MATHEMATICA, Tome 54 (77), N° 1, 2012, pp. 64–77

SUR L'APPLICATION D'ABEL-JACOBI, L'ESPACE DES MODULES DES SURFACES DE RIEMANN ET LE PROBLÈME DE SCHOTTKY

A. LESFARI

Abstract. In this paper we discuss some interesting problems. Abel's theorem classifies divisors by their images in the jacobian. The Jacobi inversion problem askes whether we can find a divisor that is the preimage for an arbitrary point in the jacobian. The Schottky problem is the problem of characterizing jacobian varieties among all abelian varieties. We study the map X (Riemann surface) to its jacobian variety $\mathrm{Jac}(X)$ from a moduli point of view. The problem consists in finding an analytical characterization of the complex tori that arise as jacobians inside the Siegel upper half space.

MSC 2010. 14H40, 14H10, 14H42.

Key words. Jacobians, moduli, Schottky problem.

Les théorèmes d'Abel et de Jacobi jouent un rôle important dans la théorie des surfaces de Riemann compactes. Le théorème d'Abel classifie les diviseurs par leurs images dans la variété jacobienne tandis que le problème d'inversion de Jacobi concerne l'existence d'un diviseur qui soit l'image inverse d'un point arbitraire sur la variété jacobienne. Ces théorèmes seront étudiés en détail. Ensuite, on aborde l'étude de l'espace des modules des surfaces de Riemann et le problème de Schottky. Soit $\mathcal{M}_g$ l'espace des modules des surfaces de Riemann de genre g, i.e., l'ensemble des classes d'isomorphismes de surfaces de Riemann compactes de genre g. On montre que la sphère est la seule surface de Riemann de genre 0. Par contre pour $g \geq 1$, l'espace $\mathcal{M}_g$ est indénombrable et sa dimension est égale à $3g-3$ pour $g \geq 2$. Autrement dit, ces surfaces dépendent de $3g-3$ paramètres complexes pour $g \geq 2$ et d'un seul paramètre pour $g = 1$. Pour $g \geq 4$, il existe des relations non triviales satisfaites par les matrices des périodes de surfaces de Riemann. Le problème de Schottky consiste à expliciter ces relations. Il s'agit de trouver des critères pour qu'une matrice des périodes appartenant au demi-espace de Siegel soit la matrice des périodes d'une surface de Riemann. Géométriquement, le problème de Schottky consiste à caractériser les jacobiennes parmi toutes les variétés abéliennes principalement polarisées. Aussi, il existe une connection intéressante entre l'étude du problème de Schottky et l'étude des systèmes intégrables notamment la hiérarchie KP (Kadomtsev-Petviashvili).

1. PRÉLIMINAIRES

Soit X une surface de Riemann de genre g. Soient p un point de X, $\tau_p : X \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ un paramètre local en p (ou une uniformisante locale en p, i.e., une carte locale en p appliquant p sur 0) et f une fonction méromorphe au voisinage de p. L'ordre de f en p, est l'unique entier n tel que : $f = \tau_p^n \cdot g$, où g est holomorphe ne s'annulant pas en p. Dans le cas où $f = 0$, on choisit par convention $n = +\infty$. L'entier n dépend de p et de f et on le note $\text{ord}_p f$. On a $\text{ord}_p(f+g) \geq \inf(\text{ord}_p f, \text{ord}_p g)$ et $\text{ord}_p fg = \text{ord}_p f + \text{ord}_p g$. Un diviseur sur X est une combinaison formelle du type $\mathcal{D} = \sum_{p\in X} n_p \cdot p = \sum_j n_j p_j$, $n_j \in \mathbb{Z}$ avec (p_j) une famille localement finie de points de X. La somme cidessus étant finie, on peut donc définir le support d'un diviseur comme étant l'ensemble fini de points p_j pour lesquels le coefficient n_j est non nul. Le diviseur $\mathcal{D}$ est fini si son support est fini et ce sera toujours le cas si X est une surface de Riemann compacte. L'ensemble des diviseurs sur X est un groupe abélien noté $\text{Div}(X)$. L'addition des diviseurs est définie par l'addition des coefficients. Le degré du diviseur $\mathcal{D}$ est un entier noté $\deg \mathcal{D}$ et est défini par $\deg \mathcal{D} = \sum_j n_j$. L'application $\deg : \text{Div}(X) \to \mathbb{Z}$, $\mathcal{D} \mapsto \deg \mathcal{D}$ est un homomorphisme de groupe. Le noyau de cet homomorphisme est l'ensemble des diviseurs de degré 0, noté $\text{Div}^\circ(X)$, et forme un sous-groupe de $\text{Div}(X)$. Soit $f \neq 0$, une fonction méromorphe sur X. A cette fonction f, on fait correspondre un diviseur noté (f) en posant $(f) = \sum_{p\in X} \text{ord}_p f \cdot p$ où les $\text{ord}_p f$ sont nuls sauf un nombre fini d'entre eux. En désignant par $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ les zéros de f de multiplicité $n_1, \ldots, n_l$ respectivement et par $\beta_1, \ldots, \beta_m$ les pôles de f de multiplicité $p_1, \ldots, p_m$ respectivement, alors le diviseur de f est égal à $(f) = \sum_{j=1}^{l} n_j \alpha_j - \sum_{j=1}^{m} p_j \beta_j = (f)_0 - (f)_\infty$ où $(f)_0 =$ (diviseur des zéros de f) et $(f)_\infty =$ (diviseur des pôles de$f$). Géométriquement, celà signifie que $(f)_0$ correspond à l'intersection de X avec la courbe $f = 0$ et $(f)_\infty$ à l'intersection de X avec $\frac{1}{f} = 0$. Tout diviseur d'une fonction méromorphe est dit diviseur principal. L'ensemble des diviseurs principaux forme un sous-groupe de $\text{Div}^\circ(X)$. Sur toute surface de Riemann compacte, une fonction méromorphe $f \neq 0$ a le même nombre de zéros que des pôles, donc $\deg\,(f) = 0$. Autrement dit, tout diviseur principal a le degré 0 mais en général, les diviseurs de degré 0 ne sont pas tous principaux. Le groupe de Picard, noté $\text{Pic}(X)$, est le groupe des diviseurs quotienté par les diviseurs principaux. La variété jacobienne, notée $\text{Jac}(X)$, s'identifie au quotient du groupe des diviseurs de degré 0 par les diviseurs principaux. Nous avons $\text{Jac}(X) \simeq \text{Pic}^\circ(X)$ où ce dernier désigne le sous-groupe de $\text{Pic}(X)$ formé par les classes des diviseurs de degré 0. On dit qu'un diviseur $\mathcal{D}$ est positif et on note $\mathcal{D} \geq 0$, si les entiers n_j qui interviennent dans la somme sont positifs. Plus généralement, on définit la relation d'ordre partiel $\geq$ sur les diviseurs par $\mathcal{D}_1 \geq \mathcal{D}_2$ si et seulement si $\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2$ est positif. Deux diviseurs $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont dits linéairement équivalents (et on note $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$) si $\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2$ est principal, i.e., si $\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2 = (f)$ où f est une fonction méromorphe.

