L'INTÉGRALE DE GAUSS ET L'ANALYSE DES NŒUDS TRIDIMENSIONNELS

(Rev. Roum. Math. Pures et Appl., 4, 1959 p. 5–20)

On doit à Gauss la découverte du premier invariant d'isotopie [1]) relatif à un enlacement de deux courbes fermées de l'espace euclidien tridimensionnel. Les courbes fermées rectifiables C_1 et C_2 étant sans point commun, cet invariant est donné par la double intégrale curviligne

$$I = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{C_1}\int\limits_{C_2}\frac{1}{r_{12}^3}\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & dx_1 & dx_2 \\ y_1 - y_2 & dy_1 & dy_2 \\ z_1 - z_2 & dz_1 & dz_2 \end{vmatrix} \quad r_{12}^2 = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2,$$

les points $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ parcourant les courbes C_1 et C_2 respectivement. En désignant par $\omega(M_2)$ une détermination de l'angle solide sous lequel on voit le contour C_1 en se plaçant en M_2, on trouve

$$I = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{C_2} d\omega(M_2).$$

I représente la variation, divisée par 4π, de $\omega(M_2)$ lorsque M_2 parcourt C_2, donc I est un nombre entier. C'est un invariant pour toute déformation continue des courbes C_1 et C_2 pendant laquelle C_1 et C_2 ne se traversent jamais l'une l'autre, et cette invariance résulte du fait que I, regardée comme fonction des lignes C_1 et C_2, est continue par rapport à C_1 et C_2 tant que r_{12} reste supérieur à un nombre positif fixe, et du fait que I ne prend que des valeurs entières.

A notre connaissance, aucun invariant de cette nature n'a été signalé pour une courbe fermée C unique et, afin d'en obtenir un, nous avons songé à faire coïncider C_1 et C_2 dans l'invariant I de Gauss. Nous montrerons ici que l'on obtient ainsi un invariant d'isotopie attaché à une courbe fermée C de l'espace, et que cet invariant n'est pas banal, c'est-à-dire qu'il n'est pas nul pour toute courbe fermée C. Examinons d'abord la double intégrale curviligne

$$(1) \qquad J = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{C}\int\limits_{C}\frac{1}{r_{12}^3}\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & x_1' & x_2' \\ y_1 - y_2 & y_1' & y_2' \\ z_1 - z_2 & z_1' & z_2' \end{vmatrix} dt_1 dt_1$$

[1]) Deux courbes fermés de l'espace, C et C_1, sans points multiples, sont *isotopes* s'il existe une déformation continue de C en C_1, pendant laquelle la courbe déformée n'acquiert jamais de point multiple. L'isotopie est une relation d'équivalence qui permet de partager l'ensemble des courbes sans points multiples en *classes d'isotopie* qu'il s'agit de caractériser par une suite d'*invariants d'isotopie*. Un problème analogue se pose pour les enlacements de deux ou plusieurs courbes fermées sans points communs deux à deux. On appelle *noeud* toute courbe fermée sans points multiples.

prise sur la courbe fermée $C : x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ 0 \leqslant t \leqslant a$, que les points $M_1(t_1)$ et $M_2(t_2)$ parcourent indépendamment. Nous admettrons que $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ont des dérivées continues jusqu'à l'ordre 3, et sont périodiques de période a, de manière que la tangente, la courbure et la torsion de C varient continûment le long de cette courbe, et que cette courbe ne présente pas de point multiple ou de rebroussement. Alors l'intégrale (1) a un sens, malgré le fait que r_{12} s'annule en même temps que $t_2 - t_1$. En effet, en posant $t_2 = t_1 + h$ on trouve sous le signe intégral, en écrivant

$$x_2 = x_1 + hx_1' + \frac{h^2}{2}\,x_1'' + R_x', \ldots;\ x_2' = x_1' + hx_1'' + \frac{h^2}{2}\,x_1''' + R_{x'}^1, \ldots,$$

l'expression

$$\frac{1}{|h|^3[s_1'^2 + h(\ldots)]^{3/2}}\left| hx_1' + \frac{h^2}{2}\,x_1'' + \ \ldots,\ x_1',\ x_1' + hx_1'' + \frac{h^2}{2}\,x_1''' + \ldots \right|$$

en convenant d'écrire une seule ligne du déterminant. On voit que ce déterminant est de l'ordre 4 en h, pour h infiniment petit, donc la fonction à intégrer dans (1) est continue dans le carré $0 \leqslant t_1, t_2 \leqslant a$, et elle est nulle sur la diagonale $t_2 = t_1$. Ainsi, J a un sens. Nous verrons que l'interprétation géométrique de J est encore liée à la variation d'un angle solide. Remarquons que la valeur de J est indépendante du sens de parcours choisi sur C, et que, en remplaçant C par sa symétrique par rapport à l'un des plans de coordonnées, J change de signe.

Nous croyons utile de préciser un peu la définition de l'angle solide. C étant une courbe fermée, rectifiable, de l'espace et M un point non situé sur C, Σ étant la sphère unité de centre M, soit Γ la projection conique de C sur Σ, avec M comme centre. Le sens positif adopté sur C induit un sens positif sur la courbe fermée sphérique Γ, courbe qui présente en général des points multiples. La courbe Γ partage Σ en domaines simplement connexes D_i qui sont quarrables. Attachons à chacun de ces domaines un indice entier, suivant une règle [1] que l'on utilise pour le calcul de l'aire orientée d'une courbe plane fermée à l'aide d'une intégrale curviligne classique. Alors, n_i étant l'indice attaché au domaine D_i d'aire (positive) A_i la somme $\Sigma n_i A_i$ donne l'aire orientée de la courbe sphérique Γ, qui est aussi l'angle solide sous lequel la courbe C est vue de M.

La règle pour le calcul des indices n_i est la suivante : on attache d'abord un indice entier n_k à l'un des domaines D_k ; ensuite, D_l étant un domaine contigu à D_k, on attache à D_l l'indice $n_k + 1$ si un observateur qui parcourt, dans le sens positif, l'arc commun aux frontières de D_k et D_l aperçoit D_k à sa gauche, et l'indice $n_k - 1$ dans le cas contraire. En continuant de proche en proche, tous les indices n_i seront déterminés, car on voit, comme dans le cas du plan, que cette règle n'est pas contradictoire. Mais, tandis que dans le cas d'une courbe plane, l'un des domaines D_i est privilégié, à savoir celui qui s'étend à l'infini, il n'en est plus ainsi dans le cas d'une courbe sphérique. Il est naturel d'attacher l'indice zéro au domaine indéfini extérieur à une courbe plane, afin d'obtenir une aire finie pour celle-ci. Dans le cas d'une courbe sphérique Γ, le choix du premier indice n_k reste arbitraire. En remplaçant n_k par un autre entier n_k', tous les autres indices augmentent de $n_k' - n_k$, donc l'aire orientée de Γ augmente de $4\pi\,(n'_k - n_k)$. Ainsi, les diverses déterminations de l'angle solide diffèrent entre elles par des multiples de 4π.

