everhart, 1984] are la bază o metodă unipas predictor-corector care evaluează soluția sistemului de ecuații diferențiale în punctul curent, prin interpolarea cu o serie de timp a valorilor calculate pe câteva puncte de diviziune situate în avans, și îmbunătățirea acestei soluții printr-un proces iterativ. Un aspect important al acestei metode este acela că precizia obținută în evaluarea soluției este cu câteva ordine de mărime mai mare decât ar fi de așteptat de la ordinul polinomului de aproximare. Acest lucru este realizabil prin folosirea diviziunilor Gauss-Radau (sau Gauss-Lobato) și a principiilor cuadraturii lui Gauss.

6.2.1 Descrierea modelului dinamic utilizat

Modelul dinamic al sistemului solar, în care efectuăm integrările numerice, este format din corpul central (Soarele), câteva corpuri perturbatoare și corpul a cărui mișcare dorim să o studiem (considerat infinitezimal). Când se urmărește o precizie foarte bună a integrării, setul corpurilor perturbatoare va fi format din cele nouă planete ale sistemului solar, la care se adaugă satelitul natural Luna și trei asteroizi cei mai masivi din centura principală, anume Ceres, Pallas și Vesta.

Punerea în evidență a unor particularități dinamice nu va necesita însă luarea în calcul a tuturor acestor corpuri perturbatoare.

Condițiile inițiale pentru corpurile perturbatoare, date sub forma vectorilor de poziție și a vectorilor viteză heliocentrică, la epoca J2000.0, sunt obținute din efemeridele JPL/DE-405, accesate prin intermediul sistemului informatic “JPL Horizons On-Line Ephemeris System” [Giorgini *et al.*, 1996], iar condițiile inițiale pentru asteroizii de tip NEA sunt obținute din cataloagele furnizate prin sistemul “NEODyS” [Chesley și Milani, 1999].

Considerăm sistemul nostru dinamic format din $n + 1$ corpuri, din care unul este corpul central de masă M . Fără a face vreo discriminare între celelalte corpuri, vom nota cu m_i masele lor ($i = \overline{1, n}$). Fie unitatea de măsură a masei egală cu o masă solară. În cazul neglijării unor planete interioare ca și corpuri perturbatoare, masele lor se vor adăuga masei centrale, și din acest motiv se poate întâmpla ca $M > 1$. Ecuțiile de mișcare ale corpurilor, într-un sistem rectangular de referință, relativ la corpul central, sunt

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i^c + \mathbf{F}_i^p, \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.1)$$

unde \mathbf{r}_i notează vectorul de poziție al celui de-al i -lea corp, \mathbf{F}_i^c este componenta forței ce acționează asupra sa și se datorează prezenței corpului central, iar \mathbf{F}_i^p este componenta forței ce acționează asupra sa și se datorează prezenței corpurilor perturbatoare. Sistemul (6.1) este format din $3n$ ecuații diferențiale și reprezintă o problemă Cauchy, cu condițiile inițiale date la momentul de timp $t = t_0$ prin

$$\mathbf{r}_i(t_0) = \mathbf{r}_i^0, \quad \frac{d\mathbf{r}_i}{dt}(t_0) = \mathbf{v}_i^0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.2)$$

Componentele \mathbf{F}_i^c și \mathbf{F}_i^p vor îngloba, în primul rând, forțele de natură gravitațională asociate corpurile masive din sistem. Dacă aceste corpuri se consideră punctiforme, în aproximația newtoniană avem expresiile

$$\mathbf{F}_i^c = -G \frac{(M + m_i)}{r_i^3} \mathbf{r}_i, \quad (6.3)$$

$$\mathbf{F}_i^p = G \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n m_j \left(\frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right), \quad (6.4)$$

unde G notează constanta gravitațională heliocentrică. Suma din membrul drept al relației (6.4) nu va conține termenul corespunzător corpului infinitezimal, a cărui masă este neglijabilă. Când corpurile perturbatoare nu sunt integrate simultan cu corpul infinitezimal, ci mai degrabă pozițiile lor sunt extrase dintr-un catalog de efemeride, atunci vom avea doar $\mathbf{F}_i^p = \mathbf{F}_i^p(t)$.

Dacă aproximația newtoniană nu oferă o precizie satisfăcătoare, se va lua în considerare și termenul relativist din expresia forței gravitaționale datorată corpului central [Quinn *et al.*, 1991], anume

$$\mathbf{F}_i^c = \mathbf{F}_i^c + \frac{1}{c^2} \frac{GM}{r_i^3} \left[4 \frac{GM}{r_i} \mathbf{r}_i - \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right)^2 \mathbf{r}_i + 4 \left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \cdot \mathbf{r}_i \right) \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right] \mathbf{r}_i. \quad (6.5)$$

Pentru corpurile de dimensiuni mici (corpuri meteorice) forța exercitată asupra lor de radiația electromagnetică solară devine importantă, astfel încât la expresia forței \mathbf{F}_i^c se va adăuga forța presiunii de radiație și a efectului Poynting-Robertson [Consolmagno și Schaefer, 1994]

$$\mathbf{F}_i^c = \mathbf{F}_i^c + \frac{\beta_i G}{r_i^3} \mathbf{r}_i - \frac{1}{c} \frac{\beta_i G}{r_i^2} \left[\left(\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \cdot \mathbf{r}_i \right) \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^2} + \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \right], \quad (6.6)$$

unde coeficientul β_i depinde de caracteristicile fizice ale corpului. În aproximația de corp sferic omogen și perfect absorbant de radiație electromagnetică incidentă, expresia acestui coeficient este $\beta_i \approx 9.3 \times 10^{-5} \rho_i^{-2/3} m_i^{-1/3}$, unde masa m_i este exprimată în grame, iar densitatea ρ_i în g/cm^3 .

6.2.2 Aspecte matematice

Ecuțiile mișcării relative a corpurilor în cadrul modelului dinamic construit, sunt descrise prin următorul sistem de ecuații diferențiale de ordinul 2, scris sub formă generală

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2}(t) = \mathbf{F}_i \left(t, (\mathbf{r}_j)_{j=1,n}, \left(\frac{d\mathbf{r}_j}{dt} \right)_{j=1,n} \right), \quad i = \overline{1, n}, \quad (6.7)$$

cu condiții inițiale de forma (6.2).

Considerăm ecuațiile de mișcare ale unui corp oarecare din sistem, ale cărui mărimi asociate nu le mai indexăm. Dacă în sistemul de referință heliocentric ales, vectorul de poziție al acestui corp are componentele $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$, iar vectorul forță corespunzător este $\mathbf{F} = \mathbf{F}(F_x, F_y, F_z)$, ecuațiile scalare de mișcare ale sale sunt

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{dt^2}(t) = F_x \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \dots, x_j, y_j, z_j, \frac{dx_j}{dt}, \frac{dy_j}{dt}, \frac{dz_j}{dt}, \dots \right) \\ \frac{d^2 y}{dt^2}(t) = F_y \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \dots, x_j, y_j, z_j, \frac{dx_j}{dt}, \frac{dy_j}{dt}, \frac{dz_j}{dt}, \dots \right) \\ \frac{d^2 z}{dt^2}(t) = F_z \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \dots, x_j, y_j, z_j, \frac{dx_j}{dt}, \frac{dy_j}{dt}, \frac{dz_j}{dt}, \dots \right), \end{cases} \quad (6.8)$$

unde variabila j indexează celelalte corpuri din sistem. În continuare vom prezenta algoritmul numeric de determinare a soluției pentru prima ecuație din relația (6.8). Algoritmul se va extinde apoi, în mod natural, la toate cele trei ecuații și pentru toate corpurile din sistem.

Astfel, prima ecuație din (6.8), în care notăm membrul drept cu $F(t)$ pentru simplitatea scrierii, se dezvoltă în serie de puteri după variabila timp t , în jurul epocii inițiale t_0 , până la ordinul 7

$$\frac{d^2 x}{dt^2}(t) = F(t) = F_0 + A_1(t - t_0) + A_2(t - t_0)^2 + A_3(t - t_0)^3 + \dots + A_7(t - t_0)^7. \quad (6.9)$$

Scopul metodei este acela ca, pornind cu valorile inițiale $x(t_0) = x_0$, $\frac{dx}{dt}(t_0) = \dot{x}_0$ și notând $F_0 = F(t_0)$, să obținem valorile $x(t_0 + h)$ și $\frac{dx}{dt}(t_0 + h)$ la sfârșitul unei secvențe de integrare de lungime h . Considerăm variabila adimensională $T = (t - t_0)/h$, cu valori cuprinse între $0 \leq T \leq 1$, și introducem mărimile auxiliare $P_1 = A_1 h, P_2 = A_2 h^2, \dots, P_7 = A_7 h^7$. Ecuația anterioară se scrie în noile variabile astfel

$$\frac{d^2 x}{dt^2}(t) = F(t) = F_0 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3 + \dots + P_7 T^7. \quad (6.10)$$

Prin integrare deducem

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= \dot{x}_0 + h \left(F_0 T + P_1 \frac{T^2}{2} + P_2 \frac{T^3}{3} + \dots + P_7 \frac{T^8}{8} \right), \\ x(t) &= x_0 + h \dot{x}_0 T + h^2 \left(F_0 \frac{T^2}{1 \cdot 2} + P_1 \frac{T^3}{2 \cdot 3} + P_2 \frac{T^4}{3 \cdot 4} + \dots + P_7 \frac{T^9}{8 \cdot 9} \right). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Seria trunchiată (6.10) nu reprezintă o serie Taylor, deoarece coeficienții P_k vor fi aleși nu ca să reprezinte funcția F cât mai bine posibil pe întreg intervalul descris de variabila T , ci astfel încât seriile trunchiate (6.11) să aproximeze cât mai precis necunoscutele $x(t)$ și $\frac{dx}{dt}(t)$ în punctul final $t_0 + h$.