Si $\mathcal{D} = \sum_{p\in X} n_p \cdot p$ est un diviseur, on notera $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ l'ensemble des fonctions méromorphes f telles que: $\mathrm{ord}_p f + n_p \geq 0$, pour tout $p \in X$. Autrement dit, $\mathcal{L}(\mathcal{D}) = \{f$ méromorphe sur $X : (f) + \mathcal{D} \geq 0\}$, i.e., l'espace vectoriel des fonctions de X dont le diviseur est plus grand que $-\mathcal{D}$. Si $(f) + \mathcal{D}$ n'est ≥ 0 pour aucun f, on posera $\mathcal{L}(\mathcal{D}) = 0$. Par exemple, si le diviseur $\mathcal{D}$ est positif alors $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ est l'ensemble des fonctions holomorphes en dehors de $\mathcal{D}$ et ayant au plus des pôles simples le long de $\mathcal{D}$. Si $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$, alors $\mathcal{L}(\mathcal{D}_1)$ est isomorphe à $\mathcal{L}(\mathcal{D}_2)$ et en outre $\deg \mathcal{D}_1 = \deg \mathcal{D}_2$. On peut associer à chaque forme différentielle ω un diviseur noté (ω). Si $\omega = f d\tau_p$ avec f une fonction méromorphe sur X et τ_p un paramètre local en $p \in X$, on définit l'ordre de ω en p par $\mathrm{ord}_p\omega = \mathrm{ord}_0 f$ et le diviseur (ω) de ω par $(\omega) = \sum_{p\in X} \mathrm{ord}_p\omega \cdot p$. Si $\mathcal{D} = \sum_{p\in X} n_p \cdot p$ est un diviseur, on définit de façon analogue à $\mathcal{L}(\mathcal{D})$, l'espace linéaire $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ comme étant l'ensemble des formes différentielles méromorphes ω sur X telles que : $\mathrm{ord}_p\omega + n_p \geq 0$, pour tout $p \in X$. Autrement dit, $\mathcal{I}(\mathcal{D}) = \{\omega$ méromorphe sur $X : (\omega) + \mathcal{D} \geq 0\}$, i.e., l'ensemble des formes différentielles méromorphes ω sur X telles que : $(\omega)+\mathcal{D} \geq 0$. Si $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$, alors $\mathcal{I}(\mathcal{D}_1)$ est isomorphe à $\mathcal{I}(\mathcal{D}_2)$, d'où $\dim \mathcal{I}(\mathcal{D}_1) = \dim \mathcal{I}(\mathcal{D}_2)$. Dans le cas où le diviseur $\mathcal{D}$ est négatif, alors $(\omega)+\mathcal{D} \geq 0$ est l'ensemble des formes différentielles qui n'ont pas de pôles et qui ont des zéros au moins aux points de $\mathcal{D}$. Notons enfin qu'en vertu du théorème des résidus, on a $\sum_{p\in X}$ Rés $(\omega) = 0$, où Rés (ω) est le résidu en p de ω, i.e., le coefficient de $\frac{1}{\tau_p}$ dans le développement de f en série de Laurent. On appelle diviseur canonique sur X et l'on désigne par K, le diviseur (ω) d'une $1-$forme méromorphe $\omega \neq 0$ sur X. Soit $\mathcal{D}$ un diviseur sur une surface de Riemann compacte X et K un diviseur canonique sur X. Alors, l'application $\psi : \mathcal{L}(K - \mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{I}(-\mathcal{D})$, $f \longmapsto f\omega$ est un isomorphisme. Rappelons enfin l'important théorème de Riemann-Roch : Si X une surface de Riemann compacte et $\mathcal{D}$ est un diviseur sur X, alors

$$\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) - \dim \mathcal{L}(K - \mathcal{D}) = \deg \mathcal{D} - g + 1, \tag{1}$$

où K est le diviseur canonique sur X et g est le genre de X. Cette formule peut s'écrire sous la forme équivalente

$$\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) - \dim \mathcal{I}(-\mathcal{D}) = \deg \mathcal{D} - g + 1. \tag{2}$$

2. LE THÉORÈME D'ABEL ET LE PROBLÈME D'INVERSION DE JACOBI

THÉORÈME 1. *Soient $p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots q_m$ des points de X. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Il existe une fonction méromorphe f telle que: $(f) = \sum_{j=1}^m q_j - \sum_{j=1}^m p_j$.*

(ii) *Il existe un chemin fermé γ tel que: $\forall\omega \in \Omega^1(X)$, $\sum_{j=1}^m \int_{p_j}^{q_j} \omega = \int_\gamma \omega$ où $\Omega^1(X)$ est l'ensemble des différentielles holomorphes sur X.*

Démonstration. Montrons que : $(i) \Longrightarrow (ii)$. Soit $(a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g)$ une base symplectique du groupe d'homologie $H_1(X, \mathbb{Z})$. On désigne par X^* la représentation normale de la surface de Riemann X, i.e., un polygône à $4g$

côtés identifiés deux à deux (On le note aussi par $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$ et peut être définit à partir d'une triangulation de la surface X). Soit f une fonction méromorphe sur X et soit $\omega = d\log f \in \Omega^1(X)$. Posons $\varphi(p) \equiv \int_{p_0}^{p}\omega$. Nous allons calculer $\int_{\partial X^*}\varphi d\log f$. D'après le théorème des résidus, on a $\int_{\partial X^*}\varphi d\log f = 2\pi\sum \text{Rés}\ (\varphi d\log f)$. Notons que puisque la fonction φ est holomorphe, elle n'a donc pas de pôles et par conséquent pour calculer le résidu de $\varphi d\log f$ sur X^*, il suffit de déterminer les pôles de $d\log f$. Par hypothèse, la fonction f est méromorphe. Donc on a au voisinage d'un pôle r d'ordre m, $f(z) = (z-r)^m g(z)$, $m>0$, et au voisinage d'un zéro r d'ordre m, $f(z) = (z-r)^m g(z)$, $m<0$, avec $g(z)$ une fonction holomorphe au voisinage de r et telle que : $g(r)\neq 0$. On a $\log f = m\log(z-r)+\log g(z)$ et $d\log f = \frac{m}{z-r}+\frac{g'(z)}{g(z)}$. Notons que $d\log f$ a des pôles aux zéros et aux pôles de f. Dès lors, Rés $(\varphi d\log f) = \varphi(r_j)\cdot m_j$, où r_j est un pôle ou un zéro de f avec le signe positif ou négatif suivant que r_j est un zéro ou un pôle de f tandis que les entiers m_j désignent la multiplicité de r_j. Donc

$$\int_{\partial X^*}\varphi d\log f = 2\pi\sum\varphi(r_j)\cdot m_j = 2\pi\sum_{j=1}^{m}\int_{p_j}^{q_j}\omega, \tag{3}$$

en vertu de la définition de φ, r_j et m_j. Calculons cette intégrale d'une autre manière. On a

$$\int_{\partial X^*}\varphi d\log f = \sum_{m=1}^{g}\left(\omega(a_m)\int_{b_m}d\log f - \omega(b_m)\int_{a_m}d\log f\right),$$

$$\int_{b_m}d\log f(z) = \int_{b_m}d\log|f(z)| + i\int_{b_m}d(\arg f(z)) = 2\pi\mathrm{i}\alpha_m, \quad \alpha_m\in\mathbb{Z},$$

et $\int_{a_m}d\log f(z) = 2\pi\mathrm{i}\beta_m$, $\beta_m\in\mathbb{Z}$. D'où

$$\int_{\partial X^*}\varphi d\log f = 2\pi\mathrm{i}\sum_{m=1}^{g}(\alpha_m\omega(a_m)-\beta_m\omega(b_m)).$$