Si AM est un arc de courbe rectifiable qui ne rencontre pas la courbe C, on sait [2] que l'intégrale

$$\Phi(M) = \int_{AM} \mathrm{d}t_1 \int_C \frac{1}{r^3} \begin{vmatrix} x_1 - x & x'_1 & x' \\ y_1 - y & y'_1 & y' \\ z_1 - z & z'_1 & z' \end{vmatrix} \mathrm{d}t$$

représente la variation continue de A à M d'une même détermination de l'angle solide sous lequel la courbe C est vue du point $M_1 \in AM$. C'est une fonction de M continue dans tout l'espace, sauf aux points de C qui est une ligne critique, et $\Phi(M)$ est une fonction multiforme qui embrasse toutes les déterminations de l'angle solide attaché à C.

Le calcul déjà fait pour J montre que $\Phi(M)$ est bien définie même si l'arc AM coïncide avec un arc de C (cette courbe étant supposée continue jusqu'à l'ordre 3). Il en est de même si l'arc AM a son extrémité M sur C, les autres points de AM étant extérieurs à C, et la courbe AM ayant une tangente en M, faisant un angle θ non nul avec la tangente à C au même point. En effet, l'indice zéro marquant les valeurs prises en M, on a $x = x_0 + hx'_0 + \ldots$, $x_1 = x_0 + k\bar{x}'_0 + \ldots$, et la fonction à intégrer devient, en prenant pour paramètre l'arc, sur C et AM,

$$\frac{1}{[h^2 + k^2 + 2hk\cos\theta + \ldots]^{3/2}}\,|k\bar{x}'_0 - hx'_0 + \ldots, \bar{x}'_0 + \ldots, x'_0 + \ldots| =$$

$$= \frac{Pk^2 - Qh^2 + \ldots}{(h^2 + k^2)^{3/2}\,(1 - R + \ldots)^{3/2}},$$

P, Q, R étant des constantes, $|R| < 1$, et les points de suspension désignant des infiniment petits d'ordre supérieur à ceux déjà écrits. En passant aux coordonnées polaires dans le plan (h, k) on voit que l'intégrale Φ existe malgré la singularité pour $h = k = 0$. Ainsi, lorsque le point M_1 tend vers M le long de l'arc AM, l'angle solide $\Phi(M_1)$ tend vers une limite. Il est facile d'obtenir l'interprétation géométrique de cette limite. Traçons la sphère unité de centre M, et soit Γ la projection de C sur Σ. Cette fois Γ n'est pas une courbe fermée. C'est un arc de courbe sphérique joignant les points antipodes N_1 et N_2 où la tangente à C en M perce Σ. Le plan passant par cette tangente et la tangente en M à AM coupe Σ suivant un grand cercle qui passe par les extrémités de Γ. Complétons Γ par le demi-cercle situé, par rapport à la tangente en M à C, du coté opposé à celui qui contient l'arc AM. On obtient ainsi une courbe sphérique fermée Γ^*, ayant des points de rebroussement en N_1 et N_2. L'aire sphérique correspondante représente bien $\lim \Phi(M_1)$ pour $M_1 \to M$, $M_1 \in AM$. Cette image permet de reconnaître le caractère multiforme de $\Phi(M_1)$ autour de chaque point de C, quand M_1 tourne autour de la tangente en M à C, tout en restant voisin de M.

1. *Formation de l'invariant K.* Nous montrerons maintenant que, dans les conditions de régularité déjà indiquées pour la courbe C, l'expression

$$K = \frac{1}{4\pi}\int\limits_C\int\limits_C \frac{1}{r_{12}^3}\begin{vmatrix} x_1' & x_2' & x_1 - x_2 \\ y_1' & y_2' & y_1 - y_2 \\ z_1' & z_2' & z_1 - z_2 \end{vmatrix} \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 + \frac{1}{2\pi}\int\limits_C \tau \mathrm{d}s$$

représente un entier qui est un invariant d'isotopie attaché à C. Ici τ représente la torsion, et s l'arc sur la courbe C. Ainsi, en ajoutant la « torsion intégrale » de C à la double intégrale curviligne de Gauss prise sur C, on obtient un invariant d'isotopie attaché à C. D'ailleurs, aucun des deux termes figurant dans K n'est un entier et ne représente, à lui seul, un invariant.

Avec la courbe C considérons encore une courbe C^* parallèle à C, représentée par $x^* = x + \varepsilon\alpha'$, $y^* = y + \varepsilon\beta'$, $z^* = z + \varepsilon\gamma'$, où α', β', γ' sont les cosinus directeurs de la normale principale à C en M, et ε un petit nombre positif. La courbure de C étant bornée, on peut choisir ε_0 assez petit pour que les courbes C et C^* ne se rencontrent pas quel que soit $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Nous obtenons K comme limite pour $\varepsilon \to 0$ de l'invariant I de Gauss correspondant*) à C et C^*.

Prenons comme paramètre, sur C et C^*, l'arc s mesuré sur C à partir d'une origine fixe. Alors $\dfrac{\mathrm{d}x^*}{\mathrm{d}s} = \alpha + \varepsilon(-\rho\alpha + \tau\alpha'')$, $\ldots$, ρ et τ représentant la courbure et la torsion au point $M(s)$ sur C. Soit $M_1(s_1)$ un second point de C, et $M^*(s)$ le point (x^*, y^*, z^*) de C^*. Posons

$$U(s, s_1) = \frac{1}{\overline{M^*M_1}^3}\,|\,\alpha_1,\ \alpha + \varepsilon(-\rho\alpha + \tau\alpha''),\ x_1 - x - \varepsilon\alpha'\,| - \frac{1}{\overline{MM_1}^3}\,|\,\alpha_1,\ \alpha, x_1 - x\,|.$$

Soient $A(s - H)$ et $B(s + H)$ deux points de C, voisins de $M(s)$, $H > 0$ étant fixe. On a

$$\int\limits_C U\mathrm{d}s_1 = \int\limits_{C-AB} U\mathrm{d}s_1 + \int\limits_{AB} U\mathrm{d}s_1,$$