Introducem următoarele puncte de diviziune $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_7 < 1$. Cu aceste puncte, dezvoltarea în serie de puteri (6.10) a funcției F se poate transcrie astfel

$$F(t) = F_0 + Q_1 T + Q_2 T(T - a_1) + Q_3 T(T - a_1)(T - a_2) + \dots + Q_7 T \prod_{k=1}^7 (T - a_k). \quad (6.12)$$

Dacă notăm cu $F_k = F(t_0 + a_k h)$, adică valorile funcției F pe punctele de diviziune, ușor se constată că au loc egalitățile $F_1 = F_0 + Q_1 a_1$, $F_2 = F_0 + Q_1 a_2 + Q_2 a_2(a_2 - a_1)$ și așa mai departe. Inversând aceste relații, putem calcula coeficienții Q_k prin

$$\begin{cases} Q_1 = (F_1 - F_0)/a_1 \\ Q_2 = ((F_2 - F_0)/a_2 - Q_1)/(a_2 - a_1) \\ Q_3 = (((F_3 - F_0)/a_3 - Q_1)/(a_3 - a_1) - Q_2)/(a_3 - a_2) \\ \vdots \\ Q_7 = (\dots(F_7 - F_0)/a_7 - Q_1)/(a_7 - a_1) - Q_2)/(a_7 - a_2) - \dots)/(a_7 - a_6). \end{cases} \quad (6.13)$$

Identificând coeficienții puterilor lui T din relațiile (6.10) și (6.12), obținem formulele de legătură dintre P_k și Q_k

$$\begin{cases} P_1 = b_{11}Q_1 + b_{21}Q_2 + b_{31}Q_3 + \dots + b_{71}Q_7 \\ P_2 = b_{22}Q_2 + b_{32}Q_3 + \dots + b_{72}Q_7 \\ P_3 = b_{33}Q_3 + \dots + b_{73}Q_7 \\ \vdots \\ P_7 = b_{77}Q_7, \end{cases} \quad (6.14)$$

unde coeficienții b_{ij} se obțin recursiv din

$$\begin{aligned} b_{ii} &= 1, & 1 \leq i \leq 7 \\ b_{i1} &= -a_{i-1}b_{i-1,1}, & 1 < i \leq 7 \\ b_{ij} &= b_{i-1,j-1} - a_{i-1}b_{i-1,j}, & 1 < j < i \leq 7. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Acești coeficienți au aceleași relații de recursivitate ca și numerele lui Stirling de speța I. Evaluarea lor se face o singură dată, ei fiind independenți de datele problemei. Dintre aceștia, $b_{71}, b_{72}, \dots, b_{77}$ sunt totodată și coeficienții Viète ai ecuației polinomiale de gradul 6, având ca rădăcini punctele de diviziune mai sus definite, anume

$$a_1 a_2 \dots a_7 - \dots + (a_1 a_2 + a_1 a_3 + \dots + a_6 a_7) T^4 - (a_1 + a_2 + \dots + a_7) T^5 + T^6 = 0. \quad (6.16)$$

Formulele inverse celor din (6.14) sunt

$$\begin{cases} Q_1 = c_{11}P_1 + c_{21}P_2 + c_{31}P_3 + \dots + c_{71}P_7 \\ Q_2 = c_{22}P_2 + c_{32}P_3 + \dots + c_{72}P_7 \\ Q_3 = c_{33}P_3 + \dots + c_{73}P_7 \\ \vdots \\ Q_7 = c_{77}P_7, \end{cases} \quad (6.17)$$

unde coeficienții c_{ij} sunt definiți de relațiile

$$\begin{aligned} c_{ii} &= 1 & , 1 \leq i \leq 7 \\ c_{i1} &= a_1 c_{i-1,1} & , 1 < i \leq 7 \\ c_{ij} &= c_{i-1,j-1} + a_j c_{i-1,j} & , 1 < j < i \leq 7. \end{aligned} \quad (6.18)$$

În continuare vom prezenta etapele algoritmului numeric de determinare și îmbunătățire succesivă a coeficienților P_k , necesari pentru evaluarea expresiilor (6.11) la sfârșitul secvenței de integrare.

6.2.3 Algoritmul numeric

La momentul inițial coeficienții P_k vor avea valorile zero. Deoarece de la o secvență de integrare la alta, aceștia înregistrează o variație lentă, vom putea porni o nouă secvență de integrare cu valori ale lor mult îmbunătățite, prin folosirea informațiilor de la pasul anterior. În această manieră, convergența integratorului devine mai rapidă. Printr-o continuare analitică a curbei ce reprezintă funcția F pe secvența anterioară de integrare, se poate deduce că

$$\begin{cases} P_1 = dP_1 + \left(\frac{h}{h'}\right)^1 \left[\binom{1}{1} P'_1 + \binom{2}{1} P'_2 + \binom{3}{1} P'_3 + \cdots + \binom{7}{1} P'_7 \right] \\ P_2 = dP_2 + \left(\frac{h}{h'}\right)^2 \left[\binom{2}{2} P'_2 + \binom{3}{2} P'_3 + \cdots + \binom{7}{2} P'_7 \right] \\ P_3 = dP_3 + \left(\frac{h}{h'}\right)^3 \left[\binom{3}{3} P'_3 + \cdots + \binom{7}{3} P'_7 \right] \\ \vdots \\ P_7 = dP_7 + \left(\frac{h}{h'}\right)^7 \left[\binom{7}{7} P'_7 \right], \end{cases} \quad (6.19)$$

unde mărimile notate cu “prim” sunt cele specifice secvenței anterioare, iar dP_k notează variațiile acestor coeficienți de la o secvență de integrare la alta.

Dacă notăm $x_k = x(t_0 + a_k h)$ și $\dot{x}_k = \frac{dx}{dt}(t_0 + a_k h)$, din relațiile (6.11) obținem

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= \dot{x}_0 + h \left(a_k F_0 + \frac{a_k^2}{2} P_1 + \frac{a_k^3}{3} P_2 + \cdots + \frac{a_k^8}{8} P_7 \right) \\ x_k &= x_0 + h a_k \dot{x}_0 + h^2 \left(\frac{a_k^2}{1 \cdot 2} F_0 + \frac{a_k^3}{2 \cdot 3} P_1 + \frac{a_k^4}{3 \cdot 4} P_2 + \cdots + \frac{a_k^9}{8 \cdot 9} P_7 \right), \quad k = \overline{1, 7}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Acestea sunt ecuațiile predictor ce permit evaluarea soluțiilor ecuației (6.9) pe cele șapte puncte de diviziune. Acest lucru se va realiza pe parcursul unui așa numit *ciclu de integrare*, pe care îl vom descrie în continuare. Astfel, folosind pentru coeficienții P_k valorile de start date de (6.19), se evaluează soluția pe primul punct de diviziune (x_1, \dot{x}_1) . Cu aceste valori se poate determina acum F_1 . Folosind relațiile (6.13), obținem valoarea lui Q_1 cu care, din (6.14), se îmbunătățește valoarea lui P_1 , renunțând la valoarea sa inițială. Cu această nouă valoare pentru P_1 , din relațiile (6.20) se evaluează acum soluția pe următorul punct de diviziune, (x_2, \dot{x}_2) , cu care vom fi capabili să determinăm pe F_2 . Revenind la relațiile (6.13), vom calcula valoarea lui Q_2 cu care obținem noi valori pentru coeficienții P_1 și P_2 , folosind (6.14). Urmează apoi evaluarea soluțiilor (x_3, \dot{x}_3) din (6.20), cu care se continuă procedeul în aceeași manieră, folosind succesiv ecuațiile mai sus amintite, până când s-au epuizat toate punctele de diviziune. La

sfârșitul ciclului vom dispune de valori mult îmbunătățite pentru toți coeficienții P_k , întrucât de fiecare dată când un nou coeficient Q_k devine disponibil, toți coeficienții P_k ce vor depinde de acesta sunt recalculați. Procedeu de recalculare poate fi optimizat, dacă ne folosim de valorile anterioare ale acestor coeficienți, astfel din (6.14) deducem că $P_l = \bar{P}_l + b_{kl}(Q_k - \bar{Q}_k)$, pentru $l = 1, \bar{k}$, unde coeficienții barați sunt cei calculați anterior.

Pentru a obține o acuratețe înaltă, acest ciclu de integrare se poate repeta de mai multe ori, pornind de fiecare dată cu valorile deja îmbunătățite ale coeficienților respectivi. În paragraful următor vom indica un procedeu ce selectează dinamic numărul acestor cicluri, în funcție de necesitățile impuse de caracteristicile mișcării simulate.