Posons $\gamma = \displaystyle\sum_{m=1}^{g}(\alpha_m a_m - \beta_m b_m)$, d'où$\int_{\partial X^*}\varphi d\log f = 2\pi\mathrm{i}\int_\gamma\omega$. En comparant avec (3), on obtient $\int_\gamma\omega = \sum_{j=1}^{m}\int_{p_j}^{q_j}\omega$. Montrons maintenant que : $(ii)\Longrightarrow(i)$. Soient $p_1,\ldots,p_m,q_1,\ldots q_m$ des points de X et γ un chemin fermé tel que: $\forall\omega\in\Omega^1(X)$, $\sum_{j=1}^{k}\int_{p_j}^{q_j}\omega = \int_\gamma\omega$. Montrons qu'il existe une fonction méromorphe telle que: $(f) = \sum_{j=1}^{m}q_j - \sum_{j=1}^{m}p_j \equiv \mathcal{D}$. Rappelons (analyse harmonique) que pour tout $p,q\in X$, il existe une différentielle méromorphe η sur X ayant des pôles simples en p,q et telle que : $\text{Rés}_p\eta = 1$, $\text{Rés}_q\eta = -1$. On en déduit que si $p_1,\ldots,p_n\in X$ et $c_1,\ldots,c_n\in\mathbb{C}$ avec $\sum_{j=1}^{n}c_j = 0$, alors il existe une différentielle méromorphe η sur X ayant des pôles simples en p_j et telle que : $\text{Rés}_{pj}\eta = c_j$ et $\int_{a_j}\eta = 0$. En effet, soient $p_1,\ldots,p_n\in X$, $q\in X$,

$q \neq p_j$ $1 \leq j \leq n$ et $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ avec $\sum_{j=1}^n c_j = 0$. On peut trouver des différentielles méromorphes η_j sur X ayant des pôles simples en p_j, q et telles que : $\text{Rés}_{pj}\eta_j = 1$ et $\text{Rés}_q\eta_j = -1$ La forme différentielle $\lambda_1 = \sum_{j=1}^n c_j\eta_j$ a des pôles simples en p_j avec $\text{Rés}_{p_j}\lambda_1 = c_j$ mais n'a pas de pôles en q avec $\text{Rés}_q\lambda_1 = (-1)\left(\sum_{j=1}^n c_j\right) = 0$. Soit $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ une base de différentielles holomorphes sur X et considérons la forme différentielle $\lambda_2 = \lambda_1 + \sum_{k=1}^g \alpha_k\omega_k$ où $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ sont des constantes à déterminer. On ajoute à λ_1 une forme différentielle holomorphe, on ne change donc rien à ses pôles qui sont simples ni à ses résidus. Il reste à montrer que : $\int_{a_j} \lambda_2 = 0$ ou ce qui revient au même à déterminer les constantes $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ telles que : $\int_{a_j} \lambda_1 + \sum_{k=1}^g \alpha_k \int_{a_j} \omega_k = 0$. Ceci revient à résoudre le système de g équations à g inconnues suivant :

$$\begin{pmatrix} \int_{a_1}\omega_1 & \cdots & \int_{a_1}\omega_g \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{a_g}\omega_1 & \cdots & \int_{a_g}\omega_g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\int_{a_1}\lambda_1 \\ \vdots \\ -\int_{a_g}\lambda_1 \end{pmatrix}.$$

Rappelons que la matrice des périodes de X est définie par $\Omega = (E, F)$, où

$$E = \left(\int_{a_j} \omega_k\right)_{1\leq j,k\leq g}, \qquad F = \left(\int_{b_j} \omega_k\right)_{1\leq j,k\leq g}. \tag{4}$$

Notons que la matrice à gauche dans le système ci-dessus est la transposée de la matrice E intervenant dans la définition de la matrice des périodes. Or la matrice E est inversible, donc sa matrice transposée aussi et par conséquent le système ci-dessus admet une solution pour laquelle λ_2 est le η cherché. Revenons maintenant au diviseur $\mathcal{D} \equiv (f) = \sum_{j=1}^m q_j - \sum_{j=1}^m p_j$ et notons que l'on peut l'écrire sous la forme $\mathcal{D} = \sum_{j=1}^n c_jp_j$, $n < m$, $c_j \in \mathbb{Z}$; il suffit de regrouper les p_j et q_j qui sont les mêmes. La somme des coefficients n'a pas changé; elle valait $m \cdot 1 + m(-1) = 0$, donc $\sum_{j=1}^n c_j = 0$. Il existe une différentielle méromorphe η sur X ayant des pôles simples aux points p_j et telle que : $\text{Rés}_{pj}\eta = c_j$ et $\int_{a_j} = 0$. Soit $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ une base orthonormée de $\Omega^1(X)$ et posons $\varphi_j(p) = \int_{p_0}^p \omega_j$. On a

$$\int_{\partial X^*} \varphi_j\eta = \sum_{m=1}^g \left(\int_{a_m} \omega_j \int_{b_m} \eta - \int_{b_m} \omega_j \int_{a_m} \eta\right) = \int_{b_j} \eta = \eta(b_j). \tag{5}$$

D'un autre côté, on a $\int_{\partial X^*} \varphi_j\eta = 2\pi \mathrm{i} \sum_{k=1}^n \text{Rés}_{p_k}(\varphi_k\eta)$. En utilisant un raisonnement similaire à celui fait précédemment pour montrer que $(i) \Rightarrow (ii)$, on obtient $\int_{\partial X^*} \varphi_j\eta = 2\pi \mathrm{i} \sum_{k=1}^n c_k\varphi_j(p_k)$. En tenant compte des définitions de φ_j, p_k et c_k, on obtient

$$\int_{\partial X^*} \varphi_j\eta = 2\pi \mathrm{i} \sum_{k=1}^n c_k \int_{p_0}^p \omega_j = 2\pi \mathrm{i} \sum_{k=1}^m \int_{q_k}^{p_k} \omega_j = 2\pi \mathrm{i} \int_\gamma \omega_j.$$

En comparant cette dernière expression avec celle obtenue dans (5), on obtient $\eta(b_j) = \int_{b_j} \eta = 2\pi\mathrm{i} \int_\gamma \omega_j$. Comme γ est un chemin fermé, il peut s'écrire sous la forme $\gamma = \sum_{j=1}^g m_j a_j + \sum_{j=1}^g m_{g+j} b_j$. Dès lors,

$$\eta(b_k) = 2\pi\mathrm{i} \sum_{j=1}^g \left(m_j \int_{a_j} \omega_k + m_{g+j} \int_{b_j} \omega_k \right) = 2\pi\mathrm{i} \left(m_k + \sum_{j=1}^g m_{g+j} \omega_j(b_k) \right).$$

Posons $\theta \equiv \eta - 2\pi\mathrm{i} \sum_{j=1}^g m_{g+j}\omega_j(b_k)$. La forme différentielle $\sum_{j=1}^g m_{g+j}\omega_j(b_k)$ étant holomorphe, on en déduit que θ (comme η) est une différentielle méromorphe ayant des pôles simples en p_j et dont les résidus sont $\text{Rés}_{p_j}\theta = c_j \in \mathbb{Z}$. En outre, on a

$$\int_{b_k} \theta = \theta(b_k) = \eta(b_k) - 2\pi\mathrm{i} \sum_{j=1}^g m_{g+j}\omega_j(b_k) = 2\pi\mathrm{i} m_k,$$

$$\int_{a_k} \theta = \theta(a_k) = \eta(a_k) - 2\pi\mathrm{i} \sum_{j=1}^g m_{g+j}\omega_j(a_k) = 2\pi\mathrm{i} m_k.$$