*) Lorsque la courbure ρ s'annule, avec $\rho' \neq 0$, en un nombre fini de points de C (points d'inflexion), il sera nécessaire, pour que C^* soit une courbe fermée, de modifier la convention habituelle sur le sens positif de la normale principale en M, qui est celui de la concavité de la projection de C dans son plan osculateur en M. En effet, au passage par un point où $\rho = 0$, $\rho' \neq 0$, le trièdre de Frenet tourne brusquement de l'angle π autour de la tangente, si l'on se maintient aux conventions classiques relatives au sens positif de la normale principale. Mais, si les coordonées de M ont des dérivées continues jusqu'à l'ordre 3, comme nous le supposons, on peut éviter cette discontinuité en changeant le sens positif de la normale principale à chaque passage par un point d'inflexion de C. La courbure $\rho(s)$ étant une fonction continue périodique le long de C, ceci revient à admettre que $\rho(s)$ change de signe à chaque passage par une valeur $\rho = 0$, $\rho' \neq 0$. Dans l'intervalle $[0,1)$ il y aura donc un nombre pair de valeurs s correspondant à ces passages, et $[0,1)$ se trouvera divisé en un nombre fini d'intervalles partiels sur chacun desquels $\rho(s)$ garde un signe constant. Dans ces intervalles partiels, le sens de la normale principale sera alternativement celui qui est situé dans la concavité de C, ou son opposé. En changeant le sens habituel de la normale principale, on devra changer simultanément celui de la binormale, et de cette manière le trièdre de Frenet variera sans discontinuité le long de C. Le signe de ρ changeant en même temps que celui de $\vec{n}$ et de $\vec{b}$, sans que la torsion τ change de signe, on voit que les formules de Frenet restent valables sous leur forme classique, tout le long de C.

et

$$\int_{C-AB} U \mathrm{d}s_1 \to 0, \ \varepsilon \to 0$$

uniformément par rapport à $s \in (0, L]$, $L =$ longueur de C, car $\overline{M^*M_1}$ et $\overline{MM_1}$ restent $\geqslant \delta > 0$ pour H fixe. Donc

$$\left| \int_{C-AB} U \mathrm{d}s_1 \right| < \eta, \ \varepsilon < \varepsilon_0(H, \eta), \ s \in (0, L].$$

Posons $h = s_1 - s$. On a

$$\int_{AB} U ds_1 = \int_{-H}^{H} \frac{\mathrm{d}h}{M^*M_1^3} |\alpha_1, \alpha + \varepsilon(-\rho\alpha + \tau\alpha''), x_1 - x - \varepsilon\alpha'| - \int_{-H}^{H} \frac{\mathrm{d}h}{MM_1^3} |\alpha_1, \alpha, x_1 - x|.$$

On a vu que, dans la dernière intégrale, la fonction à intégrer est partout continue, donc

$$\left| \int_{-H}^{H} \frac{\mathrm{d}h}{MM_1^3} \alpha_1, \alpha, x_1 - x \right| < \eta, H < H_0(\eta).$$

Quant à l'autre intégrale, utilisons les développements bien connus

$$x_1 - x = \alpha h[1 + h^2 F(h)] + \alpha' h^2 V(h) + \alpha'' h^3 W(h), \dots \ |h| < H$$

$$\alpha_1 = \alpha(1 + 3h^2 F + h^3 F') + \alpha' h(2V + hV') + \alpha''(3W + hW'), \dots$$

avec

$$F(0) = -\frac{\rho^2}{6}, \ V(0) = \frac{\rho}{2}, \quad W(0) = \frac{\rho\tau}{6}, \ F'(0) = -\frac{\rho\rho'}{12},$$

$$V'(0) = \frac{\rho'}{6}, \ W'(0) = \frac{\rho\tau' + \tau\rho'}{24},$$

On a

$$|\alpha_1, \alpha + \varepsilon(-\rho\alpha + \tau\alpha''), x_1 - x - \varepsilon\alpha'| = |\alpha_1 - \alpha, \alpha + \varepsilon - (\rho\alpha + \tau\alpha''), x_1 - \\ - x - \varepsilon\alpha'| + |\alpha, \varepsilon\tau\alpha'', x_1 - x - \varepsilon\alpha'|$$

et l'on trouve

$$|\alpha_1 - \alpha, \alpha + \varepsilon(-\rho\alpha + \tau\alpha''), x_1 - x - \varepsilon\alpha'| = \varepsilon h^2(2V\tau - 3W) + 3\varepsilon^2 h^2(F\tau + \\ + W\rho) + h^4 VW + \varepsilon h^3(V'\tau - W') + \varepsilon^2 h^3(F'\tau + W'\rho) + \varepsilon h^4(5FV\tau - \\ - VW\rho) + h^5(-V'W + VW') + \varepsilon h^5(-VF'\tau + FV'\tau + V'W\rho - \\ - VW'\rho), \ |\alpha, \varepsilon\tau\alpha'', x_1 - x - \varepsilon\alpha'| = \varepsilon^2\tau - \varepsilon h^2 V\tau,$$

$$\overline{M^*M_1^2} = [\alpha h(1 + h^2F) + \alpha'(h^2V - \varepsilon) + \alpha'' h^3 W]^2 + \ldots =$$

$$= h^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon h^2 V + h^4(2F + V^2) + h^6(F^2 + W^2),$$

$$S = \int_{-H}^{H} \frac{\mathrm{d}h}{\overline{M^*M_1^3}} \, |\alpha_1, \alpha + \varepsilon(-\rho\alpha + \tau\alpha''), x_1 - x - \varepsilon\alpha'| =$$

$$= \int_{-H}^{H} \frac{\varepsilon^2\tau + A\varepsilon h^2 + B\varepsilon^2 h^2 + C\varepsilon h^3 + Dh^4 + E\varepsilon^2 h^3 + G\varepsilon h^4 + Mh^5 + N\varepsilon h^5}{[h^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon h^2 V + h^4(2F + V^2) + h^6(F^2 + W^2)]^{3/2}} \mathrm{d}h,$$

où $A, B, C, \ldots, N$ sont des fonctions de h qui restent bornées pour $|h| \leqslant H$. Posons $h = \varepsilon t$, $|t| < T = \dfrac{H}{\varepsilon}$. L'intégrale S devient, en posant $\varepsilon = \dfrac{H}{T}$,

$$S = \int_{-T}^{T} \frac{\tau + \frac{H}{T}At^2 + \frac{H^2}{T^2}(Bt^2 + Ct^3 + Dt^4) + \frac{H^3}{T^3}(Et^3 + Gt^4 + Mt^5) + \frac{H^4}{T^4}Nt^5}{(1+t^2)^{3/2}\left[1 - \frac{2HV}{T}\frac{t^2}{1+t^2} + \frac{H^2(2F+V^2)}{T^2(1+t^2)}t^4 + \frac{H^2(F^2+W^2)}{T^4(1+t^2)}t^6\right]^{3/2}} \mathrm{d}t.$$

Entre crochets en dénominateur, les fractions $\dfrac{t^2}{1+t^2}$, $\dfrac{t^4}{T^2(1+t^2)}$, $\dfrac{t^6}{T^4(1+t^2)}$ sont sous-unitaires, F, V et W sont bornés pour $0 \leqslant t \leqslant T$. Donc, pour H suffisamment petit, $H < H_1$, on pourra utiliser le développement binomial, ce qui permet d'écrire

$$\left[1 - \frac{2HV}{T}\frac{t^2}{1+t^2} + \frac{H^2(2F+V^2)}{T^2(1+t^2)}t^4 + \frac{H^2(F^2+W^2)}{T^2(1+t^2)}t^6\right]^{-3/2} = 1 + H\rho(t, H),$$

$\rho(t, H)$ restant inférieur à un nombre fixe pour $0 \leqslant t \leqslant T$, $H < H_1$.