Din relațiile (6.11), deducem expresiile ecuațiilor corector

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t_0 + h) &= \dot{x}_0 + h \left(F_0 + \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{3}P_2 + \cdots + \frac{1}{8}P_7 \right) \\ x(t_0 + h) &= x_0 + h\dot{x}_0 + h^2 \left(\frac{1}{1 \cdot 2}F_0 + \frac{1}{2 \cdot 3}P_1 + \frac{1}{3 \cdot 4}P_2 + \cdots + \frac{1}{8 \cdot 9}P_7 \right), \end{aligned} \quad (6.21)$$

cu care se evaluează soluția la sfârșitul secvenței de integrare.

6.2.4 Controlul preciziei de integrare

Acuratețea soluției obținute la sfârșitul unei secvențe de integrare va depinde de lungimea h a secvenței. Această acuratețe poate fi ținută sub control impunând o anumită valoare pentru h , astfel încât ultimul termen din a doua ecuație corector (6.21) să aibă un ordin de mărime a priori stabilit

$$\frac{h^2 P_7}{72} \approx 10^{-D}. \quad (6.22)$$

Coeficientul P_7 nu este cunoscut înaintea parcurgerii secvenței, însă avem o estimare a sa din relațiile (6.19), în funcție de coeficientul similar din secvența anterioară P'_7 , care este cunoscut cu precizie. Dacă discredităm contribuția lui dP_7 în relația respectivă, obținem următoarea estimare pentru lungimea secvenței curente

$$h = \left[\frac{72 \cdot 10^{-D} h'^7}{P_{max}} \right]^{1/9}, \quad (6.23)$$

unde P_{max} notează cea mai mare valoare (în mărime absolută) a coeficienților P_7 din toate cele $3n$ ecuații ale sistemului (6.7). Această valoare maximă va fi dictată de acele ecuații care descriu mișcări cu periodicitățile cele mai scurte.

În această manieră, algoritmul numeric își va ajusta dinamic pasul de integrare în funcție de caracteristicile mișcării, de lungimea h' a secvenței anterioare și de parametrul de precizie D selectat de utilizator. Precizia de estimare a soluției pe o secvență de integrare va fi cu câteva ordine de mărime mai bună decât limita impusă prin valoarea 10^{-D} . Acest lucru este posibil printr-o alegere convenabilă a punctelor de diviziune a_k , folosind principiile cuadraturii lui Gauss, așa cum vom arăta în cele ce urmează.

Dezvoltarea în serie de puteri a funcției F , dată de relația (6.10), are ordinul 7, însă fără a adăuga termeni noi, ci doar printr-o alegere convenabilă a punctelor de diviziune, vom putea mări acest ordin la 15. Acesta va fi și ordinul integratorului numeric. Astfel, presupunem existența a încă 8 puncte de diviziune suplimentare a_8, a_9, \dots, a_{15} . Dispunând acum de mai multe informații pe parcursul secvenței de integrare, soluția obținută va avea o precizie mai bună. Fie P_k^* noii coeficienți de care va depinde această soluție, dată de o expresie similară cu

(6.21), dar în care ultimul termen are ordinul 15. Îmbunătățirea soluției în urma introducerii punctelor de diviziune suplimentare este, în poziție

$$\begin{aligned} \Delta x = & \frac{h^2}{2 \cdot 3}(P_1^* - P_1) + \frac{h^2}{3 \cdot 4}(P_2^* - P_2) + \cdots + \frac{h^2}{8 \cdot 9}(P_7^* - P_7) + \\ & \frac{h^2}{9 \cdot 10}P_8^* + \frac{h^2}{10 \cdot 11}P_9^* + \cdots + \frac{h^2}{16 \cdot 17}P_{15}^*, \end{aligned} \quad (6.24)$$

iar în viteză

$$\begin{aligned} \Delta \left(\frac{dx}{dt} \right) = & \frac{h}{2}(P_1^* - P_1) + \frac{h}{3}(P_1^* - P_1) + \cdots + \frac{h}{8}(P_7^* - P_7) + \\ & \frac{h}{9}P_8^* + \frac{h}{10}P_9^* + \cdots + \frac{h}{16}P_{15}^*. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Condiția ca aceste diferențe să fie nule, arată că soluția obținută doar cu cele șapte puncte de diviziune inițial alese va avea deja ordinul 15. Prin diverse operații de manipulare algebrică [Everhart, 1974], se poate arăta că aceste diferențe sunt nule pentru valori bine determinate ale coeficienților $b_{71}, b_{72}, \dots, b_{77}$. Odată determinați, aceștia permit apoi calculul rădăcinilor ecuației polinomiale (6.16), care sunt tocmai punctele de diviziune căutate. Acestea poartă numele de diviziuni Gauss-Radau. Se pot imagina algoritmi și cu alte ordine de precizie, însă pentru ordinele pare diviziunile obținute se numesc Gauss-Lobatto.

În cazul integrării numerice a unui sistem dinamic de corpuri în care au loc apropieri strânse, creșterea bruscă în intensitate a forțelor perturbatoare, pe intervale scurte de timp, impune o ajustare mult mai eficientă a pasului de integrare, față de predicția dată de formula (6.23). În primul rând, o mărire a numărului de cicluri de integrare pe o secvență, permite evaluarea mai exactă a forțelor pe punctele de diviziune, contribuind la păstrarea acurateții soluției obținute. Notăm cu F_k^{il} valoarea funcției F evaluată pe cel de-al k -lea punct de diviziune, pentru corpul al i -lea din sistem și pe ciclul de integrare cu numărul l . Vom reindexa aceste mărimi și după componentele (x, y, z) , așa cum figurează în sistemul de ecuații (6.8). Definim suma

$$\begin{aligned} \sigma_l = & \sum_{i=1}^n \left(|F_{1,x}^{il}| + |F_{1,y}^{il}| + |F_{1,z}^{il}| \right) + \\ & \sum_{i=1}^n \sum_{k=2}^7 \left(|F_{k,x}^{il} - F_{k-1,x}^{il}| + |F_{k,y}^{il} - F_{k-1,y}^{il}| + |F_{k,z}^{il} - F_{k-1,z}^{il}| \right), \end{aligned} \quad (6.26)$$

care este specifică fiecărui ciclu de integrare. O condiție de genul $\sigma_l/\sigma_1 < \epsilon$ este o măsură a preciziei atinse în evaluarea tuturor forțelor pe ciclul cu numărul l , în raport cu precizia din primul ciclu. Experimentele numerice sugerează că valoarea $\epsilon = 10^{-12}$ este o bună alegere. Se vor considera atâtea cicluri de integrare, până când condiția anterioară este satisfăcută, dar nu mai puține de 2 și nu mai multe decât o valoare maximă admisibilă l_{max} (uzual egală cu 4). Dacă după epuizarea acestui număr de cicluri nu avem îndeplinită condiția respectivă, se trece la reluarea calculului pe secvența curentă, dar adoptând pentru aceasta o lungime mai mică (spre exemplu, $h \leftarrow 0.8h$).

Rareori se va întâmpla ca numărul l_{max} să fie depășit, doar dacă lungimea primei secvențe de integrare este aleasă mult prea mare, sau dacă parametrul de precizie D este mult prea mic. Pentru integrări numerice de corpuri în sistemul solar, o valoare $D = 12$ asigură precizia necesară în majoritatea situațiilor.

Chiar dacă precizia de integrare este menținută în limite acceptabile pe parcursul unei secvențe de integrare, ea se va diminua de la o secvență la alta, datorită acumulării în timp

a erorii de aproximare specifice algoritmului și a erorilor de rotunjire a calculelor. Eroarea globală în determinarea soluției finale se poate pune în evidență prin așa numitul *test de reversibilitate*. Acesta constă în integrarea numerică a sistemului de ecuații, odată în sens direct, iar apoi în sens invers, exact până la momentul inițial de timp. Compararea soluției obținute cu condițiile inițiale va furniza o imagine asupra erorii globale de integrare. Această comparație se poate face în termenii diferenței măsurată în poziția corpului

$$\Delta r = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{1/2}. \quad (6.27)$$

Metoda poate fi chestionabilă în cazul compensării erorilor din cele două etape de integrare. Cum integratorul Radau-Everhart nu este simetric, procesul de integrare inversă nu va utiliza aceeași pași intermediari, fiind de așteptat o acumulare a erorilor și nu o compensare a lor. Pe de altă parte, în cazul mișcărilor haotice testul este neconcludent, deoarece mecanismul de propagare al erorilor este diferit (paragraful 3.1.3). Δr va fi atunci o măsură a gradului de haoticitate al mișcării respective și nu o măsură a impreciziei de calcul datorată integratorului.

Monitorizarea variației energiei totale a sistemului nu constituie o metodă bună de evaluare a preciziei integrării, deoarece planetele exterioare dețin cea mai mare parte din această energie, pe când erorile de integrare sunt mai importante la planetele interioare.

În figura 6.1 este prezentată schema de propagare a erorii de integrare, în cazul unui sistem de corpuri format din cele 9 planete ale sistemului solar. Eroarea globală este determinată printr-un test de reversibilitate ce măsoară abaterea în poziția planetei Mercur, funcție de lungimea intervalului de integrare. Testul s-a efectuat pentru diferite valori ale parametrului de precizie D .