Donc l'intégrale de θ le long de tout chemin fermé est définie à un multiple entier de $2\pi\mathrm{i}$ près. La fonction que l'on cherche à déterminer est $f(p) = \mathrm{e}^{\int_{p_0}^p \theta}$. Cette fonction est est méromorphe et $(f) = \sum_{j=1}^m q_j - \sum_{j=1}^m p_j$. En effet, autour de p_j, on a $\theta = \left(\frac{c_j}{t} + g(t)\right) \mathrm{d}t$, où $g(t)$ est une fonction holomorphe et

$$f(\varepsilon) = \mathrm{e}^{\int_t^\varepsilon \left(\frac{c_j}{t} + g(t)\right)\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^{c_j \log \varepsilon - c_j \log t + \int_t^\varepsilon g(t)\mathrm{d}t} = \varepsilon^{c_j} G(t),$$

où $G(t)$ est holomorphe. Selon le signe de c_j, p_j est un zéro ou un pôle de f d'ordre $|c_j|$. Finalement, on a $(f) = \sum_{j=1}^n c_j p_j = \sum_{j=1}^m q_j - \sum_{j=1}^m p_j$, ce qui achève la démonstration. □

On désigne par L_Ω ou tout simplement L le réseau dans $\mathbb{C}^g$ défini par le $\mathbb{Z}$-module $L = \mathbb{Z}^g \oplus \Omega\mathbb{Z}^g$ ou encore

$$L = \left\{ \sum_{j=1}^g \left(k_j \int_{a_j} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_g \end{pmatrix} + m_j \int_{b_j} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_g \end{pmatrix} \right) : k_j, m_j \in \mathbb{Z} \right\},$$

i.e., le sous-groupe de $\mathbb{C}^g$ engendré par les vecteurs colonnes de la matrice des périodes de Ω. L'espace quotient $\mathbb{C}^g/L$ est la variété jacobienne $\mathrm{Jac}(X)$ de X. Comme nous l'avons signalé dans les préliminaires, on peut aussi écrire $\mathrm{Jac}(X) = Pic^0(X)$. Pour vérifier que la variété jacobienne de X est bien un tore complexe de dimension g, on utilise la suite exponentielle exacte de faisceaux $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \to 0$, où $\mathcal{O}_X$ est le faisceau des fonctions holomorphes sur X, $\mathcal{O}_X^*$ est le faisceau des fonctions holomorphes ne s'annulant pas sur X, i est l'inclusion triviale et exp est l'application exponentielle $\exp f =$

$e^{2\pi\sqrt{-1}f}$. En tenant compte de la dualité, on montre que

$$\mathrm{Jac}(X) = H^1\left(X, \mathcal{O}_X\right)/H^1\left(X, \mathbb{Z}\right) \simeq H^0(X, \Omega^1_X)^*/H_1(X, \mathbb{Z}) \simeq X^g/\mathbb{Z}^{2g}.$$

Remarque 2. Soit $\mathcal{D} = \sum_{j=1}^m n_j q_j \in \mathrm{Div}(X)$, $p \in X$, fixé et soit $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ une base de différentielles holomorphes sur X. L'application d'Abel-Jacobi est définie par

$$\varphi : \mathrm{Div}\ (X) \longrightarrow \mathrm{Jac}(X), \quad \mathcal{D} \longmapsto \left(\sum_{j=1}^m n_j \int_p^{q_j} \omega_1, \ldots, \sum_{j=1}^m n_j \int_p^{q_j} \omega_g \right).$$

Dans le cas particulier où $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2 = \sum_{j=1}^m q_j - \sum_{j=1}^m p_j$, la condition (i) signifie que $\mathcal{D} \in \mathrm{Div}^0(X)$, i.e., $\mathcal{D}_1$ est équivalente à $\mathcal{D}_2$. La condition (ii) peut s'écrire sous une forme condensée, $\forall \omega \in \Omega^1(X)$, $\int_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{D}_2} \omega = \int_\gamma \omega$ ou encore sous la forme $\varphi(\mathcal{D}) \equiv \left(\sum_{j=1}^m \int_{p_j}^{q_j} \omega_1, \ldots, \sum_{j=1}^m \int_{p_j}^{q_j} \omega_g \right) \equiv 0 \bmod. L$, avec φ l'application définie par $\varphi : \mathrm{Div}^\circ(X) \longrightarrow \mathrm{Jac}(X)$.

Théorème 3. *Soit $\mathcal{D}$ un diviseur positif sur une surface de Riemann compacte X de genre $g > 0$. Alors* $\dim \mathcal{I}(-\mathcal{D}) \geq g - \deg \mathcal{D}$. *En outre, pour tout $p \in X$, on a* $\dim \mathcal{I}(-p) \leq g - 1$. *Autrement dit, il existe une différentielle ω holomorphe sue X telle que : $\omega(p) \neq 0$.*

Démonstration. Rappelons que les seules fonctions holomorphes sur une surface de Riemann compacte X sont les constantes. Donc $\mathcal{L}(0) \simeq \mathbb{C}$ et $\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) \geq 1$. D'après (2), on a $\dim \mathcal{I}(-\mathcal{D}) \geq g - \deg \mathcal{D}$. Procédons par l'absurde, i.e., supposons que : $\forall \omega \in \Omega^1(X)$, $\omega(p) = 0$. Donc $\dim \mathcal{I}(-p) = g$ et en vertu de la formule (2), on a $\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) = 2$. D'où $\mathcal{L}(p) = \{1, f\}$ où f est une fonction méromorphe non constante (ayant au plus un pôle simple en p) telle que : $(f) \geq -p$. La fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{CP}^1$ n'a pas de points de points de branchements et la surface X peut être vue comme étant un revêtement non ramifié de $\mathbb{CP}^1$, deg $f = 1$, ce qui implique que $X \simeq \mathbb{CP}^1$. Ceci est absurde puisque $g(X) > 0$ par hypothèse et $g(\mathbb{CP}^1) = 0$. La démonstration est donc complète. □

On note $\mathrm{Sym}^d X$ l'ensemble de tous les diviseurs positifs $\mathcal{D} = \sum_{j=1}^d p_j$, de degré d sur X. On dit que $\mathrm{Sym}^d X$ est le $d^{\text{ième}}$ produit symétrique de X. On montre aisément que $\mathrm{Sym}^d X$ peut-être muni d'une structure de variété complexe. Soit X^d le produit direct de X; c'est une variété complexe. Considérons le groupe symétrique Σ_d des permutations de $\{1, \ldots, d\}$. Dès lors, pour tout $\sigma \in \Sigma_d$, on définit l'application $\sigma : X^d \longrightarrow X^d$, en posant $\sigma(p_1, \ldots, p_d) = (p_{\sigma_1}, \ldots, p_{\sigma_d})$ où $\sigma_1, \ldots, \sigma_d$ désignent les fonctions symétriques élémentaires. Cette application est biholomorphe, d'où $\Sigma_d \subset \mathrm{Aut}\ (X^d)$, i.e., Σ_d peut-être vu comme étant un sous groupe du groupe des automorphismes de X^d. Notons que $\mathrm{Sym}^d X$ hérite de X^d d'une structure d'espace topologique. Dès lors, l'espace quotient $\mathrm{Sym}^d X = X^d/\Sigma_d$ est un espace séparé compact.

La projection $\pi : X^d \longrightarrow \mathrm{Sym}^d X$ munit $\mathrm{Sym}^d X$ d'une structure de variété complexe. En effet, soit $p_j \in X$, $\mathcal{D} = \sum p_j \in \mathrm{Sym}^d X$, $p_j \neq p_k$. Autour de chaque p_j, on choisit un système de coordonnées locales (U_j, z_j) dans X. On suppose que pour $p_j \neq p_k$, on a $U_j \cap U_k \neq 0$ et que pour $p_j = p_k$, on a $z_j = z_k$ dans $U_j = U_k$. Notons que l'application $\sum q_j \longmapsto (\sigma_1(z_j(q_j)), \ldots, \sigma_d(z_j(q_j)))$, détermine une carte locale sur $\pi(U_1 \times \cdots \times U_d) \subset \mathrm{Sym}^d X$. En dehors des points de branchements de la surface, l'application π est un revêtemnt et on peut prendre $(z_1(p_1)), \ldots, z_d(p_d))$ comme coordonnées autour de $\mathcal{D} \in \mathrm{Sym}^d X$. Autour d'un point $d{\cdot}p$, l'ensemble $(z_1 + \cdots + z_d, \ldots, z_1 \ldots z_d)$ forme un système de coordonnées locales.