On voit que S se compose d'un terme indépendant de H, auquel s'ajoute un autre contenant H en facteur, et que le premier tend vers une limite pour $\varepsilon \to 0$ (donc $T \to +\infty$, H fixe), tandis que dans le second terme le coefficient de H reste borné. Pour cela on tiendra compte des relations

$$\int_{-T}^{T} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{3/2}} \to 2, \quad \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} \frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{3/2}} \to 0, \quad \frac{1}{T^2}\int_{-T}^{T} \frac{t^4\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{3/2}} \to 1$$

$$\frac{1}{T^3}\int_{-T}^{T} \frac{t^5\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{3/2}} \to \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{T^4}\int_{-T}^{T} \frac{t^5\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{3/2}} \to 0,$$

pour $T \to +\infty$. On trouve ainsi

$$S = 2\tau + H \,.\, 0(1) + \psi(\varepsilon), \text{ avec } \psi(\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon \to 0.$$

Ainsi, quel que soit $\eta > 0$

$$\left| \int_C U \mathrm{d}s_1 - 2\tau \right| < 2\eta + H\mu + \psi(\varepsilon), \; H < H_1(\eta), \; \varepsilon < \varepsilon_1(\eta),$$

μ étant constant, ou encore

$$\int_C U \mathrm{d}s_1 = 2\tau + \chi(s), \text{ avec } |\chi(s)| < \delta, \; H < H_2(\delta), \; \varepsilon < \varepsilon_2(\delta), \tag{2}$$

d'où

$$\int_C \int_{C^*} \frac{\mathrm{d}s^* \mathrm{d}s_1}{M^* M_1^3} \,|\alpha_1, \alpha^*, x_1 - x^*| = \int_C \int_C \frac{\mathrm{d}s\, \mathrm{d}s_1}{M M_1^3} \,|\alpha_1\, \alpha, x_1 - x| +$$

$$+ 2 \int_C \tau \mathrm{d}s + \int_C \chi(s)\, \mathrm{d}s$$

avec

$$\left| \int_C \chi(s)\, \mathrm{d}s \right| < L\delta, \; H < H_2(\delta), \quad \varepsilon < \varepsilon_2(\delta).$$

Or, l'intégrale du premier membre représente, au facteur 4π près, le coefficient d'enlacement des courbes C et C^*, qui n'ont pas de point commun pour ε suffisamment petit. Le premier membre reste donc constant pour $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3)$ avec ε_3 suffisamment petit, et il en résulte que

$$\int_C \chi(s)\, \mathrm{d}s = 0,$$

donc

$$\int_C \int_{C^*} \frac{\mathrm{d}s^* \mathrm{d}s_1}{M^* M_1^3} \,|\alpha_1, \alpha^*, x_1 - x^*| = \int_C \int_C \frac{\mathrm{d}s \mathrm{d}s_1}{M M_1^3} |\alpha_1, \alpha, x_1 - x| + 2 \int_C \tau \mathrm{d}s = 4\pi K \tag{3}$$

pour $\varepsilon < \varepsilon_3$. Ainsi, K est un nombre entier.

La même relation (3) montre le caractère invariant de K pour toute déformation continue de la courbe C pendant laquelle C ne se traverse pas elle-même, les éléments différentiels jusqu'au troisième ordre variant continûment. Pour de telles déformations, l'intégrale du premier membre de (3) varie continûment, et comme ses valeurs ne peuvent être que des multiples de 4π, il en résulte son invariance, et celle de K.

2. *Application d'une méthode variationnelle.* Nous retrouverons ce résultat en montrant directement que la variation δK est nulle pour toute déformation de C en une courbe isotope à C. Les courbes fermées sans point multiple C et $\bar{C}$ sont isotopes s'il existe une famille de déformations dépendant d'un paramètre $\lambda \in [0, 1]$

$$X = x + \varphi(t, \lambda),\ Y = y + \psi(t, \lambda),\ Z = z + \chi(t, \lambda) \tag{4}$$

t étant le paramètre sur la courbe C, φ, ψ, χ des fonctions périodiques de t, de période a, continues jusqu'à l'ordre 3, de manière que $\varphi(t, 0) = \psi(t, 0) = \chi(t, 0) = 0$, tandis que pour $\lambda = 1$, (X, Y, Z) représente la courbe $\bar{C}$, et que pour aucun $\lambda \in [0, 1]$ la courbe (X, Y, Z) ne possède des points multiples. En posant $\delta x = \left.\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\lambda}\right|_{\lambda=0}, \ldots$, on peut écrire, pour toute fonction $\Phi(x, y, z)$ continue jusqu'à l'ordre 3 et pour λ infiniment petit, $\Phi(X, Y, Z) = \Phi(x, y, z) + \lambda\delta\Phi + \dfrac{\lambda^2}{2}\delta^2\Phi + \ldots$ Il nous suffira de montrer que l'on a $\delta K = 0$ pour toute déformation du type (4). On a

$$J + \lambda\delta J + \frac{\lambda^2}{2}\delta^2 J + \ldots = \iint\limits_{C\ C} \begin{vmatrix} x_1 - x_2 + \lambda(\delta x_1 - \delta x_2) + \ldots \\ x_1' + \lambda\delta x_1' + \ldots \\ x_2' + \lambda\delta x_2' + \ldots \end{vmatrix} \frac{\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2}{(r_{12}^2 + \lambda\delta r_{12}^2)^{3/2}}$$

$$\delta J = \iint\limits_{C\ C} \left[\frac{1}{r_{12}^3} \left(\begin{vmatrix} \delta x - \delta x_2 \\ x_1' \\ x_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 - x_2 \\ \delta x_1' \\ x_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1' \\ \delta x_2' \end{vmatrix} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{3}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1' \\ x_2' \end{vmatrix} \frac{\delta r_{12}^2}{r_{12}^5} \right] \mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2,$$

en convenant d'écrire la premiere colonne seulement, pour chaque déterminant. Cette intégrale a un sens, car, pour $t_2 = t_1 + h$, le coefficient de $\dfrac{1}{r_{12}^3}$ est de l'ordre de h^3, et celui de $\dfrac{1}{r_{12}^5}$ est de l'ordre de h^6, ce que l'on voit en écrivant $x_2 = x_1 + hx_1' + \ldots$, $\delta x_2 = \delta x_1 + h\delta x_1' + \ldots$ Nous transformerons δJ en utilisant l'identité

$$\Phi = \frac{1}{r_{12}^3} \left(\begin{vmatrix} \delta x_1 - \delta x_2 \\ x_1' \\ x_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 - x_2 \\ \delta x_1' \\ x_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1' \\ \delta x_2' \end{vmatrix} \right) - \frac{3}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1' \\ x_2' \end{vmatrix} \frac{\delta r_{12}^2}{r_1^5} =$$

$$= \Sigma \frac{d}{\mathrm{d}t_2} \frac{\delta x_1 - \delta x_2}{r_{12}^3} \begin{vmatrix} y_1' & y_1 - y_2 \\ z_1' & z_1 - z_2 \end{vmatrix} + \Sigma \frac{d}{\mathrm{d}t_1} \frac{\delta x_2 - \delta x_1}{r_{12}^3} \begin{vmatrix} y_2' & y_2 - y_1 \\ z_2' & z_2 - z_1 \end{vmatrix}$$

où le signe Σ se réfère aux termes analogues, en $\delta y_1 - \delta y_2$, $\delta z_1 - \delta z_2$.