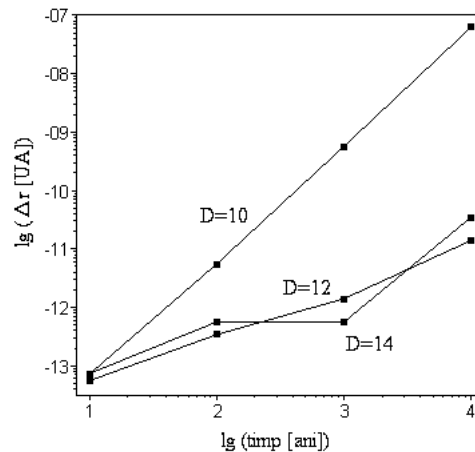


Figura 6.1. Variația erorii globale de integrare, pentru diferiți parametri de precizie D impuși integratorului. Sunt integrate simultan ecuațiile de mișcare ale celor 9 planete din sistemul solar.

6.3 Un exemplu numeric

Vom lua ca exemplu asteroidul de dimensiuni kilometrice 1999 AN₁₀. Până în prezent, el deține prima poziție în clasamentul asteroizilor NEA descoperiți, care realizează cele mai strânse apropieri cu Pământul pe parcursul acestui secol. Mozaicul de figuri 6.2 a)–f) prezintă câteva caracteristici ale evoluției sale dinamice în vecinătatea orbitei terestre. Tabelul următor conține listingul comenzilor date pachetului SolSyIn, pentru generarea respectivelor evoluții dinamice.

Figura a) prezintă o imagine 3D a orbitei foarte înclinată a asteroidului ($I \approx 40^\circ$), ale cărei noduri orbitale sunt situate în apropierea orbitei terestre. Din acest motiv, asteroidul poate

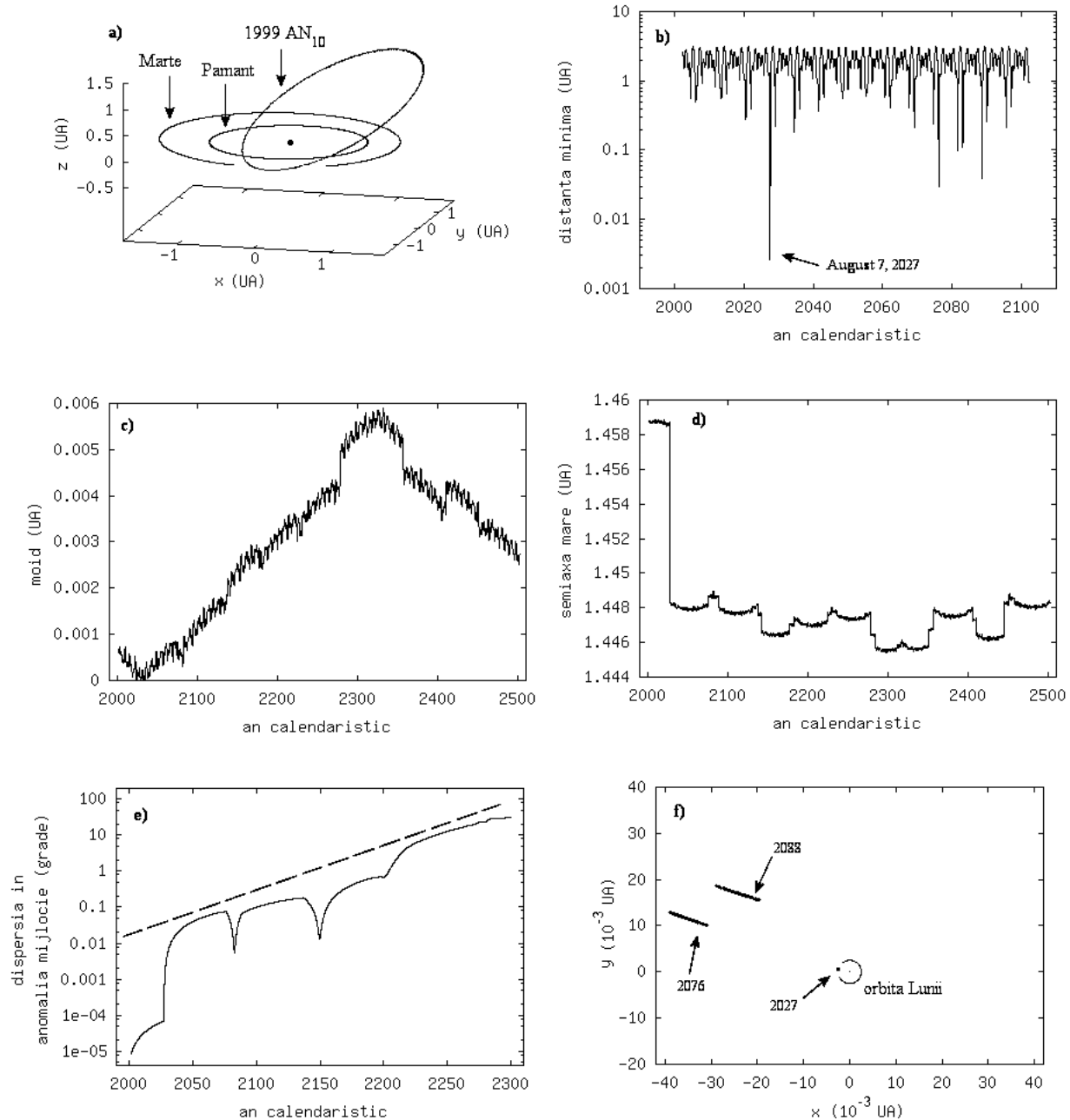


Figura 6.2. Câteva caracteristici dinamice ale asteroidului 1999 AN₁₀. a) orbita sa în spațiu, b) variația distanței la Pământ, c) variația distanței MOID la orbita terestră, d) variația semiaxei mari, e) calculul LCE al mișcării și f) imaginile regiunii de incertitudine în planul țintă. Detalii în text.

realiza apropieri strânse în lunile februarie și august. Cea mai remarcabilă apropiere va avea loc pe data de 7 august 2027 (figura b), la o distanță de aproximativ 0.00261 UA de planeta noastră (puțin dincolo de orbita Lunii). Se remarcă valoarea mică a distanței MOID la data respectivă (figura c). Variațiile sale neregulate la valori mici, permit o apropiere orbitală de lungă durată între cele două corpuri (conform clasificării din paragraful 3.3.1). Variațiile neregulate ale semiaxei mari (figura d), caracterizate prin salturi cu ocazia apropiierilor strânse, subliniază caracterul haotic al mișcării respective, asteroidul aparținând clasei Geographos. Monitorizarea deviației standard în anomalia mijlocie a 100 de imagini virtuale ale asteroidului (figura e),

permite evaluarea intervalului de timp Lyapounov, la aproximativ 35 de ani. Astfel, simulările numerice asupra evoluției dinamice a acestui asteroid își pierd caracterul determinist după 100 – 200 de ani. Dimensiunea inițială a regiunii de incertitudine orbitală este suficient de mică pentru a nu genera impactori virtuali de-a lungul celor trei apropieri strânse din anii 2027, 2076 și 2088. Imaginile acestei regiuni în planul țintă sunt prezentate în ultima figură.

<p>a)</p> <pre>remove 1999an10 sysmaker moon 0 r _ 1999an10 sysmaker 1999an10 1 5 1999an10 y temp f 5 m 3 _ 1999an10 integrat 1999an10 tabmaker 1999an10 n 3-11 _ t 2452050.5-2462050.5 _ plotter 1999an10 xyz</pre>
<p>b)</p> <pre>tabmaker 1999an10 d n 11-11 b 3 _ _ plotter 1999an10 dist_lg</pre>
<p>c)</p> <pre>remove 1999an10 sysmaker sol-9 1 5 1999an10 y temp i 182625 f 3 _ 1999an10 integrat 1999an10 tabmaker 1999an10 d n 10-10 b 3 _ f 5 _ plotter 1999an10 moid</pre>
<p>d)</p> <pre>tabmaker 1999an10 k n 10-10 _ f 5 _ plotter 1999an10 a</pre>
<p>e)</p> <pre>remove 1999an10 sysmaker moon 0 r _ 1999an10 sysmaker 1999an10 2 2 1999an10 y temp s 100 q 2 _ i 109575 f 10 m 3 _ 1999an10 integrat 1999an10 tabmaker 1999an10 k n 11-111 _ m _ plotter 1999an10 m_lg</pre>
<p>f)</p> <pre>tabmaker 1999an10 t n 11-111 b 3 _ t 2452050.5-2488575.5 _ plotter 1999an10 targ</pre>

Tabelul 6.1. Listingul comenzilor date pachetului SolSyIn pentru generarea evoluțiilor dinamice prezentate în figurile 6.2 a)–f).