THÉORÈME 4. *Soit* $\varphi_g : \mathrm{Sym}^g X \longrightarrow \mathrm{Jac}(X)$, $\varphi_g(\mathcal{D}) = \left(\int_0^{\mathcal{D}} \omega_1, \ldots, \int_0^{\mathcal{D}} \omega_g\right)$, *l'application d'Abel-Jacobi restreinte á l'espace* $\mathrm{Sym}^g X$, *où* $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ *est une base normalisée de* $\Omega^1(X)$. *Alors: a) L'application* φ_g *est bien définie. b) L'application* φ_g *est injective. c) L'application* φ_g *est surjective. Si* $\mathcal{D}_1$ *est un diviseur positif de degré* g*, alors, pour tout* $(s_1, \ldots, s_g) \in \mathbb{C}^g$*, il existe un diviseur* $\mathcal{D}_2$ *positif de degré* g *tel que :* $\int_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{D}_2} \omega = s_k$. *L'application* φ : $\mathrm{Div}^0(X) \longrightarrow \mathrm{Jac}(X)$, *est surjective.* (Problème d'inversion de Jacobi).

Démonstration. a) Montrons que l'application φ_g est bien définie. Autrement dit, montrons que deux éléments équivalents dans $\mathrm{Sym}^g X$, sont envoyés sur deux éléments équivalents dans $\mathbb{C}^g/L$. Soient donc $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux diviseurs équivalents dans $\mathrm{Sym}^g X$ et γ un chemin fermé sur X. D'après le Théorème 1 et la Remarque 2, on a $\left(\int_0^{\mathcal{D}_2} \omega_1, \ldots, \int_0^{\mathcal{D}_2} \omega_g\right) - \left(\int_0^{\mathcal{D}_1} \omega_1, \ldots, \int_0^{\mathcal{D}_1} \omega_g\right) = \left(\int_\gamma \omega_1, \ldots, \int_\gamma \omega_g\right)$, et il suffit de montrer que $\int_\gamma \omega_j \in L$, $1 \leq j \leq g$. Le chemin γ étant fermé, on peut l'écrire sous la forme suivante : $\gamma = \sum_{k=1}^g (\alpha_k a_k + \beta_k b_k)$, $(\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{Z})$ où $(a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g)$ est une base de cycles dans le groupe d'homologie $H_1(X, \mathbb{Z})$. Dès lors $\int_\gamma \omega_j = \sum_{k=1}^g \left(\alpha_k \int_{a_k} \omega_j + \beta_k \int_{b_k} \omega_j\right)$ où $1 \leq j \leq g$. Comme la matrice Ω des périodes de X peut s'écrire sous la forme $\Omega = (E, F) = (I, Z)$ où $Z \equiv E^{-1}F = (\omega_k(b_j))_{1 \leq j,k \leq 1}$, $\int_\gamma \omega_j = \alpha_j + \sum_{k=1}^g \beta_k \int_{b_k} \omega_j$, $1 \leq j \leq g$, ce qui montre que évidemment que $\int_\gamma \omega_j \in L$.

b) Montrons que l'application φ_g est injective. Autrement dit, montrons que si deux diviseurs $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont envoyés sur des points équivalents, alors $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$. Soit $\left(\int_0^{\mathcal{D}_1} \omega_1, \ldots, \int_0^{\mathcal{D}_1} \omega_g\right)$ l'image de $\mathcal{D}_1$ et $\left(\int_0^{\mathcal{D}_2} \omega_1, \ldots, \int_0^{\mathcal{D}_2} \omega_g\right)$ celui de $\mathcal{D}_2$. Ces images étant équivalentes, alors $\left(\int_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{D}_2} \omega_1, \ldots, \int_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{D}_2} \omega_g\right) \in L$ et

$$\left(\int_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{D}_2} \omega_j\right) = \alpha_j + \sum_{k=1}^g \beta_k c_{kj} = \sum_{k=1}^g \alpha_k \int_{a_k} \omega_j + \sum_{k=1}^g \beta_k \int_{b_k} \omega_j = \int_\gamma \omega_j,$$

où γ ne dépend pas de j. Par conséquent, pour tout ω, on a $\left(\int_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{D}_2} \omega_j\right) = \int_\gamma \omega$ et d'après le Théorème 1, $\mathcal{D}_1 \sim \mathcal{D}_2$.

c) La preuve va se faire en plusieurs étapes.

Étape 1: Soit $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ une base normalisée de $\Omega^1(X)$ et choisissons un diviseur positif $\mathcal{D}$ sur X de degré g tel que : $(\omega_j(p_j)) \neq 0$, où $p_j \in X$ et $1 \leq j \leq g$. Nous verrons ci-dessous que ce choix est toujours possible et on dira que "$\mathcal{D}$ est général". On veut montrer qu'il existe un diviseur positif $\mathcal{D}_2$ de degré g tel que : $\int_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{D}_2} \omega_k = s_k$. Ceci est équivalent à montrer l'existence du diviseur $\mathcal{D}$ ci-dessus tel que : $\int_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}_2} \omega_k = t_k$, $\forall (t_1, \ldots, t_g) \in \mathbb{C}^g$. En effet, on a $s_k = \int_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{D}_2} \omega_k = \int_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{D}} \omega_k + \int_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}_2} \omega_k$ d'où $\int_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}_2} \omega_k = s_k - \int_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{D}} \omega_k = t_k$.

Étape 2: Montrons que les conditions suivantes : (i) $\mathcal{D}$ est général, (ii) $\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) = 1$ et (iii) $\dim \mathcal{I}(-\mathcal{D}) = 0$ sont équivalentes. On a, $(ii) \Longleftrightarrow (iii)$. En effet, comme $\deg \mathcal{D} = g$ alors d'après la formule (2), $\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) = 1$ si et seulement si $\dim \mathcal{I}(-\mathcal{D}) = 0$. Montrons maintenant que $(i) \Longleftrightarrow (iii)$ ou ce qui revient au même non $(i) \Leftrightarrow$ non (iii). En effet, non (iii) signifie que $\dim \mathcal{I}(-\mathcal{D}) \neq 0$, i.e., il existe une forme différentielle ω holomorphe telle que : $(\omega) \geq \mathcal{D}$. Autrement dit, pour tous $p_1, \ldots, p_g \in \mathcal{D}$, on peut trouver des coefficients $c_1, \ldots, c_g$ tels que : $\omega = \sum_{k=1}^{g} c_k \omega_k(p_j)$, $1 \leq j \leq g$ où $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ est une base de $\Omega^1(X)$. Les coefficients $c_1, \ldots, c_g$ existent si et seulement si ce système homogène de g équations à g inconnues possède une solution non triviale. Autrement dit si et seulement si $\det (\omega_j(p_k))_{1 \leq j,k \leq g} = 0$, ou encore si et seulement si la condition (i) n'est pas satisfaite.