L'intégrale δJ est étendue au carré $Q: 0 \leqslant t_1 \leqslant a, 0 \leqslant t_2 \leqslant a$. En tenant compte de la périodicité, on peut remplacer Q par le parallélogramme $\pi: 0 \leqslant t_1 \leqslant a,\ t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_1 + a$. Intégrons Φ dans le parallélogramme plus petit $\pi_1: 0 \leqslant t_1 \leqslant a,\ t_1 + H \leqslant t_2 \leqslant t_1 + a - H$, auquel on peut appliquer la formule de Green. On a, l'intégrale δJ ayant un sens

$$\delta J = \iint_{\pi} \Phi \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 + 0(H).$$

On trouve, toujours en tenant compte de la périodicité,

$$\iint_{\pi_1} \Phi \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 = \int_0^a - \Sigma \left[\frac{\delta x_1 - \delta x_2}{r_{12}^3} \begin{vmatrix} y_1' & y_1 - y_2 \\ z_1' & z_1 - z_2 \end{vmatrix} \begin{matrix} t_2 = t_1 + H \\ t_2 = t_1 - H \end{matrix} \right| \mathrm{d}t_1 +$$

$$+ \int_0^a \Sigma \left[\frac{\delta x_2 - \delta x_1}{r_{12}^3} \begin{vmatrix} y_2' & y_2 - y_1 \\ z_2' & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \begin{matrix} t_2 = t_1 + H \\ t_2 = t_1 - H \end{matrix} \right] \mathrm{d}t_2 =$$

$$= \int_0^a \Sigma \frac{\delta x_2 - \delta x_1}{r_{12}^3} \begin{vmatrix} y_2' - y_1' & y_2 - y_1 \\ z_2' - z_1' & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \begin{matrix} t_2 = t_1 + H \\ t_2 = z_1 - H \end{matrix} \mathrm{d}t_1 =$$

$$= \int_0^a \Sigma \frac{h\, \delta x_1' + \ldots}{|h|^3 s_1'^3} \begin{vmatrix} h y_1'' + \ldots & h y_1' + \ldots \\ h z_1'' + \ldots & h z_1' + \ldots \end{vmatrix}_{h=-H}^{h=H} \mathrm{d}t_1 =$$

$$= -2 \int_0^a (\Sigma\ \rho_1 \alpha_1'' \delta x_1')\, \mathrm{d}t_1 + 0(H)$$

d'où

$$\iint_{\pi} \Phi \mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2 = -2 \int_C \rho(\alpha'' \delta x' + \beta'' \delta y' + \gamma'' \delta z')\, \mathrm{d}t + 0(H).$$

Pour $H \to 0$ on obtient

$$\delta J = -2 \int_C \rho(\alpha'' \delta\alpha + \beta'' \delta\beta + \gamma'' \delta\gamma) \mathrm{d}s. \tag{5}$$

Calculons maintenant

$$\delta \int_C \tau \mathrm{d}s = \int_C \delta \tau \mathrm{d}s + \tau \delta\, \mathrm{d}s.$$

On simplifie le calcul en remarquant que l'on peut se restreindre à considérer seulement des déformations « isométriques » de C, telles que $\delta \mathrm{d}s = 0$, sans perdre la généralité. En effet, $\bar{C}$ étant une déformée isotope de C, une homothétie permet de transformer $\bar{C}$ en une courbe $\bar{\bar{C}}$ de même longueur que C, évidemment isotope à C, dont la torsion intégrale sera égale à celle de $\bar{C}$. On peut même supposer que les courbes C et $\bar{C}$ se correspondent par égalité des arcs, donc $\delta s = 0$ et $\delta\, ds = 0$.

On a

$$\Sigma\, \alpha\, \delta\alpha = \Sigma\alpha'\, \delta\alpha' = \Sigma\alpha''\, \delta\alpha'' = 0,$$

$$\delta x'' = \delta \frac{d^2x}{ds^2} = \delta\, \rho\alpha' = \alpha'\delta\rho + \rho\,\delta\alpha',$$

$$\delta x''' = (\delta x'')' = \alpha'\delta\rho' + \rho'\,\delta\alpha' + (-\rho\alpha + \tau\alpha'')\delta\rho + \rho\delta(-\rho\alpha + \tau\alpha'') =$$

$$= \alpha'\delta\rho' + \rho'\delta\alpha' - 2\rho\alpha\delta\rho - \rho^2\delta\alpha + \rho\tau\delta\alpha'' + (\rho\delta\tau + \tau\delta\rho)\,\alpha''$$

d'où

$$\delta\rho = \Sigma\alpha'\delta x'', \quad \rho\delta\tau + \tau\delta\rho = \Sigma\alpha''\delta x''' - \rho'\Sigma\alpha''\delta\alpha' + \rho^2\Sigma\alpha''\delta\alpha,$$

$$(6) \qquad \left.\begin{aligned} \delta\rho &= \frac{d}{ds}\, \Sigma\alpha'\, \delta\alpha - \tau\, \Sigma\alpha''\, \delta\alpha, \\ \delta\tau &= \frac{d}{ds}\, \Sigma\alpha''\delta\alpha' + \rho\, \Sigma\alpha''\delta\alpha. \end{aligned}\right|$$

On a donc

$$\delta\int_C \tau\, ds = \int_C \left(\frac{d}{ds}\, \Sigma\alpha''\delta\alpha' + \rho\,\Sigma\alpha''\, \delta\alpha\right) ds = \int_C \rho(\alpha''\delta\alpha + \beta''\delta\beta + \gamma''\delta\gamma)\, ds,$$

$$\delta J + 2\delta\int_C \tau ds = 0, \;\; \delta K = 0,$$

ce qui prouve l'invariance de K.