Listă de figuri

1.1	a) rata descoperirilor anuale de asteroizi NEA și b) distribuția în timp a acestor descoperiri în raport cu dimensiunea corpurilor.	2
1.2	Proiecția în planul eclipticii, la data de 1 ianuarie 2002, a pozițiilor celor peste 1600 de asteroizi NEA descoperiți până la data respectivă.	4
1.3	Distribuția în planul elementelor orbitale (e, a) a asteroizilor NEA descoperiți până în prezent și locația grupurilor Atens, Apollos și Amors.	5
1.4	Numărul cumulat al asteroizilor NEA descoperiți până în prezent (1 ianuarie 2002) și estimarea numărului total de corpuri a întregii populații, în funcție de magnitudinea absolută a acestora (sau echivalent, în funcție de diametrul lor).	6
2.1	Sistemul de referință fix OXYZ și cel corotațional OX'Y'Z', unde OXY este planul de mișcare relativă a corpului perturbator P față de corpul central C, din problema restrânsă circulară a celor trei corpuri (A notează corpul infinezimal).	8
2.2	Cvasi-invariabilitatea parametrului Tisserand. Modificarea drastică a orbitei unei comete fictive în urma apropierii strânse cu planeta Jupiter și variația parametrului Tisserand pe parcursul a 60 de ani. Elementele inițiale orbitale sunt $a \approx 22.6$ UA, $e \approx 0.78$ și $I \approx 4^\circ.6$, iar în final $a \approx 3.5$ UA, $e \approx 0.44$ și $I \approx 8^\circ.6$	13
2.3	Suprafața tridimensională de viteză nulă definită prin egalitatea $C_J = 2U$ și locația punctelor Lagrange de echilibru, ca puncte de extrem (cazul particular $m_p = 0.1$).	16
2.4	Vectorii viteză în sistemul de referință planetocentric.	20
2.5	Orbita hiperbolică planetocentrică din interiorul sferei de acțiune gravitațională.	23
2.6	(a) Variația razei de impact r_{imp} , normalizată la raza planetară R_p ; (b) Variația unghiului maxim de deflexie gravitațională γ_{max} , în funcție de raportul vitezelor u/v_p , pentru planetele Pământ și Jupiter.	24
2.7	Geometria apropierii în vecinătatea liniei nodurilor.	25
3.1	Variația semiaxelor mari a două particule test, inițial apropiate, perturbate de planeta Jupiter, în problema restrânsă circulară plană a celor trei corpuri. Mișcarea lor este dominată de apropieri strânse.	30
3.2	Variația semiaxelor mari a două particule test, inițial apropiate, perturbate de planeta Jupiter, în problema restrânsă circulară plană a celor trei corpuri. Mișcarea lor nu înregistrează apropieri strânse.	31
3.3	Un exemplu schematic de secțiune Poincaré, prezentând zonele de stabilitate și instabilitate a mișcării.	32
3.4	Determinarea numerică a LCE al mișcării asteroidului (1862) Apollo, prin monitorizarea diferenței acumulate în longitudinea mijlocie $d\lambda$ între asteroid și o imagine virtuală" a sa.	35
3.5	Variația argumentului de rezonanță $\sigma_{10:3}$ al asteroidului (4197) 1982 TA în raport cu Jupiter. Trecerea de la regimul de circulație la cel de librație marchează prinderea asteroidului în rezonanța 10:3.	39
3.6	Principalele oscilații seculare asociate planetelor Jupiter și Saturn, obținute în urma unei integrări numerice simultane a celor patru planete gigant, într-un interval de un milion de ani.	41

3.7	Contururi Tisserand. Liniile întrerupte reprezintă ecuațiile de condiție ca periheliul (q), respectiv afeliul (Q) al unei orbite, să fie situat în vecinătatea orbitei terestre, iar liniile continue reprezintă câteva contururi Tisserand de-a lungul cărora are loc migrația orbitei sub acțiunea perturbatoare a Pământului.	43
3.8	a). Evoluția dinamică a unui asteroid de tip NEA pe o orbită de tip horseshoe față de Pământ, (3753) Cruithne; b). Evoluțiile dinamice a doi asteroizi troieni pe orbite de tip tadpole în raport cu Jupiter, (1437) Diomedes și (1208) Troilus. Mișcările sunt reprezentate în sisteme corotaționale cu planeta perturbatoare, într-un interval de 500 de ani. Se remarcă evitarea apropiierilor strânse.	44
3.9	Evoluția dinamică a unui asteroid de tip NEA pe o orbită aflată în rezonanța 5:8 cu Pământul, (1685) Toro, reprezentată într-un sistem corotațional, într-un interval de 1000 de ani. Se remarcă evitarea apropiierilor strânse.	44
3.10	Calculul distanței dintre orbita circulară a planetei (P) și un asteroid (A), funcție de distanța acestuia la corpul central (S).	46
3.11	Cele trei tipuri de evoluție dinamică a MOID, pe un interval de o mie de ani: a) apropiere orbitală de scurtă durată - asteroidul 2000 WO ₁₀₇ ; b) apropiere orbitală periodică - asteroidul (1915) Quetzalcoatl; c) apropiere orbitală de lungă durată - asteroidul 1999 MN.	47
3.12	Clasificarea dinamică SPACEGUARD.	48
4.1	Distribuția orbitală a asteroizilor din centura principală împreună cu locația unor rezonanțe medii și seculare, reprezentate în planul elementelor orbitale (a, I).	50
4.2	Evoluția dinamică a unui asteroid fictiv plasat în rezonanța 3:1 cu Jupiter, având următoarele elemente orbitale kepleriene la epoca JD 2451545.0: $a = 2.4893663$ UA, $e = 0.326086$, $I = 5^\circ.34915$, $\Omega = 0^\circ$, $\omega = 0^\circ$ și $M = 33^\circ.2367$. Sistemul dinamic în care s-a efectuat integrarea numerică este format din Soare—cele patru planete gigante—asteroid. a) variația argumentului de rezonanță $\sigma_{3:1}$ și b) variația excentricității orbitale.	51
4.3	Principalele trasee evolutive ale asteroizilor din centura principală către orbita terestră și timpul dinamic mediu asociat lor, în planul elementelor orbitale (e, a).	52
4.4	Simbolurile folosite în formulele fotometrice.	61
4.5	Populațiile de corpuri din sistemul solar exterior reprezentate în planul elementelor orbitale (e, a). Sunt marcate: câțiva asteroizi NEA situați pe orbite de tip cometar - prin cercuri pline, populația de comete scurt periodice (din familia lui Jupiter și de tip Halley) - prin cruciulițe, populația Centaurus - prin pătrate goale, populația trans-neptuniană (cu subpopulațiile Cubewano și Plutinos - tot prin cruciulițe, subpopulația de disc împrăștiat - prin pătrate pline), precum și o populație virtuală de corpuri cu orbite situate în vecinătatea orbitei lui Neptun (intoduse în paragraful următor) - prin puncte. De asemenea, mai sunt reprezentate contururile Tisserand corespunzătoare distanței la periheliul, respectiv la afeliul orbitei corpului, egală cu semiaxa orbitelor planetare (J-Jupiter, S-Saturn, etc) și contururile $q = 1$ UA, $q = 2.5$ UA și $T_J = 2$	65
4.6	Traseul evolutiv prin sistemul solar exterior al unui corp originar în centura lui Kuiper. Sunt prezentate contururile Tisserand corespunzătoare distanței la periheliul, respectiv la afeliul orbitei corpului, egală cu semiaxa orbitelor planetare (J-Jupiter, S-Saturn, etc).	67
4.7	O compoziție în nuanțe de gri, prezentând distribuția cumulată a numărului de apropieri strânse în planul elementelor orbitale (e, a), pentru întreaga populație de corpuri simulată. Nuanțelor mai întunecate le corespund numere mai mari.	68
4.8	Distribuția numărului de corpuri simulate în funcție de timpul dinamic de viață total al acestora, apoi în funcție de timpul dinamic necesar pentru a intra în regiunea activă, respectiv timpul dinamic de viață în această regiune.	69
5.1	Extrapolarea probabilității medii de impact cu Pământul a asteroizilor a) 2000 SG ₃₄₄ și b) 1999 AN ₁₀ . Linia punctată marchează extrapolarea liniară iar linia continuă extrapolarea pe curbă.	73
5.2	Calculul variației densității spațiale relativ la: a) distanța r la corpul central; b) latitudinea ecliptică β	74
5.3	Calculul unghiului de întâlnire a două corpuri în coliziune	78
5.4	Probabilitățile medii anuale de impact cu Pământul ale tuturor asteroizilor de tip ECA descoperiți până în prezent (peste 900), funcție de viteza lor de impact.	79

5.5	Imaginea elipsoidului de incertitudine în spațiul tridimensional al mișcării.	84
5.6	Procesul de reordonare a asteroizilor virtuali de-a lungul direcției de mișcare (F marchează primul asteroid din șir, iar L ultimul).	89
5.7	Comportamentul oscilatoriu al incertitudinii în anomalia mijlocie pentru asteroidul 1999 AN ₁₀ , în urma unei integrări numerice complete a unui set de 100 de asteroizi virtuali repartizați uniform în regiunea inițială de incertitudine, pentru $\sigma = 1$	89
5.8	Propagarea numerică de tip Monte-Carlo a regiunii de incertitudine a asteroidului 2001 GP ₂ în spațiul tridimensional al mișcării, în urma unei apropieri strânse cu Pământul (distanța minimă Pământ - LOV: 0.0013 UA, la 5 octombrie 2020). Se remarcă caracterul neliniar dobândit în urma apropierii.	91
5.9	Planul țintă b în care s-a evidențiat direcția LOV și distanța MOID.	92
5.10	Imaginile pe planul țintă a regiunii de incertitudine a asteroidului 2000 SG ₃₄₄ în cele două etape de iterație ale metodei Monte-Carlo de determinare a impactorilor virtuali.	100
5.11	Imaginile pe planul țintă a regiunii de incertitudine a asteroidului 2000 BA ₁₆ în cele trei etape de iterație ale metodei Monte-Carlo de determinare a impactorilor virtuali.	101
5.12	Scara bidimensională Torino și gradele de pericolozitate asociate.	103
6.1	Variația erorii globale de integrare, pentru diferiți parametri de precizie D impuși integratorului. Sunt integrate simultan ecuațiile de mișcare ale celor 9 planete din sistemul solar.	117
6.2	Câteva caracteristici dinamice ale asteroidului 1999 AN ₁₀ . a) orbita sa în spațiu, b) variația distanței la Pământ, c) variația distanței MOID la orbita terestră, d) variația semiaxei mari, e) calculul LCE al mișcării și f) imaginile regiunii de incertitudine în planul țintă. Detalii în text.	118