Étape 3: Pour montrer que le diviseur $\mathcal{D}$ est général, il suffit donc de prouver que l'une des conditions (ii) ou (iii) mentionnée dans l'étape 2, est satisfaite. D'après le Théorème 3, on a $\dim \mathcal{I}(-p_1) = g - 1$, ce qui montre qu'il existe $p_2 \in X$ tel que : $\mathcal{I}(-p_1 - p_2) \subset \mathcal{I}(-p_1)$ et $\dim \mathcal{I}(-p_1 - p_2) = g - 2$. De même, il existe $p_3 \in X$ tel que : $\mathcal{I}(-p_1 - p_2 - p_3) \subset \mathcal{I}(-p_1 - p_2)$ et $\dim \mathcal{I}(-p_1 - p_2 - p_3) = g - 3$. Et ainsi de suite, on peut trouver $p_g \in X$ tel que : $\mathcal{I}(-p_1 - p_2 - \cdots - p_g) \subset \mathcal{I}(-p_1 - p_2 - \cdots - p_{g-1})$ et $\dim \mathcal{I}(-p_1 - p_2 - \cdots - p_g) = 0$, i.e., $\dim \mathcal{I}(-\mathcal{D}) = 0$ et nous avons montré dans l'étape 2 ci-dessus que ceci est équivalent à $\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) = 1$ et aussi è $\mathcal{D}$ est général. Étape 4 : Il reste à prouver qu'il existe $\mathcal{D}_2$ tel que : $\int_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}_2} \omega_k = t_k$, $1 \leq k \leq g$. Posons $\mathcal{D} = \sum_{j=1}^{g} p_{0j}$, $\mathcal{D}_2 = \sum_{j=1}^{g} p_j$ et considérons la fonction

(6)

$$f(p) \equiv (f_1(p), \ldots, f_g(p)) = \left(\sum_{j=1}^{g} \int_{p_{0j}}^{p_j} \omega_1, \ldots, \sum_{j=1}^{g} \int_{p_{0j}}^{p_j} \omega_g \right) = \left(\frac{t_1}{n}, \ldots, \frac{t_g}{n} \right),$$

où $p = (p_1, \ldots, p_g)$. Notons que nous avons remplacé (pour être sur de travailler dans un voisinage assez petit) t_k par $\frac{t_k}{n}$ où n est un entier suffisamment grand. D'après le théorème des fonctions implicites, on peut déterminer p explicitement car, d'après la définition du diviseur $\mathcal{D}$, la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial f_j}{\partial p_k} \right)_{1 \leq j,k \leq g} = (\omega_j(p_k))_{1 \leq j,k \leq g}$, est inversible. D'après (6), on a $f_k(p) = \frac{t_k}{n}$, $1 \leq k \leq g$ et $f_k(p) = \sum_{j=1}^{g} \int_{p_{0j}}^{p_j} \omega_k = \int_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}_2} \omega_k$, $1 \leq k \leq g$ d'où

$n\int_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}_2}\omega_k = t_k \equiv \int_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}_3}\omega_k$. On doit donc trouver un diviseur $\mathcal{D}_3$ tel que : $n\int_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}_2}\omega_k = \int_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}_3}\omega_k$. Celui-ci existe d'après le théorème d'addition [10] (qui dit que si $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux diviseurs positifs de degré n, $\mathcal{E}_1$ un diviseur positif de degré g et $\omega \in \Omega^1(X)$, alors il existe un diviseur $\mathcal{E}_2$ positif de degré g tel que: $\int_{\mathcal{D}_1}^{\mathcal{D}_2}\omega = \int_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}_2}\omega$). Considérons enfin les diviseurs de degré 0 de la forme $\mathcal{D} - pg$ où $\mathcal{D} \in \operatorname{Sym}^g X$. Ces diviseurs forment un ensemble que l'on note $\operatorname{Sym}^g Y \equiv \operatorname{Sym}^g X - pg$. L'application φ_g étant surjective sur l'espace $\operatorname{Sym}^g X$, elle est donc aussi surjective sur $\operatorname{Sym}^g Y$. Par conséquent, φ est surjective sur $\operatorname{Div}^0(X)$, ce qui démontre le théorème. $\square$

Les résultats étudiés précédemment jouent un rôle crucial dans l'étude des systèmes intégrables (voir par exemple [14, 15, 16, 17, 19, 20]).

3. SUR L'ESPACE DES MODULES DES SURFACES DE RIEMANN ET LE PROBLÈME DE SCHOTTKY

Soit $\mathcal{M}_g$ l'espace des modules des surfaces de Riemann X de genre g, i.e., l'ensemble des classes d'isomorphismes de surfaces de Riemann compactes de genre g. Nous allons voir que la sphère est la seule surface de Riemann de genre 0. Par contre pour $g \geq 1$, l'espace $\mathcal{M}_g$ est indénombrable et sa dimension est égale à $3g-3$ pour $g \geq 2$. Autrement dit, ces surfaces dépendent de $3g-3$ paramètres complexes pour $g \geq 2$ et d'un seul paramètre pour $g = 1$.

THÉORÈME 5. *Soit X une surface de Riemann de genre* 0. *Alors X est isomorphe à la sphère de Riemann : $X \simeq \mathbb{CP}^1$.*

Démonstration. En effet, soit $p \in X$ un point fixé et posons $\mathcal{D} = p \in \operatorname{Div}(X)$. Le degré du diviseur canonique K de X est $\deg K = 2g-2 = -2$, d'où $\deg(K-\mathcal{D}) = -3$. D'après la formule (1), on a

$$\dim \mathcal{L}(\mathcal{D}) = \dim \mathcal{L}(K-\mathcal{D}) + \deg(\mathcal{D}) - g + 1 = 0 + 1 - 0 + 1 = 2.$$

Dès lors, $\mathcal{L}(\mathcal{D}) = \{1, f\}$ où f est une fonction non constante méromorphe ayant un pôle simple au point p. Donc l'application holomorphe associée $f : X \longrightarrow \mathbb{CP}^1$ est de degré égal à $\deg f = \sharp\{f^{-1}(\infty)\} = \sharp\{p\} = 1$. Par conséquent $X \simeq \mathbb{CP}^1$ d'où le résultat. $\square$

THÉORÈME 6. *Soit $\wp$ la fonction de Weierstrass*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{(z-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right),$$

où $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$, est le réseau engendré par deux nombres complexes ω_1 et ω_2 différents de 0 *tels que:* $\operatorname{Im}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) > 0$. *Alors, on a un isomorphisme*

$$\mathbb{C}/\Lambda \longrightarrow \mathbb{CP}^2, z \longmapsto [1, \wp(z), \wp'(z)], z \neq 0, \quad 0 \longmapsto [0,0,1],$$

entre le tore complexe $\mathbb{C}/\Lambda$ et la courbe elliptique dont l'équation affine est $y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3$ avec $g_2 = 60\sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}}\frac{1}{\omega^4}$, $g_3 = 140\sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}}\frac{1}{\omega^6}$.

Démonstration. Il suffit de poser $x = \wp(z)$, $y = \wp'(z)$ et d'utiliser l'équation différentielle [18]: $(\wp'(z))^2 = 4(\wp(z))^3 - g_2\wp(z) - g_3$. $\square$

Théorème 7. *Soient X une surface de Riemann de genre 1 et* $\mathrm{Jac}(X)$ *sa variété jacobienne. Alors, on a un isomorphisme biholomorphe : $X \simeq \mathrm{Jac}(X)$. Si $(1 \quad z)$ est la matrice des périodes normalisée, alors $X \simeq \mathbb{C}/\Lambda$ où Λ est le réseau engendré par 1 et z.*