3. *Interprétation géométrique de K.* Nous avons construit l'invariant K en employant une courbe C^* parallèle à C, représentée par $M^* = M + \varepsilon\vec{n}$, où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire dirigé suivant la normale principale à C au point M. Soit AM un arc de C et A^*M^* l'arc correspondant de C^*. Nos calculs montrent que, pour $\varepsilon \to 0$,

$$\int_{A^*M^*}\int_C \frac{ds^*ds_1}{\overline{M^*M_1}^3}\,|\alpha_1, \alpha^*, x_1 - x^*| \to \int_{AM}\int_C \frac{ds\; ds_1}{\overline{MM_1}^3}\,|\alpha_1, \alpha, x_1 - x| + 2\int_{AM} \tau ds = \Omega(s).$$

Les intégrales

$$\int_{AA^*}\int_C \frac{ds^*ds_1}{\overline{M^*M_1}^3}\,|\alpha_1, \alpha^*, x_1 - x^*|, \quad \int_{M^*M}\int_C \frac{ds^*ds_1}{\overline{M^*M_1}^3}\,|\alpha_1, \alpha^*, x_1 - x^*|$$

étant infiniment petites en même temps que ε, on peut écrire, P étant un point choisi sur A^*M^*, en omettant d'écrire toujours la même fonction à intégrer,

$$(7) \qquad \Omega(s) = \int\limits_{AA^*P} \int\limits_{C} + \int\limits_{PM^*M} \int\limits_{C} = \int\limits_{PM^*M} \int\limits_{C} - \int\limits_{PA^*A} \int\limits_{C} .$$

En effet, donnons à ε un petite valeur ε_0, et soit $\varepsilon' < \varepsilon_0$. A ε' correspond une courbe C', parallèle à C, et l'on a

$$\Omega(s) = \lim_{\varepsilon' \to 0} \int\limits_{AA'M'M} \int\limits_{C} = \lim_{\varepsilon' \to 0} \left[\int\limits_{AA'M'M} \int\limits_{C} + \int\limits_{A'A^*M^*M'A'} \int\limits_{C} \right]$$

car la dernière intégrale double est nulle, puisqu'elle représente le coefficient d'enlacement de C avec une courbe fermée engendrée par deux courbes parallèles très rapprochées de C. Cela s'écrit

$$\Omega(s) = \lim_{\varepsilon' \to 0} \int\limits_{AA'A^*M^*M'M} \int\limits_{C} = \int\limits_{AA^*P} \int\limits_{C} + \int\limits_{PM^*M} \int\limits_{C} .$$

Ainsi, la formule (7) est établie. Or, nous avons vu que

$$\int\limits_{PM^*M} \int\limits_{C} \frac{ds^* ds_1}{M^*M_1^3} |\alpha_1, \alpha^*, x_1 - x^*|$$

représente l'angle solide *autoscope*, sous lequel la courbe C est vue de son point M, correspondant à l'aire sphérique définie par la projection conique Γ de C sur la sphère unité Σ de centre M, complétée par le demi-cercle situé dans le plan osculateur à C en M, qui forme avec Γ deux points de rebroussement sur Σ. En désignant par $\mathscr{A}(s)$ cet angle solide, on a donc

$$\Omega(s) = \mathscr{A}(s) - \mathscr{A}(0), \quad s = \text{arc } AM$$

la détermination de $\mathscr{A}(s)$ étant suivie par continuité le long de AM. $\Omega(L) = 4\pi K$ n'est que la variation de $\mathscr{A}(s)$ le long de C, donc

$$4\pi K = \mathscr{A}(L) - \mathscr{A}(0),$$

ce qui nous fournit une interprétation géométrique de K.

Quoique la fonction $\mathscr{A}(s)$ ne soit pas, elle-même, invariante par isotopie, elle fournit un invariant d'isotopie, qui est sa variation le long de $C : [\mathscr{A}(s)]_C = 4\pi K$. On se demande si l'étude de l'allure de $\mathscr{A}(s)$ dans l'intervalle $(0, L]$ ne permettrait d'en déduire d'autres invariants d'isotopie de C. Par la méthode variationnelle on trouve les formules

$$\delta \int\limits_{AM} ds \int\limits_{C} \frac{ds_1}{MM_1^3} |\alpha_1, \alpha, x_1 - x| = -2 \int\limits_{AM} \rho(\alpha'' \delta\alpha + \beta'' \delta\beta + \gamma'' \delta\gamma)\, ds,$$

$$\delta \int\limits_{C} \tau \mathrm{d}s = [\,\Sigma\alpha''\,\delta\alpha'\,]_A^M + \int\limits_{AM} \rho(\alpha''\delta\alpha + \beta''\delta\beta + \gamma''\delta\gamma)\mathrm{d}s,$$

$$\delta\Omega(s) = \delta \int\limits_{AM} \left| 2\tau + \int\limits_{C} \frac{\mathrm{d}s_1}{MM_1^3}\,|\alpha_1,\,\alpha,\,x_1 - x\,| \right| \mathrm{d}s = 2[\,\Sigma\alpha''\delta\alpha'\,]_A^M.$$

4. *Cas d'un contour polygonal.* Nous avons supposé plus haut que la tangente à C, la courbure ρ et la torsion τ, varient continûment le long de C. Voyons ce qui arrive lorsque la tangente, la courbure ou la torsion font des sauts en nombre fini.

Un saut de la tangente est caractérisé par la présence d'un point anguleux M_0 sur C, sans que le plan osculateur cesse de varier continûment au voisinage de M_0. Les deux demi-tangentes à C en M_0 percent la spère unité de centre M_0 en deux points N_1 et N_2 qui ne sont plus des antipodes. Mais la trace du plan osculateur sur cette sphère tendant vers une même position limite lorsque M_2 tend vers M_0 d'un côté ou de l'autre, on voit que dans ce cas l'angle solide $\Omega(s)$, construit comme nous l'avons indiqué, n'éprouve aucune discontinuité au passage par M_0. Un saut de courbure en M_0, accompagné ou non d'un saut de la tangente, reste aussi sans effet sur la continuité de $\Omega(s)$ en M_0.

Mais il n'en est plus ainsi lorsque la torsion fait un saut en M_0. En supposant que la tangente varie continûment au voisinage de M_0, les points N_1 et N_2 seront des antipodes, mais la trace du plan osculateur sur la sphère unité ne tend pas vers la même position-limite, suivant que $M_2 \to M_0$ par l'un ou l'autre côté. Le saut de $\Omega(s)$ sera visiblement donné par l'aire d'un fuseau sphérique déterminé par les deux plans osculateurs à C en M_0.

Ces remarques nous permettent le calcul de l'invariant K lorsque C est un contour polygonal. Sur chaque côté A_iA_{i+1} de C prenons un point arbitraire p_i. Nous admettrons que le plan osculateur à C en chaque point du contour $p_{i-1}A\,p_i$ coïncide avec le plan de ces trois points, et ceci pour chaque i. Les sommets de C n'introduisent donc aucun saut pour $\Omega(s)$, et l'on aura en p_i un saut de la torsion, mesuré par σ_i = angle des plans $A_{i-2}A_{i-1}A_i$; $A_{i-1}A_iA_{i+1}$.

Il nous reste à montrer de quelle manière nous avons conduit le calcul pour nous convaincre que K n'est pas identiquement nul. Le calcul effectif de K, avec une approximation inférieure à 1/2 serait suffisant, puisque sa valeur est un entier. Mais ce calcul étant des plus laborieux, même pour les courbes unicursales les plus simples, non isotopes à un cercle, nous avons préféré recourir à une représentation du nœud par un contour polygonal fermé. Le calcul de K est alors possible exactement. Ceci revient au calcul de l'intégrale de Gauss lorsque M_1 et M_2 décrivent respectivement deux segments rectilignes dirigés, AB et CD. Examinons donc l'intégrale

$$I_{AB,CD} = \int\limits_{AB}^{1} \int\limits_{CD}^{2} \frac{1}{r_{12}^3}\,(\overrightarrow{M_1M_2} \cdot [\overrightarrow{\mathrm{d}s_1}\ \overrightarrow{\mathrm{d}s_2}]).$$

Posons $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $M_1 = A + s\vec{a}$, $M_2 = C + t\vec{b}$; $s, t \in [0, 1]$.