Bibliografie

- [Bagatin și Farinella, 1999] A.C. Bagatin și P. Farinella: 1999. *Collisional reaccumulation of asteroids*, în Proceedings of the IAU Colloquium 173, “Evolution and Source Regions of Asteroids and Comets”, Tatranska Lomnica 1998, editat de J. Svoren, E.M. Pittich și H. Rickman, Astronomical Institute of the Slovak Academy of Sciences, p. 145.
- [Bailey *et al.*, 1992] M. Bailey, J. Chambers, G. Hahn: 1992. *Origin of sungrazers: a frequent cometary end-state*, Astronomy and Astrophysics, **257**, p. 315.
- [Berinde, 1999a] S. Berinde: 1999. *Some characteristics of the near-Earth asteroids population*, în Proceedings of the International Symposium on Astrophysics Research and Science Education, Castel Gandolfo 1998, editat de C. Impey, Vatican Observatory Foundation, p. 99.
- [Berinde, 1999b] S. Berinde: 1999. *Statistical results on discovered near-Earth asteroids*, în Proceedings of the IAU Colloquium 173, “Evolution and Source Regions of Asteroids and Comets”, Tatranska Lomnica 1998, editat de J. Svoren, E.M. Pittich și H. Rickman, Astronomical Institute of the Slovak Academy of Sciences, p. 81.
- [Berinde, 2001a] S. Berinde: 2001. *Effects of multiple planetary encounters on Kuiper belt objects*, în Highlights of Astronomy vol. 12, Proceedings of Joint Discussion 4 “The Trans-Neptunian Population”, The XXIV-th IAU General Assembly, Manchester 2000, editat de B. Bezdard și J. Spencer, Astronomical Society of the Pacific, abstract extins.
- [Berinde, 2001b] S. Berinde: 2001. *A quantitative approach of the orbital uncertainty propagation through close encounters*, în “Dynamics of Natural and Artificial Celestial Bodies”, Proceedings of the US/European Celestial Mechanics Workshop, Poznań 2000, editat de H. Prętko-Ziomek, E. Wnuk, P.K. Seidelmann și D. Richardson, Kluwer Academic Publishers, p. 289.
- [Berinde, 2001c] S. Berinde: 2001. *The SolSyIn package - An integrator for our solar system*, Internet Release (<http://math.ubbcluj.ro/~sberinde/solsyin>).
- [Berinde *et al.*, 2001] S. Berinde, M. Bîrlan, O. Văduvescu: 2001. *Obiecte care se apropie periculos de Pământ*, în Almanahul “Astronomia 2001”, editura CD Press, București, p. 138.
- [Berinde, 2002] S. Berinde: 2002. *An iterative Monte-Carlo method for finding virtual impactors among near-Earth asteroids*, “Asteroids, Comets, Meteors 2002”, Berlin 29 iulie - 2 august 2002, lucrare trimisă spre comunicare și publicare.
- [Bianchi *et al.*, 1984] R. Bianchi, F. Capaccioni, P. Cerroni, M. Coradini, E. Flamini, P. Hurren, G. Martelli, P.N. Smith: 1984. *Experimental simulation of asteroidal fragmentation by macroscopic hypervelocity impacts against free falling bodies*, Astronomy and Astrophysics, **139**, p. 1.
- [Binzel, 1997] R.P. Binzel: 1997. *A near-Earth object hazard index* în “Near Earth Objects. The United Nations International Conference”, editat de J. Remo, New-York, p. 545.
- [Bottke *et al.*, 2000] W.F. Bottke Jr, R. Jedicke, A. Morbidelli, J.M. Petit, B. Gladman: 2000. *Understanding the distribution of near-Earth asteroids*, Science, **288**, p. 2190.
- [Bowell *et al.*, 1989] E. Bowell, B. Hapke, D. Domingue, K. Lumme, J. Peltoniemi, A.W. Harris: 1989. *Application of photometric models to asteroids*, în “Asteroids II”, editat de P. Binzel, T. Gehrels, M.S. Matthews, The University of Arizona Press, p. 524.
- [Brouwer și Clemence, 1961] D. Brouwer, G.M. Clemence: 1961. *Methods of Celestial Mechanics*, Academic Press, New York and London.

- [Carusi și Dotto, 1996] A. Carusi, E. Dotto: 1996. *Close Encounters of Minor Bodies with the Earth*, Icarus, **124**, p. 392.
- [Carusi *et al.*, 1990] A. Carusi, G.B. Valsecchi, R. Greenberg: 1990. *Planetary close encounters: geometry of approach and post-encounter orbital parameters*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, **49**, p. 111.
- [Chesley și Milani, 1999] S.R. Chesley, A. Milani: 1999. *NEODyS - An online information system for near-Earth objects*, preprint (<http://newton.dm.unipi.it/neodyS>).
- [Chesley și Milani, 2001] S.R. Chesley, A. Milani: 2001. *Nonlinear methods for the propagation of orbital uncertainty*, preprint.
- [Chesley *et al.*, 2001] S.R. Chesley, A. Milani, G.B. Valsecchi, D.K. Yeomans: 2001. *Quantifying the risk posed by potential Earth impacts*, “Asteroids 2001” Conference, Palermo, preprint.
- [Consolmagno și Schaefer, 1994] G.H. Consolmagno, S.J., M.W. Schaefer: 1994. *Worlds apart: A textbook in planetary sciences*, Cambridge University Press.
- [Davis *et al.*, 1989] D.R. Davis, S.J. Weidenschilling, P. Farinella, P. Paolicchi, R.P. Binzel: 1989. *Asteroid collisional history: effects on sizes and spins*, în “Asteroids II”, editat de P. Binzel, T. Gehrels, M.S. Matthews, The University of Arizona Press, p. 805.
- [Davis *et al.*, 1989] D.R. Davis, A.L. Friedlander, T.D. Jones: 1993. *Role of near-Earth asteroids in the space exploration initiative*, în “Resources of Near-Earth- Space”, editat de J. Lewis, M.S. Matthews, M.L. Guerrieri, The University of Arizona Press, p. 619.
- [Duncan *et al.*, 1988] M. Duncan, T. Quinn, S. Tremaine: 1988. *The origin of short period comets*, The Astrophysical Journal Letters, **328**, p. L69.
- [Duncan *et al.*, 1995] M. Duncan, H.F. Levison, S.M. Budd: 1995. *The dynamical structure of the Kuiper belt*, The Astronomical Journal, **110**, p. 3073.
- [Dvorak, 1999] R. Dvorak: 1999. *The long term evolution of Atens and Apollos*, în Proceedings of the IAU Colloquium 173, “Evolution and Source Regions of Asteroids and Comets”, Tatranska Lomnica 1998, editat de J. Svoren, E.M. Pittich și H. Rickman, Astronomical Institute of the Slovak Academy of Sciences, p. 59.
- [Everhart, 1973] E. Everhart: 1973. *Examination of several ideas of comet origins*, The Astronomical Journal, **78**, p. 329.
- [Everhart, 1974] E. Everhart: 1974. *Implicit single-sequence methods for integrating orbits*, Celestial Mechanics, **10**, p. 35.
- [Everhart, 1984] E. Everhart: 1984. *An efficient integrator that uses Gauss-Radau spacings*, în “Dynamics of Comets: Their Origin and Evolution”, editat de A. Carusi și G.B. Valsecchi, D. Reidel, p. 185.
- [Farinella și Chauvineau, 1993] P. Farinella, B. Chauvineau: 1993. *On the evolution of binary Earth-approaching asteroids*, Astronomy and Astrophysics, **279**, p. 251.
- [Farinella *et al.*, 1994] P. Farinella, Ch. Froeschlé, R. Gonczi: 1994. *Meteorite delivery and transport*, în “Asteroids, Comets, Meteors 1993”, Proceedings of the 160th Symposium of the International Astronomical Union, Italy, editat de A. Milani, M. di Martino și A. Cellino, Kluwer Academic Publishers, p. 189.
- [Farinella *et al.*, 1999] P. Farinella, D.R. Davis, F. Marzari, D. Vokrouhlický: 1999. *Collisional evolution of asteroids*, în Proceedings of the IAU Colloquium 173, “Evolution and Source Regions of Asteroids and Comets”, Tatranska Lomnica 1998, editat de J. Svoren, E.M. Pittich și H. Rickman, Astronomical Institute of the Slovak Academy of Sciences, p. 129.
- [Fernández, 1980] J.A. Fernández: 1980. *On the existence of a comet belt beyond Neptune*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **192**, p. 481.
- [Ferraz-Mello, 1994] S. Ferraz-Mello: 1994. *Kirkwood gaps and resonant groups*, în “Asteroids, Comets, Meteors 1993”, Proceedings of the 160th Symposium of the International Astronomical Union, Italy, editat de A. Milani, M. di Martino și A. Cellino, Kluwer Academic Publishers, p. 175.