Démonstration. En effet, on considère l'application (Théorème 4) définie par $\varphi_g : \mathrm{Sym}^g X \longrightarrow \mathrm{Jac}(X)$, restreinte à l'espace $\mathrm{Sym}^g X$. Ici , on a $g = 1$ et donc $\varphi_1 = \varphi$ et $\mathrm{Sym}^1 X = \mathrm{Sym}\ X$. L'application $\varphi : X \longrightarrow \mathrm{Jac}(X)$ est surjective (ceci résulte du Théorème 4 ou encore du fait que X est compacte). Montrons, de manière particulière, que cette application est injective. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\varphi(p) = \varphi(q)$, $p \neq q$ alors $\varphi(p - q) = 0$. D'après le Théorème 1, il existe une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{CP}^1$ telle que : $(f) = q - p$. Dès lors, il existe une fonction méromorphe sur X ayant un pôle simple, ce qui implique que $X \simeq \mathbb{CP}^1$ et ceci est une contradiction car $g(X) = 1$ et $g(\mathbb{CP}^1) = 0$. Donc la variété jacobienne d'une courbe elliptique est la courbe elle-même. Soit maintenant K le diviseur canonique sur X. Rappelons que c'est le diviseur (ω) d'une 1-forme méromorphe $\omega \neq 0$ sur X et que son degré vérifie la formule $\deg K = 2g - 2$. La forme dz sur $\mathbb{C}$ induit une forme de degré 1 sur le tore $\mathbb{C}/\Lambda$. Cette dernière n'a ni zéro ni pôle, donc $\deg K = 0$ et par conséquent $g = 1$. Ceci achève la démonstration. $\square$

Considérons l'invariant $j = 1728 g_2^3/\Delta$ où $\Delta \equiv g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$ est le discriminant de la courbe elliptique X. La condition $\Delta \neq 0$ est équivalente à la non-singularité de X. En particulier $j(z) = j(\mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}z)$ est le fonction modulaire. L'invariant j permet de classifier les courbes elliptiques sur $\mathbb{C}$. On montre que deux courbes elliptiques sont isomorphes si et seulement si elles ont le même invariant j. En outre, pour tout $j \in \mathbb{C}$, il existe une courbe elliptique d'invariant j. On dit que deux réseaux $\Lambda_1 = \mathbb{Z}_1 \oplus \mathbb{Z}z_1$ et $\Lambda_2 = \mathbb{Z}_1 \oplus \mathbb{Z}z_2$ sont équivalents s'il existe un nombre complexe λ tel que : $\lambda\Lambda_1 = \Lambda_2$. Soit $SL(2, \mathbb{Z})$ le groupe modulaire, i.e., l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients entiers relatifs et de déterminant 1. Les deux réseaux Λ_1 et Λ_2 sont équivalents si et seulement s'il existe $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ tel que : $z_2 = \frac{az_1+b}{cz_1+d}$. Par ailleurs, on montre que les deux réseaux Λ_1 et Λ_2 sont équivalents si et seulement si les deux tores $\mathbb{C}/\Lambda_1$ et $\mathbb{C}/\Lambda_2$ sont isomorphes. De même, on montre que $\mathbb{C}/\Lambda_1 \simeq \mathbb{C}/\Lambda_2$ si et seulement si $j(\mathbb{C}/\Lambda_1) = j(\mathbb{C}/\Lambda_2)$ et enfin $j(z_1) = z_2$ si et seulement s'il existe $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ tel que : $z_2 = \frac{az_1+b}{cz_1+d}$.

Passons maintenant au cas $g \geq 2$. Soit $(\omega_1, \ldots, \omega_g)$ une base de différentielles holomorphes sur X et soit $(a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g)$ une base symplectique du groupe d'homologie $H_1(X, \mathbb{Z})$. Soient $\int_{a_k} \omega_l$, $\int_{b_k} \omega_l$, les périodes de ω_l suivant les cycles a_k, b_k et $\Omega = (E \quad F)$ la matrice des périodes où E et F sont les matrices définies dans (4). On montre qu'il existe une nouvelle base $(\eta_1, \ldots, \eta_g)$ avec $\eta_k = \sum_{l=1}^{g} c_{kl}\omega_l$, $1 \leq k \leq g$ et telle que : $\int_{a_k} \eta_l = \delta_{kl}$, $1 \leq k, l \leq g$, i.e., de telle sorte que la matrice des périodes associée à cette base soit de la forme $(I \quad Z)$ où I est la matrice unité et $Z = E^{-1}F$ est une matrice symétrique à partie imaginaire définie positive. Considérons le demi-espace de Siegel : $\mathcal{H}_g = \{Z \in M_g(\mathbb{C}) : Z = Z^\top, \mathrm{Im} Z > 0\}$. C'est l'ensemble des matrices complexes d'ordre g symétriques et dont la partie imaginaire est positive. Dans le cas $g = 1$, on retrouve le demi-plan de Poincaré. Notons que $\mathcal{H}_g$ est un ouvert de $\mathbb{C}^{\frac{1}{2}g(g+1)}$. Considérons l'espace quotient $\mathcal{H}_g/Sp(2g, \mathbb{Z})$ où $Sp(2g, \mathbb{Z})$ désigne le groupe symplectique entier, i.e., le groupe des matrices $A \in M_{2g}(\mathbb{Z})$ telles que : $A^\top Q A = Q$ avec $Q = \begin{pmatrix} O & I \\ -I & O \end{pmatrix}$ est une matrice d'ordre $2g$ et I la matrice unité d'ordre g. L'application des périodes $P : \mathcal{M}_g \longrightarrow \mathcal{H}_g/Sp(2g, \mathbb{Z})$, qui associe à chaque courbe sa jacobienne est bien définie, c'est un morphisme injective et d'après un théorème de Torelli cette application est un plongement. Comme nous l'avons déjà signalé, les surfaces de Riemann X sont classifiées par $3g - 3$ paramètres pour $g \geq 2$. On a $\dim \mathcal{M}_g = 3g - 3$ et $\dim \mathcal{H}_g/Sp(2g, \mathbb{Z}) = \dim \mathcal{H}_g = \frac{1}{2}g(g+1)$. Dès lors pour $g = 2, 3$, on a $\dim \mathcal{M}_g = \dim \mathcal{H}_g/Sp(2g, \mathbb{Z})$ mais pour $g \geq 4$, on a $\dim \mathcal{M}_g < \dim \mathcal{H}_g/Sp(2g, \mathbb{Z})$. Cela signifie que pour $g \geq 4$, il existe des relations non triviales satisfaites par les matrices des périodes de surfaces de Riemann. Le problème de Schottky consiste à expliciter ces relations. Grosso modo, il s'agit de trouver des critères pour qu'une matrice des périodes appartenant à l'ensemble $\mathcal{H}_g$ soit la matrice des périodes d'une surface de Riemann. L'espace quotient $\mathcal{H}_g/Sp(2g, \mathbb{Z})$ est un espace analytique complexe de dimension $\frac{1}{2}g(g+1)$ et il peut être vu comme étant l'espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g. Autrement dit, c'est l'ensemble des classes d'isomorphisme de variétés abéliennes principalement polarisées de dimension g. Cet espace peut être compactifié de plusieurs manières : compactification de Satake, compactifications toroidales, compactification modulaire,... voir [6] pour un exposé d'ensemble. A une matrice de $\mathcal{H}_g$, on peut lui associer via la théorie des fonctions thêta une variété abélienne principalement polarisée et l'espace analytique quotient $\mathcal{H}_g/Sp(2g, \mathbb{Z})$ paramètre de manière naturelle l'ensemble des classes d'isomorphisme de variétés principalement polarisées de dimension g. Dans le cas où la matrice de $\mathcal{H}_g$ est la matrice des périodes de la surface de Riemann X, alors la variété abélienne principalement polarisée n'est autre que la variété jacobienne $\mathrm{Jac}(X)$ de X. Dans l'espace des modules $\mathcal{H}_g/Sp(2g, \mathbb{Z})$, les jacobiennes constituent une sous-variété $\mathcal{J}_g$ de dimension $3g-3$. Cette sous-variété coincide avec $\mathcal{H}_g/Sp(2g, \mathbb{Z})$ pour $g \leq 3$ mais l'inclusion est stricte pour $g \geq 4$. Géométriquement, le problème de Schottky consiste à caractériser les jacobiennes parmi toutes les variétés abéliennes principalement polarisées ou encore à décrire explicitement la sous-variété $\mathcal{J}_g$ ou plutôt son adhérence $\overline{\mathcal{J}_g}$ dans $\mathcal{H}_g/Sp(2g,\mathbb{Z})$. Une autre approche (analytique) pour étudier le problème de Schottky consiste à chercher à écrire les équations de la sous-variété $\mathcal{J}_g$ dans $\mathcal{H}_g/Sp(2g,\mathbb{Z})$ à l'aide de formes modulaires sur $\mathcal{H}_g$, par exemple les fonctions thêta avec caratéristiques sont des fonctions modulaires de poids $k/2$. Pour des résultats obtenus via cette approche et l'utilisation des variétés de Prym, voir [12, 13, 22, 23, 21, 25, 9]. L'ensemble des équations obtenues par ce procédé définit une sous-variété de $\mathcal{H}_g/Sp(2g,\mathbb{Z})$, qui contient $\mathcal{J}_g$. Le problème ici est du au fait qu'on ne sait pas écrire explicitement les équations de cette sous-variété. Une autre approche (géométrique) pour étudier le problème de Schottky consiste à chercher des équations ou des caractéristiques géométriques de la sous-variété $\mathcal{J}_g$ de $\mathcal{H}_g/Sp(2g,\mathbb{Z})$ formée par les jacobiennes afin d'obtenir des équations plus ou moins explicites. On pourra consulter [1, 3, 8, 7] pour les résultats obtenus à l'aide de létude des singularités du diviseur Θ ainsi que [5, 11, 26, 27] à l'aide de la méthode des trisécantes (voir [4] pour une vue d'ensemble). Signalons qu'il existe une connection [24, 2, 4] intéressante entre l'étude du problème de Schottky et l'étude des systèmes intégrables notamment la hiérarchie KP (Kadomtsev-Petviashvili). Signalons enfin que les équations de la théorie des solitons jouent un rôle important dans la caractérisation des variétés jacobiennes. On montre [24, 2], que les trois conditions suivantes sont équivalentes.