On a $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{c} - s\vec{a} + t\vec{b}$, et

$$I = \int_0^1\int_0^1 \frac{1}{\overline{M_1M_2^3}} (\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}, \vec{b})\, dsdt = (\vec{a}\vec{b}\vec{c}) \int_0^1\int_0^1 \frac{ds\, dt}{\overline{M_1M_2^3}}$$

$$\overline{M_1M_2} = c^2 + a^2s^2 + b^2t^2 - 2s\vec{a}\vec{c} + 2t\vec{b}\vec{c} - 2st\vec{a}\vec{b} = a^2s^2 + b^2t^2 -$$

$$-2abst \cos\gamma - 2acs \cos\beta + 2bct \cos\alpha + c^2 = P(s, t)$$

en désignant par a, b, c les longueurs des vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ et en posant

$$\vec{a}\vec{b} = ab \cos \gamma,\ \vec{b}\vec{c} = bc \cos \alpha,\ \vec{c}\vec{a} = ca \cos \beta.$$

On trouve comme fonction primitive

$$U(s, t) = \iint \frac{ds\, dt}{[P(s, t)]^{3/2}} = \frac{2}{V} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{c\lambda} [(1 - \cos\gamma)(as + bt - \sqrt{P(s, t)}) +$$
$$+ c(\cos \alpha - \cos \beta)]$$

avec $V = \vec{a}\vec{b}\vec{c}$, $|V| = abc\lambda$. On a, en effet, $\dfrac{\partial^2 U}{\partial s\, \partial t} = \dfrac{1}{P^{3/2}}$, ce qui permet le calcul de I. Remarquons que l'expression entre crochets ne devient jamais infinie pour $s, t \in [0, 1]$. On peut donc toujours prendre pour pour arctg sa détermination principale, comprise entre $-\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$. On trouve ainsi les formules suivantes, nécessaires pour le calcul effectif de I,

$$(8) \qquad \frac{1}{2} I_{AB,CD} = \operatorname{arctg} \frac{P}{V} - \operatorname{arctg} \frac{Q}{V} - \operatorname{arctg} \frac{R}{V} + \operatorname{arctg} \frac{S}{V}$$

avec

$$P = ab[(1 - \cos \gamma)(a + b - d) + c(\cos \alpha - \cos \beta)] = a \,.\, \vec{b}\vec{c} - b \,.\, \vec{a}\vec{c} +$$
$$+ (a + b - d)(ab - \vec{a}\vec{b}),$$

$$Q = ab[(1 - \cos\gamma)(b - f) + c(\cos \alpha - \cos \beta)] = a \,.\, \vec{b}\vec{c} - b \,.\, \vec{a}\vec{c} +$$
$$+ (b - f)(ab - \vec{a}\vec{b}),$$

$$R = ab[(1 - \cos \gamma)(a - e) + c(\cos \alpha - \cos \beta)] = a \,.\, \vec{b}\vec{c} - b \,.\, \vec{a}\vec{c} +$$
$$+ (a - e)(ab - \vec{a}\vec{b}),$$

$$S = ab[(1 - \cos \gamma)(-c) + c(\cos \alpha - \cos \beta)] = a \,.\, \vec{b}\vec{c} - b \,.\, \vec{a}\vec{c} - c(ab - \vec{a}\vec{b}),$$

$$d = BD,\ e = BC,\ f = AD.$$

La formule (8) suffit pour calculer K dans le cas d'un contour polygonal, puisque le calcul des sauts σ_i de la torsion est immédiat. La formule (8) peut servir également pour calculer l'intégrale de Gauss relative à un enlacement de deux contours polygonaux sans point commun. Dans ce dernier cas on n'aura aucune correction à apporter par suite de l'existence des sommets.

5. *L'invaraint K n'est pas identiquement nul.* Nous avons effectué ce calcul pour le nœud en trèfle de la figure, les coordonnées des sommets étant

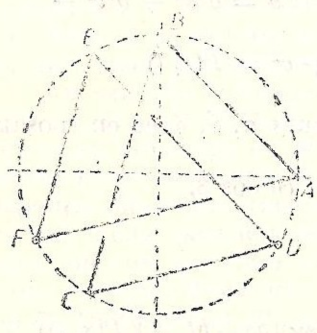

Fig. 1

$A(2, 0, 0) \qquad B(0, 2, k)$

$C(-1, -\sqrt{3}, 0) \qquad D(\sqrt{3}, -1, k)$

$E(-1, \sqrt{3}, 0) \qquad F(-\sqrt{3}, -1, k),$

k étant un paramètre positif, représentant la hauteur des points B, D, F au-dessus du plan des sommets A, C, E. La valeur positive attribuée à k sera visiblement sans influence sur la valeur de notre invariant, la classe d'isotopie du nœud considéré étant la même pour tout $k > 0$. Il suffit de calculer, par les formules que nous venons d'indiquer,

$I_{AB,DE}$, $I_{AB,EF}$, $I_{BC,DE}$ et l'on a $4\pi J = 6I_{AB,DE} + 6I_{AB,EF} + 6I_{BC,DE}$.

On trouve :

1. Pour $I_{AB,DE}$. Posons, afin d'appliquer (8)

$$\vec{a}(-2, 2, k),\ \vec{b}(-1 - \sqrt{3},\ 1 + \sqrt{3},\ -k),\ \vec{c}(\sqrt{3} - 2,\ -1,\ k).$$

On trouve après calcul

$$P = (2 + k^2)\sqrt{8 + k^2} + (2 + k^2 - 2\sqrt{3})\sqrt{8 + k^2 + 4\sqrt{3}} +$$
$$+ (4 - k^2 + 4\sqrt{3})\sqrt{8 + k^2 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{(k^2 + 8)(k^4 + 16k^2 + 16)},$$

$$Q = (6 + 4\sqrt{3})\sqrt{8 + k^2} - (6 + 2\sqrt{3})\sqrt{8 + k^2 + 4\sqrt{3}} +$$
$$+ 24 + 8\sqrt{3} - 2\sqrt{3}k^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{(8 + k^2)(8 + k^2 + 4\sqrt{3})},$$

$$R = -(6 + 4\sqrt{3})\sqrt{8 + k^2} + (6 + 2\sqrt{3}\sqrt{8 + k^2 + 4\sqrt{3}} +$$
$$+ 24 + 8\sqrt{3} - 2\sqrt{3}k^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{(8 + k^2)(8 + k^2 + 4\sqrt{3})},$$