- [Froeschlé și Scholl, 1987] Ch. Froeschlé, H. School: 1987. *Orbital evolution of asteroids near the secular resonance ν_6* , Astronomy and Astrophysics, **179**, p. 294.
- [Froeschlé și Morbidelli, 1994] Ch. Froeschlé, A. Morbidelli: 1994. *The secular resonances in the solar system*, în “Asteroids, Comets, Meteors 1993”, Proceedings of the 160th Symposium of the International Astronomical Union, Italy, editat de A. Milani, M. di Martino și A. Cellino, Kluwer Academic Publishers, p. 189.
- [Froeschlé *et al.*, 1999] Ch. Froeschlé, P. Michel, C. Froeschlé: 1999. *Dynamical transport mechanisms of planet-crossing bodies*, în Proceedings of the IAU Colloquium 173, “Evolution and Source Regions of Asteroids and Comets”, Tatranska Lomnica 1998, editat de J. Svoren, E.M. Pittich și H. Rickman, Astronomical Institute of the Slovak Academy of Sciences, p. 87.
- [Fujiwara *et al.*, 1989] A. Fujiwara, P. Cerroni, D.R. Davis, E. Ryan, M. di Martino, K. Holsapple, K. Housen: 1989. *Experiments and scaling laws on catastrophic collisions*, în “Asteroids II”, editat de P. Binzel, T. Gehrels, M.S. Matthews, The University of Arizona Press, p. 240.
- [Giorgini *et al.*, 1996] J.D. Giorgini, D.K. Yeomans, A.B. Chamberlin, P.W. Chodas, R.A. Jacobson, M.S. Keesey, J.H. Lieske, S.J. Ostro, E.M. Standish, R.N. Wimberly: 1996. *JPL’s on-line solar system data service*, Bulletin of the American Astronomical Society, **28**, p. 1158.
- [Giorgini *et al.*, 2002] J.D. Giorgini, S.J. Ostro, L.A.M. Benner, P.W. Chodas, S.R. Chesley, R.H. Hudson, M.C. Nolan, A.R. Klemola, E.M. Standish, R.F. Jurgens, R. Rose, A.B. Chamberlin, D.K. Yeomans, J.L. Margot: 2002. *Asteroid 1950 DA’s encounter with Earth in 2880: Physical limits of collision probability prediction*, Science, **296**, p. 132.
- [Gladman și Duncan, 1990] B. Gladman, M. Duncan: 1990. *On the fates of minor bodies in the outer solar system*, The Astronomical Journal, **100**, p. 1680.
- [Greenberg și Nolan, 1989] R. Greenberg, M.C. Nolan: 1989. *Delivery of asteroids and meteorites to the inner solar system*, în “Asteroids II”, editat de P. Binzel, T. Gehrels, M.S. Matthews, The University of Arizona Press, p. 778.
- [Greenberg și Nolan, 1993] R. Greenberg, M.C. Nolan: 1993. *Dynamical relationships of near-Earth asteroids to main-belt asteroids*, în “Resources of near-Earth space”, editat de S. Lewis, The University of Arizona Press, p. 473.
- [Harris și Bailey, 1998] N.W. Harris, M.E. Bailey: 1998. *Dynamical evolution of cometary asteroids*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **297**, p. 1227.
- [Hills și Goda, 1993] J.G. Hills, M.P. Goda: 1993. *The fragmentation of small asteroids in the atmosphere*, The Astronomical Journal, **105**, 3, p. 1114.
- [Hills și Mader, 1997] J.G. Hills, C.L. Mader: 1997. *Tsunami produced by the impacts of small asteroids*, în “Near Earth Objects. The United Nations International Conference”, editat de J. Remo, New-York, p. 381.
- [Holman și Wisdom, 1993] M.J. Holman, J. Wisdom: 1993. *Dynamical stability in the outer solar system and the delivery of short period comets*, The Astronomical Journal, **105**, p. 1987.
- [Isobe, 2000] S. Isobe: 2000: *Short warning time and a NEA collision*, XXIVth IAU General Assembly, Manchester, UK, (comunicare privată).
- [Janiczek *et al.*, 1972] P.M. Janiczek, P.K. Seidelmann, R.L. Duncombe: 1972. *Resonances and encounters in the inner solar system*, The Astronomical Journal, **77-9**, p. 329.
- [Jewitt și Luu, 1995] D.C. Jewitt, J.X. Luu: 1995. *The solar system beyond Neptune*, The Astronomical Journal, **109**, p. 1867.
- [Karttunen, 1994] H. Karttunen: 1994. *Fundamental Astronomy*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, Paris, London, New-York.
- [Kozai, 1962] Y. Kozai: 1962. *Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity*, The Astronomical Journal, **67**, 9, p. 591.

- [Knezevic și Milani, 1994] Z. Knezevic, A. Milani: 1994. *Asteroid proper elements: The big picture*, în “Asteroids, Comets, Meteors 1993”, Proceedings of the 160th Symposium of the International Astronomical Union, Italy, editat de A. Milani, M. di Martino și A. Cellino, Kluwer Academic Publishers, p. 189.
- [Knezevic și Milani, 2000] Z. Knezevic, A. Milani: 2000. *Synthetic proper elements for outer main belt asteroids*, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **78**, p. 17.
- [Levison, 1991] H.F. Levison: 1991. *The long-term dynamical behaviour of small bodies in the Kuiper belt*, *The Astronomical Journal*, **102**, p. 787.
- [Levison și Duncan, 1994] H.F. Levison, M. Duncan: 1994. *The long-term dynamical behaviour of short-period comets*, *Icarus* **108**, p. 18.
- [Marinescu *et al.*, 1987] Gh. Marinescu, I. Rizzoli, I. Popescu, C. Ștefan: 1987. *Probleme de analiză numerică rezolvate cu calculatorul*, Editura Academiei Române, București.
- [Marsden, 1997] B. Marsden: 1997. *Overview of orbits*, în “Near Earth Objects. The United Nations International Conference”, editat de J. Remo, New-York, p. 52.
- [Martelli *et al.*, 1993] G. Martelli, P. Rothwell, I. Giblin, P.N. Smith, M. di Martino, P. Farinella: 1993. *Fragment jets from catastrophic break-up events and the formation of asteroid binaries and families*, *Astronomy and Astrophysics*, **271**, p. 315.
- [Marzari *et al.*, 1996] F. Marzari, A. Cellino, P. Farinella, V. Zappala, V. Vanzani: 1996. *Origin and evolution of the Vesta asteroid family*, *Astronomy and Astrophysics*, **316**, p. 248.
- [McFadden *et al.*, 1989] L.A. McFadden, D.J. Tholen, G.J. Veeder: 1989. *Physical properties of Aten, Apollo and Amor asteroids*, în “Asteroids II”, editat de P. Binzel, T. Gehrels, M.S. Matthews, The University of Arizona Press, p. 442.
- [Michel și Thomas, 1996] P. Michel, F. Thomas: 1996. *The Kozai resonance for near-Earth asteroids with semimajor axis smaller than 2 AU*, *Astronomy and Astrophysics*, **307**, p. 310.
- [Milani, 1998] A. Milani: 1998. *Dynamics of planet-crossing asteroids*, Maratea NATO-ASI invited paper, editat de A.E. Roy și B. Steves.
- [Milani, 1999] A. Milani: 1999. *The asteroid identification problem I: recovery of lost asteroids*, *Icarus* **137**, p. 269.
- [Milani *et al.*, 1999] A. Milani, S.R. Chesley, G.B. Valsecchi: 1999. *Close approaches of asteroid 1999 AN₁₀: resonant and non-resonant returns*, *Astronomy and Astrophysics Letters*, **346**, p. L65.
- [Milani *et al.*, 2000a] A. Milani, S.R. Chesley, A. Boattini, G.B. Valsecchi: 2000. *Virtual impactors: Search and destroy*, *Icarus* **145**, p. 12.
- [Milani *et al.*, 2000b] A. Milani, S.R. Chesley, G.B. Valsecchi: 2000. *Asteroid close encounter with Earth: Risk assessment*, *Planetary and Space Science* **48**, p. 945.
- [Milani *et al.*, 2002] A. Milani, S.R. Chesley, P.W. Chodas, G.B. Valsecchi: 2002. *Asteroid close approaches and impact opportunities*, în “Asteroids III”, University of Arizona Press, sub tipar.
- [Milani și Mazzini, 1997] A. Milani, G. Mazzini: 1997. *Sistemi dinamici*, Proiect HyperTextBook, Internet (<http://copernico.dm.unipi.it/~milani/dinsis/dinsis.html>).
- [Milani și Valsecchi, 1999] A. Milani, G.B. Valsecchi: 1999. *The asteroid identification problem II: target plane confidence boundaries*, *Icarus* **140**, p. 408.
- [Morrison, 1992] D. Morrison: 1992. *The Spaceguard Survey: Report of the NASA International Near-Earth-Object Detection Workshop*, Washington 1992, p. 1.
- [Muinonen și Bowell, 1993] K. Muinonen, E. Bowell: 1993. *Asteroid orbit determination using bayesian probabilities*, *Icarus* **104**, p. 255.
- [Muller și Dvorak, 1995] P. Muller, R. Dvorak: 1995. *A survey of the dynamics of main belt asteroids. II*, *Astronomy and Astrophysics*, **300**, p. 289.