(i) Il existe des champs de vecteurs v_1, v_2, v_3 sur $\mathbb{C}^g$ et une forme quadratique $q(t) = \sum_{k,l=1}^{3} q_{kl}(t)t_k t_l$ tels que : pour tout $z \in \mathbb{C}^g$, si θ est la fonction thêta, alors la fonction $\tau(t) = \mathrm{e}^{q(t)}\theta\left(\sum_{k=1}^{3} t_k v_k + z\right)$ satisfait à l'équation non-linéaire de Kadomtsev-Petviashvili : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t}\left(4\frac{\partial u}{\partial t} - 12u\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right) = 0$. Le diviseur thêta ne contient pas une sous-variété abélienne de T (une variété abélienne principalement polarisée) pour laquelle le vecteur v_1 est tangent.

(ii) T est isomorphe à la variété jacobienne d'une courbe complète non-singulière réduite de genre g.

(iii) Il existe une matrice $\mathcal{V} = (v_1, v_2, \dots)$ d'ordre $g \times \infty$, $v_k \in \mathbb{C}^g$, de rang g et une forme quadratique $Q(t) = \sum_{k,l=1}^{\infty} q_{kl}(t)t_k t_l$ telles que: pour tout $z \in \mathbb{C}^g$, $\widetilde{\tau}(t) = \mathrm{e}^{Q(t)}\theta(\mathcal{V}t + z)$ est une fonction τ pour la hiérarchie KP.

REFERENCES

[1] Andreotti, A. and Mayer, A., *On period relations for abelian integrals on algebraic curves*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **21** (1967), 189–238.

[2] Arbarello, E. and De Concini, C., *Another proof of a conjecture of S.P. Novikov on periods of abelian integrals on Riemann surfaces*, Duke Math. J., **54** (1998), 163–178.

[3] Beauville, A., *Prym varieties and the Schottky problem*, Invent. Math., **41** (1977), 149–196.

[4] Beauville, A., *Le problème de Schottky et la conjecture de Novikov*, Séminaire Bourbaki, Exposé No. 675, Astérisque, **152–153** (1988), 101–112.

[5] Beauville, A. and Debarre, O., *Une relation entre deux approches du problème de Schottky*, Invent. Math., **86** (1986), 195–207.

[6] Brion, M., *Compactification de l'espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées*, Séminaire Bourbaki, Exposé No. 952, **58** (2005-2006).
[7] Debarre, O., *Sur les variétés dont le diviseur théta est singulier en codimension* 3, Duke Math. J., **56** (1988), 221-273.
[8] Donagi, R., *The tetragonal construction*, Bull. Amer. Math. Soc., **4** (1981), 181–185.
[9] Donagi, R., *The Schottky problem*, Lecture Notes in Math., Springer, **1337**, 1988, pp. 84–137.
[10] Griffiths, P.A. and Harris, J., *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, 1978.
[11] Gunning, R., *Some curves in abelian varieties*, Invent. Math., **66** (1982), 377–389.
[12] Igusa, J., *Theta Functions*, Springer-Verlag, 1972.
[13] Igusa, J., *On the irreductibility of Schottky's divisor*, J. Fac. Sci. Tokyo, **28** (1981), 531–545.
[14] Lesfari, A., *Abelian surfaces and Kowalewski's top*, Ann. Scient. École Norm. Sup. Paris, 4^e série, **21** (1988), 193–223.
[15] Lesfari, A., *Le système différentiel de Hénon-Heiles et les variétés Prym*, Pacific J. Math., **212** (2003), 125–132.
[16] Lesfari, A., *Abelian varieties, surfaces of general type and integrable systems*, Beiträge Algebra Geom., **48** (2007), 95–114.
[17] Lesfari, A., *Prym varieties and algebraic completely integrable systems*, J. Geom. Phys., **58** (2008), 1063–1079.
[18] Lesfari, A., *Fonctions et Intégrales elliptiques*, Surv. Math. Appl., **3** (2008), 27–65.
[19] Lesfari, A., *Integrable systems and complex geometry*, Lobachevskii J. Math., **30** (2009), 292–326.
[20] Lesfari, A., *Algebraic integrability: the Adler-van Moerbeke approach*, Regul. Chaotic Dyn., **16** (2011), 187–209.
[21] Mumford, D., *Prym varieties I.* In *Contributions to Analysis* (L.V. Ahlfors, I. Kra, B. Maskit, L. Niremberg, Eds.), Academic Press, New York, 1974, pp. 325–350.
[22] Schottky, F., *Zur theorie der Abelschen Funktionen von vier Variabeln*, J. Reine Angew. Math., **102** (1888), 304–352.
[23] Schottky, F. and Jung, H., *Neue Satze uber Symmetralfunktinen und die Abel'schen Funktionen der Riemann'schen Theorie*, S.-Ber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, **1** (1909), 282–297.
[24] Shiota, T., *Characterization of jacobian varieties in terms of soliton equations*, Invent. Math., **83** (1986), 333–382.
[25] van Geemen, P. and van Der Geer, G., *Kummer varieties and moduli spaces of abelian varieties*, Amer. J. Math, **108** (1986), 615–642.
[26] Welters, G., *A characterization of non-hyperelliptic Jacobi varieties*, Invent. Math., **71** (1983), 437–440.
[27] Welters, G., *A criterion for Jacobi varieties*, Ann. of Math., **120** (1984), 497–504.

Received December 14, 2010
Accepted November 19, 2011

Université "Chouaïb Doukkali"
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
B.P. 20, El Jadida, Maroc
E-mail: lesfariahmed@yahoo.fr