$$S = -(2 + k^2)\sqrt{8 + k^2} - (2 + k^2 - 2\sqrt{3})\sqrt{8 + k^2 + 4\sqrt{3}} +$$
$$+ (4 - k^2 + 4\sqrt{3}\sqrt{8 + k^2 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{(k^2 + 8)(k^4 + 16k^2 + 16)},$$

$$V = 6k.$$

2. Pour $I_{AB,EF}$ on pose

$$\vec{a}(-2, 2, k),\ \vec{b}(1-\sqrt{3},\ -1-\sqrt{3},\ k),\ \vec{c}(-3, \sqrt{3}, 0)$$

et l'on trouve

$$P = 12(-2\sqrt{3}+\sqrt{8+k^2}),\ Q = -12\sqrt{8+k^2+4\sqrt{3}},$$

$$R = -12\sqrt{8+k^2-4\sqrt{3}},\ S = -12(2\sqrt{3}+\sqrt{8+k^2}),\ V = -12k$$

3. Pour $I_{BC,DE}$ on pose

$$\vec{a}(-1,\ -2-\sqrt{3},\ -k),\ \vec{b}(-1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}, -k),\ \vec{c}(\sqrt{3},\ -3,\ 0)$$

et l'on trouve

$$P = -36-24\sqrt{3}+(12+6\sqrt{3})\sqrt{8+k^2+4\sqrt{3}},$$

$$Q = -(12+6\sqrt{3})\sqrt{8+k^2-4\sqrt{3}},\ R = -(12+6\sqrt{3})\sqrt{8+k^2},$$

$$S = -36-24\sqrt{3}-(12+6\sqrt{3})\sqrt{8+k^2+4\sqrt{3}},\ V = 6k.$$

Il est avantageux de changer de notations en posant

$$x = \sqrt{k^2+8},\quad X = \sqrt{x^2+4\sqrt{3}},\ Y = \sqrt{x^2-4\sqrt{3}}\ \text{avec}\ x > 2\sqrt{2}.$$

Reste à faire la somme des termes suivants

$$T_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{6k}[-6x-2(3+\sqrt{3})X+4(3+\sqrt{3})Y+x^3+Xx^2-Yx^2-XYx],$$

$$T_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{6k}[6x+2(3+\sqrt{3})X+4(3+\sqrt{3})Y-x^3-Xx^2-Yx^2-XYx],$$

$$T_3 = -\operatorname{arctg}\frac{1}{3k}[(3+2\sqrt{3})x-(3+\sqrt{3})X+12(1+\sqrt{3})-\sqrt{3}x(x+X)],$$

$$T_4 = -\operatorname{arctg}\frac{1}{3k}[-(3+2\sqrt{3})x+(3+\sqrt{3})X+12(1+\sqrt{3})-\sqrt{3}x(x+X)],$$

$$T_5 = \operatorname{arctg}\frac{1}{k}(2\sqrt{3}-x),\quad T_6 = \operatorname{arctg}\frac{1}{k}(2\sqrt{3}+x),\quad T_7 = -\operatorname{arctg}\frac{X}{k},$$

$$T_8 = -\operatorname{arctg}\frac{Y}{k},\quad T_9 = -\operatorname{arctg}\frac{1}{k}[2(3+2\sqrt{3})-(2+\sqrt{3})X],$$

$$T_{10} = -\operatorname{arctg}\frac{1}{k}[2(3+2\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})X],\quad T_{11} = \operatorname{arctg}\frac{2+\sqrt{3}}{k}Y,$$

$$T_{12} = \operatorname{arctg}\frac{2+\sqrt{3}}{k}x.$$

On trouve sans peine

$$T_1 + T_2 = -\operatorname{arctg} \frac{Yk}{\sqrt{3x^2-2-6\sqrt{3}}}, \quad T_8 + T_{11} = \operatorname{arctg} \frac{Yk}{\sqrt{3x^2-2-6\sqrt{3}}}$$

d'où

$$T_1 + T_2 + T_8 + T_{11} = 0 (\mathrm{mod}\ \pi).$$

D'une manière analogue, en calculant

$T_3 + T_4$, $T_9 + T_{10}$, $T_5 + T_6$ on trouve

$$T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + T_9 + T_{10} = 0 \ (\mathrm{mod}\ \pi).$$

Quant aux termes $T_7 + T_{12}$, ils sont compensés par la correction due aux sauts du plan osculateur. En désignant par $\measuredangle (ABC, BCD)$ l'angle des plans ABC et BCD, ces corrections sont $\alpha = \measuredangle (ABC, BCD)$ et $\beta = \measuredangle (BCD, CDE)$, et l'on trouve

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{Xk,}{4 + 2\sqrt{3}}, \quad \beta = \operatorname{arctg} \frac{kx}{\sqrt{3x^2 + 8 + 4\sqrt{3}}}$$

d'où

$$2T_7 = -\alpha, \qquad 2T_{12} = \beta.$$

Ainsi, on a

$$\sum_{i=1}^{12} 2T_i - \alpha + \beta = 2\pi = I_{AB,DE} + I_{AB,EF} + I_{BC,DE} = \frac{2\pi}{3} K$$

d'où

$$K = 3.$$

On trouve la valeur 2π pour la première somme en prenant $k = 1$ et en calculant les T_i à une minute près.

Ceci prouve que l'invariant K n'est pas identiquement nul.

Un calcul analogue permet le calcul de K pour les classes de nœuds les plus simples dont le tableau a été dressé par Alexander et Briggs [3], en cherchant pour chaque classe un modèle polygonal aussi avantageux que possible au point de vue calcul, c'est-à-dire un contour polygonal pour lequel le nombre d'intégrales $I_{AB,CD}$ à calculer sera minimum. On choisira, à cette fin, des contours à symétrie de rotation, ou par rapport à un plan. Il y a lieu de remarquer que $I_{AB,CD}$ est nulle lorsque les côtés AB et CD sont dans un même plan.

L'invariant K, que nous venons de signaler, serait le premier terme d'une suite infinie d'invariants d'isotopie attachée à toute courbe fermée de l'espace, qui devrait caractériser la classe d'isotopie de cette courbe, suite qui reste encore inconnue. D'ailleurs, le problème se pose également pour un enlacement de deux courbes, car l'invariant de Gauss ne saurait suffire pour caractériser les diverses classes d'enlacements, classes en nombre infini. Pour les enlacements de trois ou plusieurs courbes, aucun invariant de nature intégrale n'est connu. Il nous semble possible que de tels invariants puissent être déduits de la fonction spatiale $\Omega(s)$ définie plus haut (il y a 4 fonctions spatiales attachées à un enlacement de deux courbes).

BIBLIOGRAPHIE

1. E. Goursat. *Cours d'analyse mathématique*, vol. I, 3 éd., Paris, p. 230.
2. E. Picard, *Traité d'analyse*, vol. I, 3 éd., p. 150.
3. K. Reidemeister, *Knotheorie*, Ergebnisse d. math. Wiss, 1932.