- [Murray și Dermott, 1999] C.D. Murray, S.F. Dermott: 1999. *Solar System Dynamics*, Cambridge University Press.
- [Nakamura și Kurahashi, 1998] T. Nakamura, H. Kurahashi: 1998. *Collisional probability of periodic comets with the terrestrial planets: an invalid case of analytic formulation*, The Astronomical Journal, **115**, p. 848.
- [Öpik, 1963] E. Öpik: 1963. *Survival of comet nuclei and the asteroids*, Advances in Astronomy and Astrophysics, **2**, p. 219.
- [Oprîșan și Sebe, 1999] G. Oprîșan, G.I. Sebe: 1999. *Compendiu de teoria probabilităților și statistică matematică*, Editura Tehnică, București.
- [Oproiu et al., 1989] T. Oproiu, A. Pal, V. Pop, V. Ureche: 1989. *Astronomie. Culegere de exerciții, probleme și programe de calcul*, Universitatea din Cluj-Napoca, Facultatea de Matematică și Fizică.
- [Pal și Ureche, 1983] A. Pal, V. Ureche: 1983. *Astronomie*, Editura Didactică și Pedagogică, București.
- [Pravec et al., 1999] P. Pravec, M. Wolf, L. Šarounová: 1999. *How many binaries are there among near-Earth asteroids*, în Proceedings of the IAU Colloquium 173, “Evolution and Source Regions of Asteroids and Comets”, Tatranska Lomnica 1998, editat de J. Svoren, E.M. Pittich și H. Rickman, Astronomical Institute of the Slovak Academy of Sciences, p. 159.
- [Press et al., 1997] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery: 1997. *Numerical Recipes in Fortran 77. The Art of Scientific Computing*, Second edition, Cambridge University Press.
- [Quinn et al., 1991] T.R. Quinn, S. Tremaine, M. Duncan 1991. *A three million year integration of the Earth's orbit*, The Astronomical Journal, **101**, p. 2287.
- [Rabinowitz, 1993] D.L. Rabinowitz: 1993. *The size distribution of the Earth-approaching asteroids*, The Astrophysical Journal, **407**, p. 412.
- [Rabinowitz et al., 1994] D. Rabinowitz, E. Bowell, E.M. Shoemaker, K. Muinonen: 1994. *The population of Earth-crossing asteroids*, în “Hazards due to Comets and Asteroids”, editat de T. Gehrels, University of Arizona Press, Tucson, p. 285.
- [School și Froeschlé, 1986] H. School, Ch. Froeschlé: 1986. *The effects of the secular resonances ν_{16} and ν_5 on asteroidal orbits*, Astronomy and Astrophysics, **170**, p. 138.
- [School și Froeschlé, 1991] H. School, Ch. Froeschlé: 1991. *The ν_6 secular resonance region near 2 AU: a possible source of meteorites*, Astronomy and Astrophysics, **245**, p. 316.
- [Sekanina și Yeomans, 1984] Z. Sekanina, D.K. Yeomans: 1984. *Close encounters and collisions of comets with the Earth*, The Astronomical Journal, **89**, 1, p. 154.
- [Sitarski, 1968] G. Sitarski: 1968. *Approaches of the parabolic comets to the outer planets*, Acta Astronomica, **18**, 2, p. 171.
- [Sharpton și Marin, 1997] V.L. Sharpton, L.E. Marin: 1997. *The Cretaceous-Tertiary impact crater and the cosmic projectile that produced it*, în “Near Earth Objects. The United Nations International Conference”, editat de J. Remo, New-York, p. 353.
- [Shoemaker et al., 1994] E.M. Shoemaker, P.R. Weissman, C.S. Shoemaker: 1994. *The flux of periodic comets near Earth*, în “Hazards due to Comets and Asteroids”, editat de T. Gehrels, University of Arizona Press, Tucson, p. 313.
- [Steel și Baggaley, 1985] D.I. Steel, W.J. Baggaley: 1985. *Collisions in the solar system -I. Impacts of the Apollo-Amor-Aten asteroids upon the terrestrial planets*, MNRAS, **212**, p. 817.
- [Tancredi et al., 2001] G. Tancredi, A. Sanchez, F. Roig: 2001. *A comparison between methods to compute Lyapounov exponents*, The Astronomical Journal, **121**, p. 1171.
- [Tisserand, 1896] F. Tisserand: 1896. *Traité de mécanique céleste*, Tome IV, Gauthier-Villars, Paris.
- [Ureche, 1982] V. Ureche: 1982. *Universul I - Astronomie*, Editura Dacia, Cluj-Napoca.
- [Ureche, 1987] V. Ureche: 1987. *Universul II - Astrofizică*, Editura Dacia, Cluj-Napoca.

- [Valsecchi *et al.*, 2001] G. B. Valsecchi, A. Milani, G.F. Gronchi, S. R. Chesley: 2000. *The distribution of energy perturbations at planetary close encounters*, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, **78**, p. 83.
- [Vokrouhlický și Farinella, 1998] D. Vokrouhlický, P. Farinella: 1998. *The Yarkovsky seasonal effect on asteroidal fragments: a nonlinearized theory for the plane-parallel case*, *The Astronomical Journal*, **116**, p. 2032.
- [Vokrouhlický *et al.*, 2001] D. Vokrouhlický, S.R. Chesley, A. Milani: 2001. *On the observability of radiation forces acting on near-Earth asteroids*, in “Dynamics of Natural and Artificial Celestial Bodies”, *Proceedings of the US/European Celestial Mechanics Workshop, Poznań 2000*, editat de H. Prętko-Ziomek, E. Wnuk, P.K. Seidelmann și D. Richardson, Kluwer Academic Publishers, p. 289.
- [Weissman *et al.*, 1989] P.R. Weissman, M.F. A’Hearn, L.A. Mc Fadden, H. Rickman: 1989. *Evolution of comets into asteroids*, în “Asteroids II”, editat de P. Binzel, T. Gehrels, M.S. Matthews, The University of Arizona Press, p. 880.
- [Anuarul Astr., 2001] ***: 2001. *Anuarul Astronomic 2001*, Editura Academiei Române, București.
- [FPC, 2001] ***: 2001. *Free Pascal Compiler*, Internet Release (<http://www.freepascal.org>).

Indice de termeni

- albedo, 4, 59–63
- asteroid
 - de origine cometară, 1, 3, 48, 49, 63, 64, 105
 - de tip ECA, 3, 47, 50, 59, 79
 - potențial periculos (PHA), 46
 - virtual, 83, 87, 91, 93, 94, 96–99
- Centaurus, 64, 65
- centura lui Kuiper, 28, 64, 65, 68
- coeficient de partiționare al energiei, 53
- coliziune interasteroidală, 3, 52, 55, 57, 59
- cometă, 1, 3, 12, 63–65, 68, 105
- contur Tisserand, 42, 51, 52, 65, 67, 68
- criteriul (parametrul) Tisserand, 12, 13, 17, 19, 21, 42, 63
- densitate de energie colizională, 53
- distanța MOID, 26, 45, 46, 91, 93, 94, 110, 118
- echilibru colizional, 58, 59
- ecuații
 - ale lui Hill, 17
 - cu variații, 33, 34, 89
- efect
 - Poynting-Robertson, 59, 111
 - termic Yarkovsky, 59
- elementele equinoctale, 85
- energia specifică colizională limită, 53
- exponent caracteristic Lyapounov (LCE), 34, 35, 37, 50, 110
- factor de convergență gravitațională, 22, 55, 71, 78
- flux integral, 33, 89, 90
- golurile lui Kirkwood, 49
- grad de periculozitate, 102–105
- impactor virtual, 93, 94, 96, 97, 99
- incertitudine orbitală, 2, 90, 103
 - elipsa de, 93, 95
 - elipsoid de, 82–85, 90, 97–99
 - regiune de, 80, 82, 84, 86, 87, 90, 91, 93–97, 99, 109, 110, 119
- înclinația orbitei planetocentrice, 22, 26, 87
- integrala (constanta) Jacobi, 10–12, 15–17, 30, 32
- librație, 39, 40, 43
- linia de variație (LOV), 87, 90, 91, 93–95, 98, 100
- mecanism de protecție, 37, 42, 43, 48
- mișcare
 - haotică, 29, 32, 34, 35, 37, 50, 66, 110, 117, 118
 - regulară, 34, 37, 50
- norul lui Oort, 64, 68
- orbită zgârie-Soare, 28, 66–68
- parametrul apropierii, 22, 24, 25, 87, 88, 91
- plan țintă, 91–99
- puncte Lagrange de echilibru, 14, 15, 17, 43
- raza de impact, 23, 92
- regiune cometară activă, 64, 68
- rezonanță
 - a mișcării medii, 37, 39, 43, 48, 50
 - argument de, 38, 39, 41
 - Kozai, 42, 43, 47, 66
 - ordin de, 37, 49
 - seculară, 41, 42, 48, 50
- secțiune
 - eficace de coliziune, 3, 58, 74, 78, 79
 - Poincaré, 30, 32
- sfera de acțiune gravitațională, 17–19, 89, 92
- șir virtual, 94, 97, 99
- sistemul de magnitudini H-G, 62
- suprafața de viteză nulă, 15
- test de reversibilitate, 117
- timp
 - de viață colizional, 58
 - de viață dinamic, 52, 63, 64, 66–68
 - Lyapounov, 34, 36, 50
- unghi de deflexie gravitațională, 22, 23
- viteza planetocentrică neperturbată, 18, 19, 22, 87, 91, 102